УДК 517.9

Конфигурация канала переменного сечения, допускающая безотражательное распространение внутренних волн в океане

© **А. В. Багаев** [1], **Е. Н. Пелиновский** [2]

Аннотация. Обсуждается математическая задача, связанная с нахождением конфигурации каналов переменного сечения, допускающих так называемое безотражательное распространение внутренних волн в океане на далекие расстояния. Задача сводится к нахождению ограниченных на всей числовой оси решений обыкновенного дифференциального уравнения второго порядка, содержащего две неизвестные функции. Показано, что такие решения существуют и найден их явный вид.

Ключевые слова: волновое уравнение с переменными коэффициентами, уравнение Клейн-Гордона, бегущие волны в неоднородной среде, стратифицированная жидкость

1. Введение

Как известно, в неоднородной среде волны теряют свою энергию при распространении в силу эффектов отражения, рассеяния и дифракции. Если среда неоднородна в поперечном сечении к направлению распространения, то возможно так называемое волноводное распространение, и энергия волны может передаваться на большие расстояния. Математическим эквивалентном такого процесса является существование решений в виде $f(x-ct, y, z)$, перемещающихся вдоль оси x с постоянной скоростью c — так называемые бегущие волны. Их нахождение в нелинейных средах является нетривиальной задачей, на которой мы не будем здесь останавливаться. В то же время считалось, что в неоднородной по трассе среде бегущих волн не существует, поскольку есть отражение от неоднородностей. Это правило справедливо в общем случае, однако из него имеются исключения, если параметры среды меняются специальным образом – см. примеры в различных физических средах ([1]-[9]). Во всех рассмотренных примерах получены сингулярные безотражательные конфигурации параметров среды, которые годятся только в конечной области, а не на всей числовой оси. Настоящая работа посвящена поиску безотражательных конфигураций каналов переменного сечения, в котором находится несжимаемая двухслойная жидкость в поле тяжести. Основной упор будет сделан на анализе конфигураций, которые остаются конечными на всей числовой оси, из чего следует, что в таких каналах волны могут распространяться на большие расстояния без потери энергии. Математически такая задача ставится следующим образом: возможно ли найти решения типа $f(x - ct)$ волнового уравнения с переменными коэффициентами?

[1] Доцент кафедры «Прикладная математика», Нижегородский государственный технический университет им. Р. Е. Алексеева, г. Нижний Новгород; a.v.bagaev@gmail.com

[2] Профессор кафедры «Прикладная математика», Нижегородский государственный технический университет им. Р. Е. Алексеева, г. Нижний Новгород; профессор кафедры информационных систем и технологий, Национальный исследовательский университет — Высшая школа экономики, г. Нижний Новгород; pelinovsky@gmail.com

2. Трансформация волнового уравнения к уравнению Клейна–Гордона с постоянными коэффициентами

Волновые движения малой амплитуды в двухслойной несжимаемой идеальной жидкости описываются волновым уравнением ([10])

$$B(x)\frac{\partial^2\eta}{\partial t^2} - \frac{\partial}{\partial x}\left(B(x)c^2(x)\frac{\partial\eta}{\partial x}\right) = 0, \quad (2.1)$$

где

$$c^2(x) = g'\frac{h_1 h_2(x)}{h_1 + h_2(x)}. \quad (2.2)$$

Здесь η — смещение поверхности раздела жидкостей разной плотности, h_1 и $h_2(x)$ — глубины верхнего и нижнего слоев, $B(x)$ — ширина канала, и $g' = g(\rho_2 - \rho_1)/\rho_1$ — редуцированное значение ускорения свободного падения, $\rho_1 < \rho_2$ — плотности верхнего и нижнего слоев. Геометрия задачи показана на рис. 2.1.

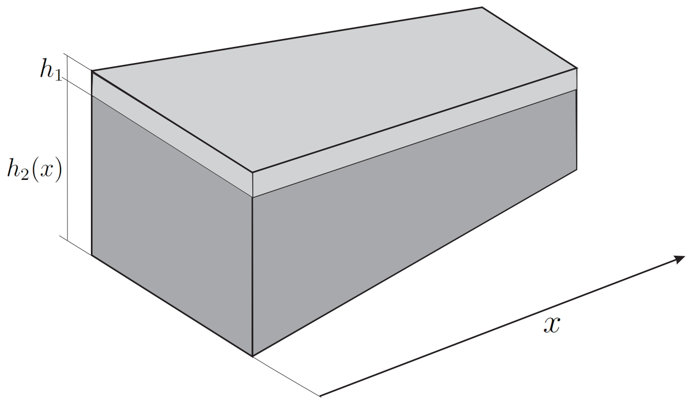

Рисунок **2.1**

Получение решений волнового уравнения с переменными коэффициентами основано на трансформационной технике, описанной в ([11], [12], [4]). Для этого представим решение уравнения (2.1) как

$$\eta(t,x) = A(x)\Phi(t,\tau), \quad (2.3)$$

где новые переменные имеют смысл амплитуды $A(x)$ и фазы — времени распространения волны $\tau(x)$. Тогда уравнение (2.1) сводится к уравнению типа Клейна-Гордона с переменными коэффициентами для новой неизвестной функции $\Phi(t,\tau)$

$$AB\left[\frac{\partial^2\Phi}{\partial t^2} - c^2\left(\frac{d\tau}{dx}\right)^2\frac{\partial^2\Phi}{\partial\tau^2}\right] - \left[Bc^2\frac{dA}{dx}\frac{d\tau}{dx} + \frac{d}{dx}\left(c^2AB\frac{d\tau}{dx}\right)\right]\frac{\partial\Phi}{\partial\tau} - \\ - \frac{d}{dx}\left(c^2\frac{dA}{dx}B\right)\Phi = 0. \quad (2.4)$$

Уравнение (2.4) содержит переменные коэффициенты, как и исходное волновое уравнение (2.1). Найдем условия, когда коэффициенты уравнения (2.4) станут постоянными. Первое из них вытекает из структуры волнового оператора (даламбериана) в первых квадратных скобках и приводит к определению фазы

$$\tau(x) = \int\frac{dx}{c(x)}, \quad (2.5)$$

где мы для определенности взяли знак плюс. Такого рода выражение для фазы (эйконала) известно для волн в плавно неоднородной среде, здесь же оно получается в весьма общем виде. Вторая скобка в (2.4) обязана быть равной нулю, чтобы решения не нарастали в пространстве на одном из концов

$$A(x) = \frac{const}{\sqrt{c(x)B(x)}}. \tag{2.6}$$

Наконец, коэффициент перед последним членом в (2.4) должен быть пропорциональным AB, чтобы уравнение Клейна–Гордона имело постоянные коэффициенты. Это приводит к уравнению

$$\frac{d}{dx}\left[c^2 B \frac{dA}{dx}\right] = -pAB, \tag{2.7}$$

где p — произвольная константа. Удобно исключить амплитуду A с помощью формулы (2.6), тогда уравнение (2.7) становится замкнутым уравнением, описывающим изменение глубины и ширины канала в безотражательном случае

$$\frac{d}{dx}\left[\sqrt{\frac{c(x)}{B(x)}}\frac{d}{dx}\left(c(x)B(x)\right)\right] = 2p\sqrt{\frac{B(x)}{c(x)}}. \tag{2.8}$$

В результате уравнение (2.4) становится уравнением Клейна–Гордона с постоянными коэффициентами

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \tau^2} + p\Phi = 0. \tag{2.9}$$

Уравнение Клейна–Гордона (2.9) очень хорошо изучено в математической физике и в теории поля, для него легко поставить и решить задачу Коши. Здесь мы сосредоточимся на изучении характеристик безотражательного канала, описываемых уравнением (2.8).

3. Ограниченные решения уравнения (2.8)

Уравнение (2.8) было получено в [9], там же были получены частные решения этого уравнения. Все частные решения оказывались сингулярными (когда c или B обращалось в нуль), либо уходящими в бесконечность на больших расстояниях. В сингулярном случае канал оказывался ограниченным, а в другом случае нарушалась применимость волнового уравнения (2.1), в котором глубина канала должна быть малой по сравнению с длиной волны. Тем самым, уравнение (2.9) работало только на ограниченном интервале τ и на концах надо было использовать те или иные граничные условия (которые не всегда легко сформулировать, например, когда волна выходит на берег) либо сшивать безотражательную конфигурацию с другой. Поэтому поставим следующую задачу: найти общий вид решения уравнения (2.8), а также условий, при которых решения заданы на всей числовой оси и всюду ограничены:

$$0 < c(x) \leq c_1, 0 < B(x) \leq B_1, \forall x \in \mathbb{R}. \tag{3.1}$$

3.1. Общий вид решения уравнения (2.8)

Пусть $c = c(x)$, $B = B(x)$ — решение уравнения (2.8). Умножим (2.8) на $\sqrt{\frac{c(x)}{B(x)}}$ и положим

$$\begin{cases} u = c(x)/B(x), \\ v = \dfrac{d}{dx}(c(x)B(x)). \end{cases} \tag{3.2}$$

Тогда

$$\sqrt{u}\frac{d}{dx}(v\sqrt{u}) = 2p,$$

откуда получаем линейное дифференциальное уравнение первого порядка

$$2uv' + u'v = 4p. \tag{3.3}$$

Зафиксируем в (3.3) функцию $u = u(x)$ и найдем $v = v(x)$. Интегрируя (3.3), получим

$$v(x) = \frac{2p\int \frac{dx}{\sqrt{u}} + \alpha}{\sqrt{u}}, \quad \alpha \in \mathbb{R}. \tag{3.4}$$

Принимая во внимание (3.2), имеем

$$\begin{cases} cB = \displaystyle\int v\,dx = \int \frac{2p\int \frac{dx}{\sqrt{u}} + \alpha}{\sqrt{u}}\,dx, \\ \dfrac{c}{B} = u, \end{cases}$$

откуда

$$\begin{cases} c^2 = u\displaystyle\int v\,dx = u\int \frac{2p\int \frac{dx}{\sqrt{u}} + \alpha}{\sqrt{u}}\,dx, \\ B^2 = \dfrac{c^2}{u^2} = \dfrac{1}{u}\displaystyle\int \frac{2p\int \frac{dx}{\sqrt{u}} + \alpha}{\sqrt{u}}\,dx. \end{cases} \tag{3.5}$$

Обозначим $F(x) = \int \frac{dx}{\sqrt{u(x)}}$, тогда $F'(x) = \frac{1}{\sqrt{u(x)}}$ и $u(x) = 1/F'^2(x)$. Следовательно,

$$c^2 = \frac{1}{F'^2}\int \frac{2pF + \alpha}{\sqrt{u}}dx = \frac{1}{F'^2}\int (2pF + \alpha)dF = \frac{pF^2 + \alpha F + \beta}{F'^2},$$

$$B^2 = F'^2(pF^2 + \alpha F + \beta),$$

где $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Таким образом, решение уравнения (2.8) имеет вид

$$\begin{cases} c(x) = \dfrac{\sqrt{pF^2(x) + \alpha F(x) + \beta}}{|F'(x)|}, \\ B(x) = |F'(x)|\sqrt{pF^2(x) + \alpha F(x) + \beta}, \end{cases} \tag{3.6}$$

где $F = F(x)$ — произвольная дифференцируемая функция, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

3.2. Исследование решений уравнения (2.8) на ограниченность

Будем искать среди решений уравнения (2.8) решения, удовлетворяющие условию (3.1). Рассмотрим сначала простейший **случай** $\mathbf{p = 0}, \alpha = \mathbf{0}, \beta > \mathbf{0}$. Тогда (3.6) будет иметь вид

$$\begin{cases} c(x) = \dfrac{\sqrt{\beta}}{|F'(x)|} = \dfrac{\sqrt{\beta}}{\Psi(x)}, \\ B(x) = \sqrt{\beta}|F'(x)| = \sqrt{\beta}\Psi(x), \end{cases}$$

где $\Psi(x) = |F'(x)|$. Система неравенств

$$\begin{cases} 0 < \dfrac{\sqrt{\beta}}{\Psi(x)} \le c_1, \\ 0 < \sqrt{\beta}\Psi(x) \le B_1, \end{cases}$$

имеет решение

$$0 < \frac{\sqrt{\beta}}{c_1} \leq \Psi(x) \leq \frac{B_1}{\sqrt{\beta}} \tag{3.7}$$

при условии $c_1B_1 \geq \beta > 0$; в противном случае решений нет.

Таким образом, **в случае** $\mathbf{p = 0}, \alpha = \mathbf{0}, \quad \beta \neq \mathbf{0}$ ограниченное решение имеет вид

$$\begin{cases} c(x) = \dfrac{\sqrt{\beta}}{\Psi(x)}, \\ B(x) = \sqrt{\beta}\Psi(x), \end{cases} \tag{3.8}$$

где $\Psi(x)$ — любая дифференцируемая функция, удовлетворяющая условию (3.7) и $c_1B_1 \geq \beta > 0$.

Пусть теперь $\mathbf{p = 0}, \alpha \neq \mathbf{0}$. Тогда (3.6) будет иметь вид

$$\begin{cases} c(x) = \dfrac{\sqrt{\alpha F(x) + \beta}}{|F'(x)|} = \dfrac{\sqrt{\alpha\Psi(x)}}{|\Psi'(x)|}, \\ B(x) = |F'(x)|\sqrt{\alpha F(x) + \beta} = |\Psi'(x)|\sqrt{\alpha\Psi(x)}, \end{cases}$$

где $\Psi(x) = F(x) + \frac{\beta}{\alpha}$.

Исследуем ограниченность решений в этом случае. Для этого рассмотрим систему дифференциальных неравенств

$$\begin{cases} \dfrac{\sqrt{\alpha\Psi(x)}}{|\Psi'(x)|} \leq c_1, \\ |\Psi'(x)|\sqrt{\alpha\Psi(x)} \leq B_1. \end{cases} \tag{3.9}$$

Решениями уравнения

$$\frac{\sqrt{\alpha\Psi(x)}}{|\Psi'(x)|} = c_1 \tag{3.10}$$

являются две функции

$$\Psi_+(x) = \frac{\alpha}{4}\left(\frac{x}{c_1} + a\right)^2, \qquad \Psi_-(x) = \frac{\alpha}{4}\left(-\frac{x}{c_1} + a\right)^2, \tag{3.11}$$

где $a \in \mathbb{R}$. Для того, чтобы получить решения первого неравенства системы (3.9), рассмотрим a в (3.11) как функцию $a = a(x)$. После подстановки $\Psi_+(x)$ в первое неравенство системы (3.9) будем иметь

$$\frac{1}{|\frac{1}{c_1} + a'(x)|} \leq c_1 \qquad \Leftrightarrow \qquad \left[\begin{array}{l} a'(x) \geq 0, \\ a'(x) \leq -\dfrac{2}{c_1}. \end{array}\right. \tag{3.12}$$

Итак, $\Psi_+(x) = \frac{\alpha}{4}\left(\frac{x}{c_1} + a(x)\right)^2$ — решение первого неравенства системы (3.9), где $a(x)$ — функция, удовлетворяющая условию $a'(x) \geq 0$ или $a'(x) \leq -\frac{2}{c_1}$. Подставив найденное $\Psi_+(x)$ во второе неравенство (3.9), получим:

$$\frac{\alpha^2}{4}\left|\frac{1}{c_1} + a'(x)\right|\left(\frac{x}{c_1} + a(x)\right)^2 \leq B_1. \tag{3.13}$$

При условиях (3.12) на функцию $a(x)$ левая часть неравенства (3.13) является неограниченной функцией на $\mathbb{R}$ и, следовательно, $\Psi_+(x)$ не является решением системы (3.9).

Аналогичные рассуждения проводятся для функции $\Psi_-(x)$.

Таким образом, при $\mathbf{p} = \mathbf{0}, \alpha \neq \mathbf{0}, \beta > \mathbf{0}$ нет решений, удовлетворяющих условию (3.1).

Пусть $\mathbf{p} \neq \mathbf{0}$. Выделим полный квадрат под корнем в (3.6)

$$pF^2 + \alpha F + \beta = p\left(F + \frac{\alpha}{2p}\right)^2 + \beta - \frac{\alpha^2}{4p} = p\Psi^2 + \gamma,$$

где $\Psi = F + \frac{\alpha}{2p}$, $\gamma = \beta - \frac{\alpha^2}{4p}$. Тогда (3.6) запишется в виде

$$\begin{cases} c(x) = \dfrac{\sqrt{p\Psi^2(x) + \gamma}}{|\Psi'(x)|}, \\ B(x) = |\Psi'(x)|\sqrt{p\Psi^2(x) + \gamma}. \end{cases} \tag{3.14}$$

Исследуем ограниченность полученных решений. Для этого рассмотрим систему дифференциальных неравенств

$$\begin{cases} \dfrac{\sqrt{p\Psi^2(x) + \gamma}}{|\Psi'(x)|} \le c_1, \\ |\Psi'(x)|\sqrt{p\Psi^2(x) + \gamma} \le B_1. \end{cases} \tag{3.15}$$

Необходимо рассмотреть 4 случая: **(1)** $p > 0, \gamma > 0$; **(2)** $p > 0, \gamma = 0$; **(3)** $p > 0, \gamma < 0$; **(4)** $p < 0, \gamma > 0$.

Случай 1 ($\mathbf{p} > \mathbf{0}, \gamma > \mathbf{0}$). Решениями уравнения

$$\frac{\sqrt{p\Psi^2(x) + \gamma}}{|\Psi'(x)|} = c_1 \tag{3.16}$$

являются две функции

$$\Psi_+(x) = \sqrt{\frac{\gamma}{p}}\,\mathrm{sh}\,\sqrt{p}\left(\frac{x}{c_1} + a\right), \quad \Psi_-(x) = \sqrt{\frac{\gamma}{p}}\,\mathrm{sh}\,\sqrt{p}\left(-\frac{x}{c_1} + a\right), \tag{3.17}$$

где $a \in \mathbb{R}$. Для того, чтобы получить решения первого неравенства системы (3.15), рассмотрим a в (3.17) как функцию $a(x)$. После подстановки $\Psi_+(x)$ в первое неравенство системы (3.15) будем иметь (3.12). Итак, $\Psi_+(x) = \sqrt{\frac{\gamma}{p}}\,\mathrm{sh}\,\sqrt{p}\left(\frac{x}{c_1} + a(x)\right)$ — решение первого неравенства системы (3.15) при условии, что функция $a(x)$ удовлетворяет неравенству $a'(x) \ge 0$ или $a'(x) \le -\frac{2}{c_1}$. Подставив найденное $\Psi_+(x)$ во второе неравенство (3.15), получим:

$$\gamma\left|\frac{1}{c_1} + a'\right|\mathrm{ch}^2\,\sqrt{p}\left(\frac{x}{c_1} + a\right) \le B_1. \tag{3.18}$$

При условиях (3.12) на функцию $a(x)$ левая часть неравенства(3.18) является неограниченной функцией на $\mathbb{R}$ и, следовательно, $\Psi_+(x)$ не является решением системы(3.15).

Аналогичные рассуждения проводятся для функции $\Psi_-(x)$.

Таким образом, при $\mathbf{p} > \mathbf{0}, \gamma > \mathbf{0}$ нет решений, удовлетворяющих условию (3.1).

Аналогично доказывается, что **Случай 2** ($\mathbf{p} > \mathbf{0}, \gamma = \mathbf{0}$) и **Случай 3** ($\mathbf{p} > \mathbf{0}, \gamma < \mathbf{0}$) не дают решений, удовлетворяющих условию (3.1).

Случай 4 ($\mathbf{p} < \mathbf{0}, \gamma > \mathbf{0}$). Положим $q = -p > 0$. В этом случае система (3.15) примет вид

$$\begin{cases} \dfrac{\sqrt{\gamma - q\Psi^2(x)}}{|\Psi'(x)|} \le c_1, \\ |\Psi'(x)|\sqrt{\gamma - q\Psi^2(x)} \le B_1. \end{cases} \tag{3.19}$$

Решениями уравнения

$$\frac{\sqrt{\gamma - q\Psi^2(x)}}{|\Psi'(x)|} = c_1 \tag{3.20}$$

являются две функции

$$\Psi_+(x) = \sqrt{\frac{\gamma}{q}} \sin\sqrt{q}\left(\frac{x}{c_1} + a\right), \quad \Psi_-(x) = \sqrt{\frac{\gamma}{q}} \sin\sqrt{q}\left(-\frac{x}{c_1} + a\right), \tag{3.21}$$

где $a \in \mathbb{R}$. Для того, чтобы получить решения первого неравенства системы (3.19), рассмотрим a в (3.21) как функцию $a(x)$. После подстановки $\Psi_+(x)$ в первое неравенство системы (3.19) будем иметь (3.12). Итак, $\Psi_+(x) = \sqrt{\frac{\gamma}{q}} \sin\sqrt{q}\left(\frac{x}{c_1} + a(x)\right)$ — решение первого неравенства системы (3.19) при условии, что функция $a = a(x)$ удовлетворяет неравенству $a'(x) \geq 0$ или $a'(x) \leq -\frac{2}{c_1}$. Подставив найденное $\Psi_+(x)$ во второе неравенство(3.19), получим:

$$\gamma\left|\frac{1}{c_1} + a'(x)\right| \cos^2\sqrt{q}\left(\frac{x}{c_1} + a(x)\right) \leq \gamma\left|\frac{1}{c_1} + a'(x)\right| \leq B_1. \tag{3.22}$$

Неравенство $\left|\frac{1}{c_1} + a'(x)\right| \leq \frac{B_1}{\gamma}$ запишем в виде $-\frac{B_1}{\gamma} - \frac{1}{c_1} \leq a'(x) \leq \frac{B_1}{\gamma} - \frac{1}{c_1}$. С учетом условий (3.12) будем иметь два ограничения на функцию $a = a(x)$:

$$\left[\begin{array}{l} 0 \leq a'(x) \leq \dfrac{B_1}{\gamma} - \dfrac{1}{c_1}, \\ -\dfrac{B_1}{\gamma} - \dfrac{1}{c_1} \leq a'(x) \leq -\dfrac{2}{c_1}. \end{array}\right. \tag{3.23}$$

При этом предполагается, что константа интегрирования γ такова, что $c_1 B_1 \geq \gamma$; в противном случае решений нет.

Итак, $\Psi_+(x) = \sqrt{\frac{\gamma}{q}} \sin\sqrt{q}\left(\frac{x}{c_1} + a\right)$, где функция $a = a(x)$ удовлетворяет одному из неравенств (3.23) и $c_1 B_1 \geq \gamma$, является решением системы неравенств (3.19).

Аналогичные рассуждения можно провести для функции $\Psi_-(x) = \sqrt{\frac{\gamma}{q}} \sin\sqrt{q}\left(-\frac{x}{c_1} + a(x)\right)$, при этом, по существу, обе функции $\Psi_+(x)$ и $\Psi_-(x)$ дают одно ограниченное решение уравнения (2.8)

$$\begin{cases} c(x) = \dfrac{1}{|\frac{1}{c_1} + a'(x)|} \leq c_1, \\ B(x) = \gamma\left|\dfrac{1}{c_1} + a'(x)\right| \cos^2\sqrt{-p}\left(\dfrac{x}{c_1} + a(x)\right) \leq B_1, \end{cases} \tag{3.24}$$

где функция $a = a(x)$ удовлетворяет одному из неравенств (3.23) и $c_1 B_1 \geq \gamma = \beta - \frac{\alpha^2}{4p} > 0$.

Замечание 3.1. *В силу условий (3.23) на функцию $a = a(x)$ существуют такие значения x_0, что $\cos\sqrt{-p}\left(\frac{x_0}{c_1} + a(x_0)\right) = 0$ и, следовательно, $B(x_0) = 0$. Кроме того, при этом $B'(x_0) = 0$, то есть график функции $B(x)$ касается оси Ox.*

Получим другое решение системы (3.19), решив сначала второе неравенство этой системы. Найдем решения уравнения

$$|\Psi'(x)|\sqrt{\gamma - q\Psi^2(x)} = B_1. \tag{3.25}$$

Обозначим

$$\Theta(\Psi) = \int \sqrt{\gamma - q\Psi^2} d\Psi = \frac{\gamma}{2\sqrt{q}} \left(\sqrt{\frac{q}{\gamma}}\Psi \sqrt{1 - \frac{q}{\gamma}\Psi^2} + \arcsin \sqrt{\frac{q}{\gamma}}\Psi \right).$$

Тогда решение уравнения (3.25) можно записать в виде

$$\Theta(\Psi) = \pm B_1 x + b,$$

где $b \in \mathbb{R}$. Поскольку $\Theta'(\Psi) = \sqrt{\gamma - q\Psi^2} \geq 0$, то функция $\Theta(\Psi)$, заданная на отрезке $\left[-\sqrt{\frac{\gamma}{q}}, \sqrt{\frac{\gamma}{q}}\right]$, монотонна и, следовательно, для нее существует обратная функция $\Psi = \Psi(\Theta)$, определенная на отрезке $\left[-\frac{\pi\gamma}{4\sqrt{q}}, \frac{\pi\gamma}{4\sqrt{q}}\right]$. Таким образом, решение уравнения (3.25) имеет вид

$$\Psi = \Psi(\pm B_1 x + b).$$

Сначала будем искать решения неравенств (3.19) в виде $\Psi = \Psi(B_1 x + b)$. Пусть теперь $b = b(x)$. Подставив решение $\Psi = \Psi(B_1 x + b)$ во второе неравенство (3.19), получим

$$|\Psi'(x)|\sqrt{\gamma - q\Psi^2(x)} = |\Psi'(\Theta)||B_1 + b'(x)|\sqrt{\gamma - q\Psi^2(x)} = \\ = \frac{|B_1 + b'(x)|\sqrt{\gamma - q\Psi^2(x)}}{\Theta'(\Psi)} \leq |B_1 + b'(x)| \leq B_1. \quad (3.26)$$

Следовательно, $-2B_1 \leq b'(x) \leq 0$. Подставив решение $\Psi = \Psi(B_1 x + b)$ в первое неравенство (3.19), получим

$$\frac{\sqrt{\gamma - q\Psi^2(x)}}{|\Psi'(x)|} = \frac{\sqrt{\gamma - q\Psi^2(x)}}{|\Psi'(\Theta)||B_1 + b'(x)|} = \frac{\sqrt{\gamma - q\Psi^2(x)}|\Theta'(\Psi)|}{|B_1 + b'(x)|} = \\ = \frac{\gamma - q\Psi^2(x)}{|B_1 + b'(x)|} \leq \frac{\gamma}{|B_1 + b'(x)|} \leq c_1, \quad (3.27)$$

откуда

$$|B_1 + b'(x)| \geq \frac{\gamma}{c_1} \quad \Leftrightarrow \quad \left[\begin{array}{l} b'(x) \geq \dfrac{\gamma}{c_1} - B_1, \\ b'(x) \leq -\dfrac{\gamma}{c_1} - B_1. \end{array}\right. \quad (3.28)$$

С учетом неравенства $-2B_1 \leq b'(x) \leq 0$ будем иметь следующие ограничения на $b = b(x)$:

$$\left[\begin{array}{l} \dfrac{\gamma}{c_1} - B_1 \leq b'(x) \leq 0, \\ -2B_1 \leq b'(x) \leq -\dfrac{\gamma}{c_1} - B_1, \end{array}\right. \quad (3.29)$$

при условии $c_1 B_1 \geq \gamma$; в противном случае решений нет.

Положим $\chi(\Theta) = \gamma - q\Psi^2(\Theta)$. Функция $\chi(\Theta)$ определена на отрезке $\left[-\frac{\pi\gamma}{4\sqrt{q}}, \frac{\pi\gamma}{4\sqrt{q}}\right]$. Продолжим эту функцию на всю числовую ось периодически с периодом $\frac{\pi\gamma}{2\sqrt{q}}$ и обозначим ее также через $\chi(\Theta)$. В этих обозначениях ограниченное решение уравнения (2.8) можно записать следующим образом

$$\begin{cases} c(x) = \dfrac{\chi(B_1 x + b(x))}{|B_1 + b'(x)|} \leq c_1, \\ B(x) = |B_1 + b'(x)| \leq B_1, \end{cases} \quad (3.30)$$

где $b = b(x)$ — дифференцируемая функция, удовлетворяющая одному из условий (3.29) и $c_1 B_1 \geq \gamma$.

Аналогично можно рассмотреть случай $\Psi = \Psi(-B_1 x + b)$. По существу он дает решение того же вида (3.30).

Замечание 3.2. *В силу условий (3.29), наложенных на функцию* $b = b(x)$, *существуют такие значения* x_0, *что* $\chi(B_1 x_0 + b) = 0$, *и, следовательно,* $c(x_0) = 0$.

Замечание 3.3. *В силу замечаний 3.1. и 3.2. ограниченные решения, задаваемые формулами (3.24) и (3.30), являются сингулярными.*

Результаты работы можно сформулировать в виде следующих утверждений.

Теорема 3.1. *Любое решение уравнения (2.8) имеет вид*

$$\begin{cases} c(x) = \dfrac{\sqrt{pF^2(x) + \alpha F(x) + \beta}}{|F'(x)|}, \\ B(x) = |F'(x)|\sqrt{pF^2(x) + \alpha F(x) + \beta}, \end{cases}$$

где $F = F(x)$ *— произвольная дифференцируемая функция,* $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

Теорема 3.2. *Ограниченные решения уравнения (2.8), заданные на всей числовой оси и не обращающиеся в ноль (несингулярные), существуют только при* $p = 0$ *и имеют вид*

$$\begin{cases} c(x) = \dfrac{\sqrt{\beta}}{\Psi(x)} \leq c_1, \\ B(x) = \sqrt{\beta}\Psi(x) \leq B_1, \end{cases}$$

где $\Psi(x)$ *— любая дифференцируемая функция,* $\beta \in \mathbb{R}$, *удовлетворяющие условиям*

$$0 < \frac{\sqrt{\beta}}{c_1} \leq \Psi(x) \leq \frac{B_1}{\sqrt{\beta}}, \qquad c_1 B_1 \geq \beta > 0.$$

Благодарности. Авторы выражают благодарность проф. И.П. Рязанцевой за полезное обсуждение работы и ценные замечания. Работа выполнена при финансовой поддержке гранта Президента РФ для государственной поддержки ведущих научных школ РФ НШ-6637.2016.5, а также гранта РФФИ 16-02-00167.

Дата поступления 25.10.2016

Список литературы

1. А. Б. Шварцбург, “Дисперсия электромагнитных волн в слоистых и нестационарных средах (точно решаемые модели)”, *Успехи физ. наук*, **170**:12 (2000), 1297–1324.

2. I. Didenkulova, E. Pelinovsky, T. Soomere, “Long surface wave dynamics along a convex bottom”, *J. Geophysical Research – Oceans*, **114** (2009), C07006.

3. I. Didenkulova, E. Pelinovsky, “Non-dispersive traveling waves in strongly inhomogeneous water channels”, *Physics Letters A.*, **373**:42 (2009), 3883–3887.

4. R. Grimshaw, D. Pelinovsky, E. Pelinovsky, “Homogenization of the variable-speed wave equation”, *Wave Motion*, **47**:12 (2010), 496–507.

5. Е. Н. Пелиновский, Т. Г. Талипова, “Безотражательное распространение волн в сильно неоднородных средах”, *Фундаментальная и прикладная гидрофизика*, 2010, № 3, 4–13.

6. Н. С. Петрухин, Е. Н. Пелиновский, Е. К. Бацына, “Безотражательные волны в атмосфере Земли”, *Письма в ЖЭТФ*, **93**:10 (2011), 625–628.

7. Н. С. Петрухин, Е. Н. Пелиновский, Е. К. Бацына, “Безотражательное распространение акустических волн в атмосфере Солнца”, *Письма в Астрономический Журнал*, **38**:6 (2012), 439–445.

8. M. S. Ruderman, E. Pelinovsky, N. S. Petrukhin, T. Talipova, “Non-reflective propagation of kink waves in solar magnetic tubes”, *Solar Physics*, **286** (2013), 417–426.

9. Т. Г. Талипова, Е. Н. Пелиновский, О. Е. Куркина, Е. А. Рувинская, А. Р. Гиниятуллин, А. А. Наумов, “Безотражательное распространение внутренних волн в канале переменного сечения и глубины”, *Фундаментальная и прикладная гидрофизика*, **6**:3 (2013), 46–53.

10. В. Ю. Ляпидевский, В. М. Тешуков, *Математические модели распространения длинных волн в неоднородной жидкости*, СО РАН, Новосибирск, 2000, 419 с.

11. G. Bluman, “On mapping linear partial differential equations to constant coefficient equations”, *SIAM J. Appl. Math.*, **43** (1983), 1259–1273.

12. E. Varley, B. Seymour, “A method for obtaining exact solutions to partial differential equations with variable coefficients”, *Stud. Appl. Math.*, **78** (1988), 183–225.

The configuration of the variable cross-section channel allowed reflectionless propagation of internal waves in the ocean

© A. V. Bagaev[3], E. N. Pelinovsky[4]

Abstract. Mathematical problem discussed in the paper is about determination of configuration of variable-cross-section channels that allow so-called reflectionless propagation of internal waves in the ocean. The problem is reduced to searching for bounded solutions of ordinary second-order differential equation with two unknown functions. It is shown that such solutions exist, and they are obtained in explicit form.

Key Words: varible-coefficient wave equation, Klein–Gordon equation, travelling waves in heterogeneous media, stratified fluid

[3] Associate professor of Applied Mathematics Department, Nizhny Novgorod State Technical University n.a. R.E. Alekseev, Nizhny Novgorod; a.v.bagaev@gmail.com

[4] Professor of Applied Mathematics Department, Nizhny Novgorod State Technical University n.a. R.E. Alekseev, Professor of Information Systems Department, Nizhny Novgorod Branch of National Research University – Higher School of Economics, Nizhny Novgorod; pelinovsky@gmail.com