УДК 517.929.5

О ветвлении периодических решений линейных неоднородных дифференциальных уравнений с возмущением в виде малого линейного слагаемого с запаздывающим аргументом

© П. А. Шаманаев [1], Б. В. Логинов [2]

Аннотация. В банаховом пространстве методами теории ветвления доказано существование и единственность периодических решений линейных неоднородных дифференциальных уравнений с вырожденным или тождественным оператором при производной и возмущением в виде малого линейного слагаемого с запаздывающим аргументом. В статье показано, что периодическое решение имеет полюс в точке $\varepsilon = 0$, а при значении $\varepsilon = 0$ переходит в $2n$-параметрическое семейство периодических решений. Результат получен с помощью применения теории обобщенных жордановых наборов, сводящей исходную задачу к исследованию разрешающей системы Ляпунова-Шмидта в корневом подпространстве. При этом разрешающая система представляет собой неоднородную систему линейных алгебраических уравнений, которая при $\varepsilon \neq 0$ имеет единственное решение, а при значении $\varepsilon = 0$ переходит в $2n$-параметрическое семейство решений.

Ключевые слова: ветвление периодических решений, дифференциальные уравнения с запаздывающим аргументом, обобщенные жордановы наборы, разрешающая система Ляпунова-Шмидта в корневом подпространстве.

1. Постановка задачи

В банаховых пространствах E_1, E_2, где $E_1 \subset E_2 \subset H$, H – гильбертово пространство рассматривается дифференциальное уравнение

$$A\frac{dx}{dt} = (B_0 - \varepsilon B(\tau))\, x - f(t), \quad B(\tau)x \equiv B_1 x(t-\tau), \tag{1.1}$$

где $x \in E_1$, A, B_0 и B_1 – плотно заданные линейные фредгольмовы операторы, A – вырожденный или тождественный оператор, $f \in E_2$, $f(t+\omega) = f(t)$, $\omega > 0$, ε – малый вещественный параметр. Предполагается, что операторы A и B_0 не имеют общих нуль-элементов, а также условия: $A : E_1 \supset D_A \to E_2$, $B_0 : E_1 \supset D_{B_0} \to E_2$, $D_{B_0} \subset D_A$ и A подчинен B_0, то есть $\|Ax\|_{E_2} \leqslant \|B_0 x\|_{E_2} + \|x\|_{E_1}$ на D_{B_0}, или $D_A \subset D_{B_0}$ и B_0 подчинен A, то есть $\|B_0 x\|_{E_2} \leqslant \|Ax\|_{E_2} + \|x\|_{E_1}$ на D_A, что позволяет свести обсуждение к ограниченным операторам [1], [3-5].

Пусть $\sigma_A^0(B_0)$ - A-спектр оператора B_0, лежащий на мнимой оси и состоящий из конечного числа ненулевых точек $\pm i\alpha_m$, $\alpha_m = k_m\alpha$, $\alpha = \frac{2\pi}{\omega}$, $m = \overline{1,r}$, где k_m – натуральные числа. Пусть далее n_m – геометрическая кратность каждого числа из пары $\pm i\alpha_m$, соответствующих А-собственным элементам $u_{mj} = u_{mj}^{(1)} \pm i u_{mj}^{(2)}$, то есть $B_0 u_{mj} = i\alpha_m A u_{mj}$; $B_0 \overline{u}_{mj} = -i\alpha_m A \overline{u}_{mj}$, $j = \overline{1, n_m}$, $m = \overline{1,r}$; и $v_{mj} = v_{mj}^{(1)} + i v_{mj}^{(2)}$, $\overline{v}_{mj} = v_{mj}^{(1)} - i v_{mj}^{(2)}$ являются A^*-собственными элементами сопряженного оператора B_0^*, то есть $B_0^* v_{mj} = -i\alpha_m A^* v_{rj}$, $B_0^* \overline{v}_{mj} = -i\alpha_m A^* \overline{v}_{mj}$, $j = \overline{1, n_m}$, $m = \overline{1,r}$.

[1] Доцент кафедры прикладной математики, дифференциальных уравнений и теоретической механики, Национальный исследовательский Мордовский государственный университет им. Н. П. Огарёва, г. Саранск; korspa@yandex.ru.

[2] Профессор кафедры "Высшая математика" , Ульяновский государственный технический университет, г. Ульяновск; loginov@ulstu.ru

Тогда для каждого числа из пары $\pm i\alpha_m$ существует соответствующее количество n_m ω-периодических решений линейного однородного дифференциального уравнения

$$A\frac{dy}{dt} = B_0 y \tag{1.2}$$

в форме $\varphi_{mj} = u_{mj}e^{i\alpha_m t}$, $\bar{\varphi}_{mj} = \bar{u}_{mj}e^{-i\alpha_m t}$, $j = \overline{1, n_m}$, $m = \overline{1, r}$.

Таким образом, уравнение (1.2) имеет $2n$, $n = n_1 + ... + n_r$, ω-периодических решений φ_{mj}, $\bar{\varphi}_{mj}$, $j = \overline{1, n_m}$, $m = \overline{1, r}$. Аналогично, сопряженное уравнение к уравнению (1.2) имеет $2n$ ω-периодических решений $\psi_{mj} = v_{mj}e^{i\alpha_m t}$, $\bar{\psi}_{mj} = \bar{v}_{mj}e^{-i\alpha_m t}$, $j = \overline{1, n_m}$, $m = \overline{1, r}$.

Ставится задача [1]: при достаточно малых вещественных ε отыскать ω - периодические решения $x(t, \varepsilon)$ уравнения (1.1), удовлетворяющие условию $x(t, 0) = z(t)$, где $z(t)$ — ω-периодические решения уравнения

$$A\frac{dz}{dt} = B_0 z - f(t). \tag{1.3}$$

Так как период решений φ_{mj}, $\bar{\varphi}_{mj}$ линейного однородного дифференциального уравнения (1.2) совпадает с периодом $f(t)$ и равен ω, то рассматриваемые условия соответствуют резонансному случаю для уравнения (1.3) [6].

2. Разрешающая система Ляпунова-Шмидта в корневом подпространстве

Для решения поставленной задачи представим уравнение (1.1) в операторной форме

$$\mathcal{B}_0 x = f(t) + \varepsilon B(\tau)x, \quad \mathcal{B}_0 x \equiv B_0 x(t) - A\frac{dx}{dt}, \tag{2.1}$$

и применим методы теории ветвления построения обобщенных жордановых наборов, приводящие к исследованию разрешающих систем Ляпунова-Шмидта в корневом подпространстве [2], [3-5], [10-13].

Здесь операторы $\mathcal{B}_0$ и B_1 отображают пространство $\mathcal{X}$ ω-периодических дифференцируемых по t функций со значениями в $\mathcal{E}_1 = E_1 \dotplus i\,E_1$ в пространство $\mathcal{Z}$ ω-периодических по t функций со значениями в $\mathcal{E}_2 = E_2 \dotplus i\,E_2$. Тогда значение функционала $e(t) \in \mathcal{X}^*(\in \mathcal{Z}^*)$ на элементе $x(t) \in \mathcal{X}(\in \mathcal{Z})$ дается равенством

$$\ll x, e \gg = \frac{1}{\omega}\int_0^\omega \langle x(t), e(t)\rangle dt, \quad x \in \mathcal{X}, \;\; e \in \mathcal{X}^* \;\; (x \in \mathcal{Z}, \, e \in \mathcal{Z}^*).$$

Для дальнейших рассуждений перенумеруем элементы φ_{mj}, $\bar{\varphi}_{mj}$ (ψ_{mj}, $\bar{\psi}_{mj}$), $j = \overline{1, n_m}$, $m = \overline{1, r}$ в порядке увеличения чисел m и j одним индексом k, $k = \overline{1, n}$. Тогда

$$\begin{aligned} \mathcal{N}(\mathcal{B}_0) &= span\{\varphi_k^{(1)} = u_k e^{i\alpha_k t}, \quad \bar{\varphi}_k^{(1)} = \bar{u}_k e^{-i\alpha_k t}, \quad k = \overline{1, n}\}, \\ \mathcal{N}(\mathcal{B}_0^*) &= span\{\psi_k^{(1)} = v_k e^{i\alpha_k t}, \quad \bar{\psi}_k^{(1)} = \bar{v}_k e^{-i\alpha_k t}, \quad k = \overline{1, n}\}. \end{aligned} \tag{2.2}$$

Не ограничивая общности будем предполагать справедливость неравенства

$$p_1 = ... = p_\sigma > p_{\sigma+1} \geq p_{\sigma+2} \geq ... \geq p_n. \tag{2.3}$$

Перепишем невозмущенное уравнение, соответствующее (1.3) в операторной форме:

$$\mathcal{B}_0 x = f(t), \tag{2.4}$$

Потребуем, чтобы уравнение (2.4) было разрешимо. Для этого, согласно работе [1] необходимо и достаточно, чтобы

$$\ll f, \psi_k^{(1)} \gg = 0, \quad k = \overline{1,n}. \tag{2.5}$$

О п р е д е л е н и е 2.1. [1] *Элементы* $\varphi_k^{(1)} \in \mathcal{N}(\mathcal{B}_0)$ $(\psi_s^{(1)} \in \mathcal{N}(\mathcal{B}_0^*))$ *формируют полный* B_1 *- (*B_1^**-)жорданов набор (обобщенный жорданов набор* $\equiv$ *ОЖН) оператора* $\mathcal{B}_0$ $(\mathcal{B}_0^*)$*, если*

$$\begin{gathered}
\mathcal{B}_0 \varphi_k^{(1)} = 0, \quad \mathcal{B}_0 \varphi_k^{(j)} = B_1 \varphi_k^{(j-1)}, \quad det\left[\ll B_1 \varphi_k^{(p_k)}, \psi_s^{(1)} \gg\right] \neq 0, \\
\left(\mathcal{B}_0^* \psi_s^{(1)} = 0, \quad \mathcal{B}_0^* \psi_s^{(l)} = B_1^* \psi_s^{(l-1)}, \quad det\left[\ll B_1^* \psi_s^{(p_s)}, \varphi_k^{(1)} \gg\right] \neq 0\right), \\
j = \overline{2, p_k}, \ l = \overline{2, p_s}, \quad k, s = \overline{1,n}.
\end{gathered} \tag{2.6}$$

Обобщенные жордановы цепочки $\varphi_k^{(j)}$, $j = \overline{1,p_k}$ $(\psi_s^{(l)}$, $l = \overline{1,p_s}$*) длины* p_k (p_s) *единственно определяются для* $p_k > 1$ $(p_s > 1)$ *с помощью следующих условий*

$$\begin{gathered}
\ll \varphi_k^{(1)}, \gamma_s^{(1)} \gg = \delta_{ks}, \quad \ll \varphi_k^{(j)}, \gamma_s^{(1)} \gg = 0, \quad j = \overline{2, p_k}, \\
\left(\ll z_k^{(1)}, \psi_s^{(1)} \gg = \delta_{ks}, \quad \ll z_k^{(1)}, \psi_s^{(l)} \gg = 0, \quad l = \overline{2, p_s}\right), \\
k, s = \overline{1,n},
\end{gathered} \tag{2.7}$$

где $\{\gamma_s^{(1)}\} \in E_1^*$, $\{z_k^{(1)}\} \in E_2$.

Согласно лемме [7-9] соответствующие системы $\left\{\varphi_k^{(j)}, j = \overline{1,p_k}\right\}$ и $\left\{\psi_s^{(l)}, l = \overline{1,p_s}\right\}$ элементов B_1- и B_1^*-жордановых наборов операторов $\mathcal{B}_0$ и $\mathcal{B}_0^*$ могут быть выбраны так, что будут выполняться условия биортогональности

$$\begin{gathered}
\ll \varphi_k^{(j)}, \gamma_s^{(l)} \gg = \delta_{ks}\delta_{jl}, \quad \ll z_k^{(j)}, \psi_s^{(l)} \gg = \delta_{ks}\delta_{jl}, \\
\gamma_s^{(l)} = B_1^* \psi_s^{(p_s+1-l)}, \quad z_k^{(j)} = B_1 \varphi_k^{(p_k+1-j)}, \\
j = \overline{1, p_k}, \ l = \overline{1, p_s}, \ k, s = \overline{1,n}.
\end{gathered} \tag{2.8}$$

З а м е ч а н и е 2.1. *Корневое число как сумма всех длин жордановых цепочек равна* $2K$, *где* $K = p_1 + ... + p_n$. *Элементы* $\varphi_k^{(j)}, \bar{\varphi}_k^{(j)}, j = \overline{1,p_k}$ *и* $z_k^{(j)}, \bar{z}_k^{(j)}, j = \overline{1,p_k}$ *формируют базисы корневых подпространств* $E_1^{2K} = span\{\varphi_k^{(j)}, \bar{\varphi}_k^{(j)}, \ j = \overline{1,p_k}, \ k = \overline{1,n}\}$ *и* $E_2^{2K} = span\{z_k^{(j)}, \bar{z}_k^{(j)}, \ j = \overline{1,p_k}, \ k = \overline{1,n}\}$.

Вводя регуляризатор Шмидта

$$\widetilde{\mathcal{B}}_0 = \mathcal{B}_0 + \sum_{k=1}^{n} \ll \cdot, \gamma_k^{(1)} \gg z_k^{(1)} + \sum_{k=1}^{n} \ll \cdot, \bar{\gamma}_k^{(1)} \gg \bar{z}_k^{(1)}, \tag{2.9}$$

записываем уравнение (2.1) в виде системы

$$\begin{cases} \widetilde{\mathcal{B}}_0 x = \varepsilon B(\tau)x + \sum\limits_{k=1}^{n}(\xi_{k1}z_k^{(1)} + \bar{\xi}_{k1}\bar{z}_k^{(1)}) + f, \\ \xi_{sl} = \ll x, \gamma_s^{(l)} \gg, \ \ \bar{\xi}_{sl} = \ll x, \bar{\gamma}_s^{(l)} \gg, \ \ l = \overline{1, p_s}, \ s = \overline{1, n}. \end{cases} \tag{2.10}$$

Решение системы (2.10) будем искать в виде [3]-[4]

$$x = w + v, \quad v = \sum_{k=1}^{n}\sum_{j=1}^{p_k}(\xi_{kj}\varphi_k^{(j)} + \bar{\xi}_{kj}\bar{\varphi}_k^{(j)}) \in E_1^{2K}. \tag{2.11}$$

Подставляя выражение (2.6) в первое уравнение системы (2.10) и выражая w, при достаточно малых ε получим

$$\begin{aligned} w = \ & -\sum_{k=1}^{n}\sum_{j=2}^{p_k}(\xi_{kj}\varphi_k^{(j)} + \bar{\xi}_{kj}\bar{\varphi}_k^{(j)}) + \varepsilon\Gamma_0 B(\tau)[I - \varepsilon\Gamma_0 B(\tau)]^{-1}\sum_{k=1}^{n}(\xi_{k1}\varphi_k^{(1)} + \bar{\xi}_{k1}\bar{\varphi}_k^{(1)}) + \\ & + \Gamma_0[I - \varepsilon B_1\Gamma_0]^{-1}f. \end{aligned} \tag{2.12}$$

Подставляя выражение (2.6) во второе и третье уравнение системы (2.10) и учитывая условия биортогональности (2.8), приведем разрешающую систему к виду

$$\begin{cases} - \ll w, \gamma_s^{(l)} \gg = 0, \ l = \overline{1, p_s}, \\ - \ll w, \bar{\gamma}_s^{(l)} \gg = 0, \ s = \overline{1, n}. \end{cases} \tag{2.13}$$

Подставляя выражение (2.12) для w в разрешающую систему (2.13), получим

$$\begin{cases} \sum\limits_{k=1}^{n}\sum\limits_{j=2}^{p_k}\xi_{kj} \ll \varphi_k^{(j)}, \gamma_s^{(l)} \gg - \sum\limits_{k=1}^{n}\xi_{k1} \ll \varepsilon\Gamma_0 B(\tau)[I - \varepsilon\Gamma_0 B(\tau)]^{-1}\varphi_k^{(1)}, \gamma_s^{(l)} \gg = \\ = \ll \Gamma_0[I - \varepsilon\Gamma_0 B(\tau)]^{-1}f, \gamma_s^{(l)} \gg, \quad l = \overline{1, p_s}, s = \overline{1, n}, \\ \sum\limits_{k=1}^{n}\sum\limits_{j=2}^{p_k}\bar{\xi}_{kj} \ll \bar{\varphi}_k^{(j)}, \bar{\gamma}_s^{(l)} \gg - \sum\limits_{k=1}^{n}\bar{\xi}_{k1} \ll \varepsilon\Gamma_0 B(\tau)[I - \varepsilon\Gamma_0 B(\tau)]^{-1}\bar{\varphi}_k^{(1)}, \bar{\gamma}_s^{(l)} \gg = \\ = \ll \Gamma_0[I - \varepsilon\Gamma_0 B(\tau)]^{-1}f, \bar{\gamma}_s^{(l)} \gg, \quad l = \overline{1, p_s}, s = \overline{1, n}. \end{cases} \tag{2.14}$$

С учётом равенств $\Gamma_0^*\gamma_s^{(1)} = \psi_s^{(1)}$, $\Gamma_0^*\bar{\gamma}_s^{(1)} = \bar{\psi}_s^{(1)}$, $\Gamma_0^*\gamma_s^{(l)} = \psi_s^{(p_s+2-l)}$, $\Gamma_0^*\bar{\gamma}_s^{(l)} = \bar{\psi}_s^{(p_s+2-l)}$ $(l = \overline{2, p_s})$, получим

$$\begin{aligned} & \ll \varepsilon\Gamma_0 B(\tau)[I - \varepsilon\Gamma_0 B(\tau)]^{-1}\varphi_k^{(1)}, \gamma_s^{(1)} \gg = \ll \varphi_k^{(1)}, \varepsilon B^*(\tau)[I - \varepsilon\Gamma_0^* B(\tau)^*]^{-1}\psi_s^{(1)} \gg, \\ & \ll \varepsilon\Gamma_0 B(\tau)[I - \varepsilon\Gamma_0 B(\tau)]^{-1}\varphi_k^{(1)}, \gamma_s^{(l)} \gg = \ll \varphi_k^{(1)}, \varepsilon B^*(\tau)[I - \varepsilon\Gamma_0^* B(\tau)^*]^{-1}\psi_s^{(p_s+2-l)} \gg, \\ & \ll \varepsilon\Gamma_0 B(\tau)[I - \varepsilon\Gamma_0 B(\tau)]^{-1}\bar{\varphi}_k^{(1)}, \bar{\gamma}_s^{(1)} \gg = \ll \bar{\gamma}_s^{(1)}, \varepsilon B^*(\tau)[I - \varepsilon\Gamma_0^* B(\tau)^*]^{-1}\bar{\psi}_s^{(1)} \gg, \\ & \ll \varepsilon\Gamma_0 B(\tau)[I - \varepsilon\Gamma_0 B(\tau)]^{-1}\bar{\varphi}_k^{(1)}, \bar{\gamma}_s^{(l)} \gg = \ll \bar{\gamma}_s^{(l)}, \varepsilon B^*(\tau)[I - \varepsilon\Gamma_0^* B(\tau)^*]^{-1}\bar{\psi}_s^{(p_s+2-l)} \gg, \end{aligned} \tag{2.15}$$

аналогично, правая часть разрешающей системы (2.14) примет вид

$$\begin{aligned} & \ll \Gamma_0[I - \varepsilon\Gamma_0 B(\tau)]^{-1}f, \gamma_s^{(1)} \gg = \ll f, [I - \varepsilon\Gamma_0^* B(\tau)^*]^{-1}\psi_s^{(1)} \gg, \\ & \ll \Gamma_0[I - \varepsilon\Gamma_0 B(\tau)]^{-1}f, \gamma_s^{(l)} \gg = \ll f, [I - \varepsilon\Gamma_0^* B(\tau)^*]^{-1}\psi_s^{(p_s+2-l)} \gg, \\ & \ll \Gamma_0[I - \varepsilon\Gamma_0 B(\tau)]^{-1}f, \bar{\gamma}_s^{(1)} \gg = \ll f, [I - \varepsilon\Gamma_0^* B(\tau)^*]^{-1}\bar{\psi}_s^{(1)} \gg, \\ & \ll \Gamma_0[I - \varepsilon\Gamma_0 B(\tau)]^{-1}f, \bar{\gamma}_s^{(l)} \gg = \ll f, [I - \varepsilon\Gamma_0^* B(\tau)^*]^{-1}\bar{\psi}_s^{(p_s+2-l)} \gg . \end{aligned} \tag{2.16}$$

Так как справедливы равенства $(\Gamma_0^* B_1^*)^l \psi_s^{(1)} = \psi_s^{(r_s+1)}$, где r_s – остаток от деления l на p_s, то

$$[\Gamma_0^* B^*(\tau)]^j \, \psi_k^{(1)} = e^{-i\alpha_k j\tau} \psi_k^{(r_k+1)}, \quad j = 1, 2, \dots . \tag{2.17}$$

Учитывая равенства (2.17), при достаточно малых ε находим

$$\begin{gathered}
[I - \varepsilon\Gamma_0^* B^*(\tau)]^{-1} \psi_s^{(1)} = \frac{1}{1 - (\varepsilon e^{-i\alpha_s \tau})^{p_s}} h_{s1}, \\
h_{s1} = \psi_s^{(1)} + \varepsilon e^{-i\alpha_s\tau} \psi_s^{(2)} + \ldots + (\varepsilon e^{-i\alpha_s\tau})^{p_s - 1} \psi_s^{(p_s)}, \\
[I - \varepsilon\Gamma_0^* B^*(\tau)]^{-1} \psi_s^{(p_s+2-l)} = \frac{1}{1 - (\varepsilon e^{-i\alpha_s \tau})^{p_s}} h_{sl}, \\
h_{sl} = \psi_s^{(p_s+2-l)} + \varepsilon e^{-i\alpha_s\tau} \psi_s^{(p_s+3-l)} + \ldots + (\varepsilon e^{-i\alpha_s\tau})^{l-2} \psi_s^{(p_s)} + (\varepsilon e^{-i\alpha_s\tau})^{l-1} \psi_s^{(1)} + \ldots \\
\ldots + (\varepsilon e^{-i\alpha_s\tau})^{p_s - 1} \psi_s^{(p_s+1-l)}, \quad l = \overline{2, p_s}, \; s = \overline{1, n}.
\end{gathered} \tag{2.18}$$

Учитывая выражения (2.18) и условия биортогональности (2.8), вычислим

$$\begin{gathered}
\ll \varphi_k^{(1)}, \varepsilon B^*(\tau)[I - \varepsilon\Gamma_0^* B(\tau)^*]^{-1} \psi_s^{(1)} \gg = \frac{(\varepsilon e^{-i\alpha_s\tau})^{p_s}}{1 - (\varepsilon e^{-i\alpha_s\tau})^{p_s}} \delta_{ks}, \\
\ll \varphi_k^{(1)}, \varepsilon B^*(\tau)[I - \varepsilon\Gamma_0^* B(\tau)^*]^{-1} \psi_s^{(p_s+2-l)} \gg = \frac{(\varepsilon e^{-i\alpha_s\tau})^{l-1}}{1 - (\varepsilon e^{-i\alpha_s\tau})^{p_s}} \delta_{ks}, \\
l = \overline{2, p_s}, \; s = \overline{1, n}.
\end{gathered} \tag{2.19}$$

Тогда, с учётом (2.15)-(2.19), разрешающая система (2.14) примет вид

$$\begin{cases}
\bar{\beta}_s \xi_{s1} & = & - \ll f, h_{s1} \gg, & l = 1, \\
-\bar{\theta}_{sl} \xi_{s1} + \xi_{sl} & = & \ll f, \theta_{s1} h_{sl} \gg, & l = \overline{2, p_s}, \\
\beta_s \bar{\xi}_{s1} & = & - \ll f, \bar{h}_{s1} \gg, & l = 1, \\
-\theta_{sl} \bar{\xi}_{s1} + \bar{\xi}_{sl} & = & \ll f, \theta_{s1} \bar{h}_{sl} \gg, & l = \overline{2, p_s}, \\
s = \overline{1, n}, & & &
\end{cases} \tag{2.20}$$

где

$$\beta_s = \left(\varepsilon e^{-i\alpha_s\tau}\right)^{p_s}, \quad \beta_{sl} = \left(\varepsilon e^{-i\alpha_s\tau}\right)^{l-1}, \quad \theta_{sl} = \frac{1}{1 - (\varepsilon e^{-i\alpha_s\tau})^{p_s}} \beta_{sl}. \tag{2.21}$$

Выделим вещественные и мнимые части коэффициентов ξ_{sl} и $\bar{\xi}_{sl}$

$$\xi_{sl} = \xi_{sl}^{(1)} + i\xi_{sl}^{(2)}, \quad \bar{\xi}_{sl} = \xi_{sl}^{(1)} - i\xi_{sl}^{(2)},$$

и подставим в систему (2.20).

При фиксированных s и l сложим первое и третье, второе и четвертое уравнения системы (2.20) соответственно и возьмем получившиеся уравнения в качестве первой системы. Аналогично, при фиксированных s и l вычтем из первого уравнения третье, а из второго — четвертое уравнение системы (2.20), и возьмем получившиеся уравнения в качестве второй системы. Тогда получим систему линейных алгебраических уравнений с вещественными коэффициентами

$$\begin{cases} Re\,\beta_s\,\xi_{s1}^{(1)} + Im\beta_s\,\xi_{s1}^{(2)} & = -\ll f, Re\,h_{s1} \gg, \quad l=1, \\ -Re\,\theta_{sl}\,\xi_{s1}^{(1)} - Im\theta_{sl}\,\xi_{s1}^{(2)} + \xi_{sl}^{(1)} & = \ll f, Re\,\theta_{s1}\,h_{sl} \gg, \quad l=\overline{2,p_s}, \\ -Im\,\beta_s\,\xi_{s1}^{(1)} + Re\,\beta_s\,\xi_{s1}^{(2)} & = \ll f, Im\,h_{s1} \gg, \quad l=1, \\ Im\,\theta_{sl}\,\xi_{s1}^{(1)} - Re\,\theta_{sl}\,\xi_{s1}^{(2)} + \xi_{sl}^{(2)} & = -\ll f, Im\,\theta_{s1}\,h_{sl} \gg, \quad l=\overline{2,p_s}, \\ s=\overline{1,n}. \end{cases} \tag{2.22}$$

Поменяем порядок следования уравнений в системе следующим образом

$$\begin{cases} Re\,\beta_s\,\xi_{s1}^{(1)} + Im\beta_s\,\xi_{s1}^{(2)} & = -\ll f, Re\,h_{s1} \gg, \\ -Im\,\beta_s\,\xi_{s1}^{(1)} + Re\,\beta_s\,\xi_{s1}^{(2)} & = \ll f, Im\,h_{s1} \gg, \\ \quad l=1,\ s=\overline{1,n}, \\ -Re\,\theta_{sl}\,\xi_{s1}^{(1)} - Im\theta_{sl}\,\xi_{s1}^{(2)} + \xi_{sl}^{(1)} & = \ll f, Re\,\theta_{s1}\,h_{sl} \gg, \\ Im\,\theta_{sl}\,\xi_{s1}^{(1)} - Re\,\theta_{sl}\,\xi_{s1}^{(2)} + \xi_{sl}^{(2)} & = -\ll f, Im\,\theta_{s1}\,h_{sl} \gg, \\ l=\overline{2,p_s},\ s=\overline{1,n}. \end{cases} \tag{2.23}$$

Система (2.23) может быть записана в матричной форме

$$D\xi = g, \tag{2.24}$$

здесь $D \equiv [d_{sl,kj}]$ - $(K \times K)$-матрица, $K = p_1 + p_2 + ... + p_n$, ($l=\overline{1,p_s}$, $s=\overline{1,n}$; $j=\overline{1,p_k}$, $k=\overline{1,n}$),

$$\xi = colon(\xi_{11}^{(1)}, \xi_{11}^{(2)}, ..., \xi_{n1}^{(1)}, \xi_{n1}^{(2)}, ..., \xi_{\sigma p_\sigma}^{(1)}, \xi_{\sigma p_\sigma}^{(2)}), \quad g = colon(g_{11}^{(1)}, g_{11}^{(2)}, ..., g_{n1}^{(1)}, g_{n1}^{(2)}, ..., g_{np_n}^{(1)}, g_{np_n}^{(2)}),$$

$$g_{s1}^{(1)} = -\ll f, Re\,h_{s1} \gg,\ g_{s1}^{(2)} = \ll f, Im\,h_{s1} \gg,\ l=1,\ s=\overline{1,n},$$

$$g_{sl}^{(1)} = \ll f, Re\,\theta_{s1} h_{sl} \gg,\ g_{sl}^{(2)} = -\ll f, Im\,\theta_{s1} h_{sl} \gg,\ \ l=\overline{2,p_s},\ s=\overline{1,n}.$$

Матрица D имеет блочно-диагональную структуру

$$D = \begin{pmatrix} D^{(1)} & 0 & 0 & ... & 0 \\ D^{(2)} & I & 0 & ... & 0 \\ D^{(3)} & 0 & I & ... & 0 \\ ... & ... & ... & ... & ... \\ D^{(p_1)} & 0 & 0 & ... & I \end{pmatrix}, \tag{2.25}$$

$$D^{(1)} = \begin{pmatrix} D_1 & 0 & ... & 0 \\ 0 & D_2 & ... & 0 \\ & & ... & ... \\ 0 & 0 & ... & D_n \end{pmatrix}, \quad D_s = \begin{pmatrix} Re\,\beta_s & Im\,\beta_s \\ -Im\,\beta_s & Re\,\beta_s \end{pmatrix}, \quad s=\overline{1,n}, \tag{2.26}$$

$$D^{(l)} = \begin{pmatrix} D_{1l} & 0 & ... & 0 \\ 0 & D_{2l} & ... & 0 \\ & & ... & ... \\ 0 & 0 & ... & D_{nl} \end{pmatrix}, \quad l=\overline{2,p_n}, \tag{2.27}$$

$$D^{(l)} = \begin{pmatrix} D_{1l} & & 0 & 0 & ... & 0 \\ & ... & ... & 0 & ... & 0 \\ 0 & & D_{\nu l} & 0 & ... & 0 \end{pmatrix}, \quad l = \overline{p_n + 1, p_1}, \tag{2.28}$$

$$D_{sl} = \begin{pmatrix} -Re\,\theta_{sl} & -Im\,\theta_{sl} \\ Im\,\theta_{sl} & -Re\,\theta_{sl} \end{pmatrix}, \quad l = \overline{2, p_1}, \quad s = \overline{1, \nu}. \tag{2.29}$$

Индекс s в формуле (2.29) принимает только те значения, для которых длина жордановой цепочки p_s больше или равна l.

3. Решения разрешающей системы и ветвление периодических решений

При $\varepsilon \neq 0$ определитель матрицы D отличен от нуля и, следовательно, система (2.24) имеет единственное решение. Учитывая (2.18), из системы (2.22), находим

$$\begin{aligned} &\xi_{s1}^{(1)} = -\frac{1}{\varepsilon^{2p_s}}[Re\beta_s \ll f, Re\,h_{s1} \gg + Im\beta_s \ll f, Im\,h_{s1} \gg], \\ &\xi_{s1}^{(2)} = \frac{1}{\varepsilon^{2p_s}}[-Im\beta_s \ll f, Re\,h_{s1} \gg + Re\beta_s \ll f, Im\,h_{s1} \gg], \\ &s = \overline{1, n}. \end{aligned} \tag{3.1}$$

Так как справедливы равенства $(\Gamma_0 B_1)^j \varphi_k^{(1)} = \varphi_k^{(r_k+1)}$, $(\Gamma_0 B_1)^j \bar{\varphi}_k^{(1)} = \bar{\varphi}_k^{(r_k+1)}$, где r_k – остаток от деления j на p_k, то

$$\begin{aligned} &[\Gamma_0 B(\tau)]^j\, \varphi_k^{(1)} = e^{-i\alpha_k j\tau} \varphi_k^{(r_k+1)}, \\ &[\Gamma_0 B(\tau)]^j\, \bar{\varphi}_k^{(1)} = e^{-i\alpha_k j\tau} \bar{\varphi}_k^{(r_k+1)}, \\ &j = 1, 2, \dots . \end{aligned} \tag{3.2}$$

Учитывая равенства (3.2), при достаточно малых ε находим

$$\begin{aligned} \varepsilon\Gamma_0 B(\tau)[I - \varepsilon\Gamma_0 B(\tau)]^{-1}\varphi_k^{(1)} \ = \ & \frac{1}{1 - (\varepsilon e^{-i\alpha_k\tau})^{p_k}} \Big(\varepsilon e^{-i\alpha_k\tau}\varphi_k^{(2)} + (\varepsilon e^{-i\alpha_k\tau})^2 \varphi_k^{(3)} + ... \\ & ... + (\varepsilon e^{-i\alpha_k\tau})^{p_k-1}\varphi_k^{(p_k)} + (\varepsilon e^{-i\alpha_k\tau})^{p_k}\varphi_k^{(1)} \Big), \end{aligned} \tag{3.3}$$

$$\begin{aligned} \varepsilon\Gamma_0 B(\tau)[I - \varepsilon\Gamma_0 B(\tau)]^{-1}\bar{\varphi}_k^{(1)} \ = \ & \frac{1}{1 - (\varepsilon e^{i\alpha_k\tau})^{p_k}} \Big(\varepsilon e^{i\alpha_k\tau}\bar{\varphi}_k^{(2)} + (\varepsilon e^{i\alpha_k\tau})^2 \bar{\varphi}_k^{(3)} + ... \\ & ... + (\varepsilon e^{i\alpha_k\tau})^{p_k-1}\bar{\varphi}_k^{(p_k)} + (\varepsilon e^{i\alpha_k\tau})^{p_k}\bar{\varphi}_k^{(1)} \Big). \end{aligned} \tag{3.4}$$

Таким образом, учитывая (2.11), (2.12), (3.3) и (3.4), получим, что уравнение (1.1) имеет единственное вещественное ω–периодическое решение, представимое в виде

$$\begin{aligned} x(t,\varepsilon) \ &= \sum_{k=1}^{n} \Big[\ \theta_{k1}\xi_{k1}\varphi_k^{(1)} + \bar{\theta}_{k1}\bar{\xi}_{k1}\bar{\varphi}_k^{(1)}\ \Big] + [I - \varepsilon\Gamma_0 B_1]^{-1}\Gamma_0 f(t) + \\ &+ \sum_{k=1}^{n} \Big[\ \Big(\theta_{k2}\xi_{k1}\varphi_k^{(2)} + \bar{\theta}_{k2}\bar{\xi}_{k1}\bar{\varphi}_k^{(2)}\Big) + ... + \Big(\theta_{kp_k}\xi_{k1}\varphi_k^{(p_k)} + \bar{\theta}_{kp_k}\bar{\xi}_{k1}\bar{\varphi}_k^{(p_k)}\Big)\ \Big], \end{aligned} \tag{3.5}$$

где вещественные и мнимые части ξ_{k1}, $\bar{\xi}_{k1}$ вычисляются по формуле (3.1). С учетом формул (2.21) для θ_{sl} получаем, что решение $x(t,\varepsilon)$ в точке $\varepsilon = 0$ имеет полюс, порядок которого не превышает длины p_1 жордановой цепочки $\{\varphi_1^{(j)}\}$, $j = \overline{1,p_1}$.

При $\varepsilon = 0$ ранг матрицы D равен $K - 2n$, и следовательно, для существования решений системы (2.24) необходимо и достаточно, что бы ранг расширенной матрицы $(D|g)$ так же был равен $K - 2n$. Так как при $\varepsilon = 0$ в силу разрешимости уравнения (1.3) $\ll f, \psi_s^{(1)} \gg = 0$ и $h_{s1} = \psi_s^{(1)}$, то справедливо условие

$$g_{s1}^{(1)} \equiv - \ll f, Re\, h_{s1} \gg = 0, \qquad g_{s1}^{(2)} \equiv \ll f, Im\, h_{s1} \gg = 0, \tag{3.6}$$

которое и обеспечивает совместность системы (2.24).

Следовательно, при $\varepsilon = 0$ из системы (2.24) находим $\xi_{k1}^{(1)} = c_k^{(1)}$, $\xi_{k1}^{(2)} = c_k^{(2)}$, где $c_k^{(1)}$, $c_k^{(2)}$ – произвольные вещественные числа. Учитывая, что при $\varepsilon = 0$ уравнения (1.1) и (1.3) совпадают, а, следовательно, и их решения так же совпадают, находим, что их ω – периодические решения представимы в виде

$$x(t,0) = z(t) \equiv \sum_{k=1}^{n} [c_k^{(1)} \varphi_k^{(1)} + c_k^{(2)} \bar{\varphi}_k^{(1)}] + \Gamma_0 f(t). \tag{3.7}$$

Работа выполнена в рамках государственного задания № 2014/232 Минобрнауки России и при поддержке грантов РФФИ № 15-01-08599, № 15-41-02455р_поволжье_а.

Дата поступления 25.10.2016

Список литературы

1. Вайнберг М. М., Треногин В. А., *Теория ветвления решений нелинейных уравнений*, "Наука", М., 1969, 528 с.

2. Треногин В. А., “Периодические решения и решения типа перехода абстрактных уравнений реакции-диффузии. Вопросы качественной теории дифференциальных уравнений.”, *СОАН СССР*, "Наука", Новосибирск, 1988, 133-140.

3. Кяшкин А. А., Логинов Б. В., Шаманаев П. А., “Комментарии к задачам о возмущениях линейного уравнения малым линейным слагаемым и спектральных характеристик фредгольмова оператора”, *Журнал Средневолжского математического общества*, **15**:3 (2013), 100-107.

4. Кяшкин А. А., Логинов Б. В., Шаманаев П. А., “Комментарии к задаче о ветвлении периодических решений при бифуркации Андронова-Хопфа в дифференциальных уравнениях с вырожденным оператором при производной”, *Журнал Средневолжского математического общества*, **16**:4 (2014), 33-40.

5. Кяшкин А. А., Логинов Б. В., Шаманаев П. А., “О ветвлении периодических решений линейных неоднородных дифференциальных уравнений с возмущением в виде малого линейного слагаемого”, *Журнал Средневолжского математического общества*, **18**:3 (2016), 45-53.

6. Малкин И. Г., *Некоторые задачи теории нелинейных колебаний*, Едиториал УРСС, М., 2004, 496 с.

7. Логинов Б. В., Русак Ю. Б., “Обобщенная жорданова структура в теории ветвления”, *"Прямые и обратные задачи для дифференциальных уравнений с частными производными"*, сб. н. работ, ред. М. С. Салахитдинов, Изд-во "Фан"АН Узб.ССР, Ташкент, 1978, 133-148.

8. Русак Ю. Б., *Обобщенная жорданова структура в теории ветвления*, дис. ... канд. физ.-мат. наук, Инст. математики им. В. М. Романовского АН Узб.ССР. Ташкент, 1979, 126 с.

9. Русак Ю. Б., “Обобщенная жорданова структура аналитической оператор-функции и сопряженной к ней”, *Известия Акад. Наук Узб.ССР, физ-мат.*, 1978, № 2, 15-19.

10. Loginov B. V., Rousak Yu. B., “Generalized Jordan structure in the problem of the stability of bifurcating solutions”, *Nonlinear Analysis: TMA*, **17**:3 (1991), 219-232.

11. Loginov B. V., “Determination of the branching equation by its group symmetry - Andronov-Hopf bifurcation”, *Nonlinear Analysis: TMA*, **28**:12 (1997), 2035-2047.

12. Loginov B. V., Kim-Tyan L. R., Rousak Yu.B., “On the stability of periodic solutions for differential equations with a Fredholm operator at the highest derivative”, *Nonlinear analysis*, **67**:5 (2007), 1570-1585.

13. Коноплева И.В., Логинов Б.В., Русак Ю.Б., “Симметрия и потенциальность уравнений разветвления в корневых подпространствах в неявно заданных стационарных и динамических бифуркационных задачах”, *Известия высших учебных заведений. Северо-Кавказский регион. Серия: Естественные науки.*, 2009, 115-124.

The branching of periodic solutions of inhomogeneous linear differential equations with a the perturbation in the form of small linear term with delay

© P. A. Shamanaev[3] B. V. Loginov[4]

Abstract. In a Banach space by branching theory methods existence and uniqueness of periodic solutions of inhomogeneous linear differential equations with degenerate or identity operator in the derivative and a perturbation in the form of small linear term with delay is proved. The article shows that the periodic solution has a pole at the point $\varepsilon = 0$, and if $\varepsilon = 0$ it goes to $2n$ –parameter set of periodic solutions. The result is obtained by applying the theory of generalized Jordan sets, that reduces the original problem to the investigation of the Lyapunov-Schmidt resolution system in the root subspace. This resolution system is a non-homogeneous system of linear algebraic equations, which at $\varepsilon \neq 0$ has a unique solution, and at a value of $\varepsilon = 0$ goes to $2n$ -parameter family of solutions.

Key Words: branching of periodic solution, differential equations with delay, generalized Jordan sets, Lyapunov-Schmidt resolution system in the root subspace.

[3] Associate Professor of Applied Mathematics, Differential Equations and Theoretical Mechanics Department, National Research Ogarev Mordovia State University; Saransk; korspa@yandex.ru.

[4] Professor of "Higher Mathematics"Department , Ulyanovsk State Technical University, Ulyanovsk; loginov@ulstu.ru