УДК 517.925.53

Исследование устойчивоподобных свойств «частичного» положения равновесия одной нелинейной системы дифференциальных уравнений.

© В. И. Добкин [1], В. Н. Щенников[2], Е. В. Щенникова[3]

Аннотация. Исследуется асимптотическая устойчивость и устойчивость «частичного» положения равновесия при постоянно действующих возмущениях, малых в каждый момент времени, нелинейной системы дифференциальных уравнений, система первого приближения которой содержит однородные векторные функции порядка $\mu > 1$.

Ключевые слова: асимптотическая устойчивость, возмущения, функция Ляпунова, фазовые переменные, положение равновесия

Рассмотрим систему

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dt} &= X_1^{(\mu)}(y) + X_2^{(\mu)}(z) + F_1(t,y,z), \\ \frac{dz}{dt} &= X_3^{(\mu)}(y) + X_4^{(\mu)}(z) + F_2(t,y,z), \end{aligned} \tag{1.1}$$

где $X_1^{(y)}, X_2^{(z)}, X_3^{(y)}, X_4^{(z)}$ является однородными векторными функциями порядка $\mu = p/q > 1$, p и q - нечётные. Векторные функции $F_1(t,y,z)$ и $F_2(t,y,z)$ определены в области $G = \{t, y, z : t \geq t_0 \geq 0, \|y\| \leq h, \|z\| \leq \infty\}$, $y = (y_1, \ldots, y_m)^T, z = (z_1, \ldots, z_{n-m})^T$. Будем считать, что правые части системы (1.1) удовлетворяют условиям существования и единственности решения задачи Коши в области G. Индекс T означает транспонирование.

Как известно [1], если для системы (1.1) изучать вопрос об устойчивоподобных свойствах решений по части фазовых переменных (например, относительно $y_1, \ldots, y_m$), то система (1.1) в первом приближении должна иметь вид

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dt} &= X_1^{(\mu)}(y), \\ \frac{dz}{dt} &= X_3^{(\mu)}(y) + X_4^{(\mu)}(z), \end{aligned} \tag{1.2}$$

Предположим далее, что $y = 0$ является «частичным» положением равновесия системы (1.1), т.е. $X_1^{(\mu)}(0) \equiv 0$, $F_1(t, 0, z) \equiv 0$. Следует отметить, что определение «частичного» положения равновесия дано в монографии [2]. Пусть $\|F_1(t,y,z)\| \leq \alpha_1 \|y\|^\mu$, где $\alpha_1 > 0$ есть некоторое вещественное число. Будем считать, что здесь и далее по тексту норма вектора является евклидовой.

Помимо указанных предположений выполняется условие: система

$$\frac{dy}{dt} = X_1^{(\mu)}(y), X_1^{(\mu)}(0) \equiv 0, \tag{1.3}$$

[1] Магистр кафедры прикладной математики, дифференциальных уравнений и теоритической механики, Мордовский государственный университет имени Н. П. Огарева, г. Саранск; valeradz@rambler.ru

[2] Профессор кафедры прикладной математики, дифференциальных уравнений и теоритической механики, Мордовский государственный университет имени Н. П. Огарева, г. Саранск; du@math.mrsu.ru

[3] Доцент кафедры фундаментальной информатики, Мордовский государственный университет имени Н. П. Огарева, г. Саранск; schennikova8000@yandex.ru

асимптотически устойчива. Тогда согласно условиям теорем [3] и [4] об асимптотической устойчивости нулевого решения системы (1.3) для этой системы существует функция Ляпунова, удовлетворяющая условиям:

$$\begin{aligned} &a_1 \|y\|^{m+1-\mu} \leq V(y) \leq \ a_2 \|y\|^{m+1-\mu}, \\ &\left\| \frac{\partial V(y)}{\partial y} \right\| \leq \ \alpha_3 \|y\|^{m-\mu}, \\ &\frac{dV(y)}{dy} \Big|_{(1.3)} \leq \ -\alpha_4 \|y\|^{m}, \end{aligned} \tag{1.4}$$

где a_1, a_2, a_3 и a_4 - положительные вещественные числа. Здесь $m > 0$ - достаточно большое чётное вещественное число.

С использованием функции $V(y)$, удовлетворяющей условиям (1.4), докажем асимптотическую устойчивость системы (1.1) относительно фазовых переменных $y_1, \ldots, y_m$, (асимптотическую y - устойчивость). Для этого найдём полную производную по времени t вдоль решений системы (1.1), т.е.

$$\frac{dV(y)}{dy} \Big|_{(1.1)} \leq \ -\alpha_3 \|y\|^m + (grad_y V(y), F_1(t, y, z)). \tag{1.5}$$

С учётом оценок (1.4) и ограничений на векторную функцию $F_1(t, y, z)$ неравенство (1.5) окончательно принимает вид

$$\frac{dV(y)}{dy} \Big|_{(1.2)} \leq \ (-a_4 + a_3\alpha_1) \|y\|^m. \tag{1.6}$$

Таким образом, если $-a_4 + a_3\alpha_1 < 0$, то нулевое решение системы (1.1) будет асимптотически устойчивым относительно фазовых переменных $y_1, \ldots, y_m$, (асимптотически y - устойчивым).

Этот вывод следует из теоремы Ляпунова об асимптотической устойчивости [3].

Далее докажем, что асимптотическая y - устойчивость в этом случае имеет степенной вид. Для этого введём в неравенстве (1.6) преобразование $\rho = (V(x))^{\frac{1}{m+1-\mu}}$ [1]. Тогда неравенство (1.6) получит вид

$$\frac{dV}{dt} \leq \ -\gamma \frac{V^{\frac{1}{m+1-\mu}}}{a_2^{\frac{m}{m+1-\mu}}}, \tag{1.7}$$

где $\gamma = -a_4 + a_1\alpha_1$. Интегрируя неравенство (1.7), получим

$$V(x)^{\frac{1-\mu}{m+1-\mu}} \leq (V(x_0))^{\frac{1-\mu}{m+1-\mu}} + \gamma_1(t - t_0),$$

где $\gamma_1 = \frac{1-\mu}{m+1-\mu} \cdot \frac{-a_4+a_3\alpha_1}{a_2^{\frac{m}{m+1-\mu}}}$. С учётом неравенств (1.4) в результате будем иметь

$$\|x(t)\| \leq \left[\left(\frac{a_2}{a_1} \right)^{\frac{1-\mu}{m+1-\mu}} \|x_0\|^{\frac{m(1-\mu)}{m+1-\mu}} + \frac{\gamma_1}{a_1^{m\frac{1-\mu}{m+1-\mu}}} (t - t_0) \right]^{-\frac{m(\mu-1)}{m+1-\mu}}.$$

Таким образом получено, что асимптотическая y - устойчивость системы (1.1) имеет степенной характер.Теорема доказана.

Теорема 1. Если для системы (1.1) выполняются ограничения на векторную функцию $F_1(t, y, z)$, существует функция $V(y)$, удовлетворяющая условиям (1.4), и $\gamma =$

$= -a_4 + a_3\alpha_1 < 0$ то «частичное» положения равновесия системы (1.1) асимптотически y – устойчиво степенного типа.

Примечание. Если предположить, что $\|F_1(t,y,z)\| \leq \alpha_1 \|y\|^{m+k}$, $k > 0$, то в этом случае теорема 1 будет так же справедлива с тем лишь отличием, что асимптотическая y - устойчивость системы (1.1) будет иметь локальный характер.

В дальнейшем займёмся исследованием вопроса устойчивости «частичного» положения равновесия $y = 0$ при постоянно действующих возмущениях, малых в каждый момент времени. Для этого приведём необходимые определения для системы более общего вида, чем система (1.1).

Рассмотрим систему дифференциальных уравнений

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dt} &= f_1(y) + F_1(t,y,z), \\ \frac{dz}{dt} &= f_2(y) + f_3(z) + F_2(t,y,z), \end{aligned} \tag{1.8}$$

где $f_1(0) \equiv 0, F_1(t,0,z) \neq 0$.

Будем предполагать, что правые части системы (1.8) определены в области $G_1 =$ $= \{t,y,z : t \geq t \geq 0, \|y\| \leq h, \|z\| < \infty, h > 0\}$, и удовлетворяют условиям, обеспечивающих существование и единственность решения задачи Коши в области G_1. Будем также считать, что векторная функция допускает оценку $\|F_1(t,y,z)\| \leq\ v^*$, где $v^* > 0$ является вещественной постоянной.

Предположим, что все решения системы существуют при всех $t \geq t_0 \geq 0$. Из задания системы (1.8) следует, что $y = 0$ является её «частичным» положением равновесия.

Определение. Будем говорить, что «частичное» положение равновесия $y = 0$ системы (1.1) устойчиво при постоянных возмущениях, малых в каждый момент времени, если для любых $\epsilon > 0$ и $t_0 \geq 0$ можно найти $\delta(\epsilon, t_0) > 0$ и $v^*(t_0, \epsilon_0) > 0$ такие, что произвольная фазовая переменная $y(t,t_0,y_0,z_0)$ решения системы (1.8) с $\|y_0\| \leq \delta, \|z\| < \infty$, системы (1.1), для которого в области G_1 выполняется условие $\|F_1(t,y,z)\| <\ v^*$, $v^* > 0$ удовлетворяет условию $\|y(t,t_0,y_0,z_0)\| < \epsilon$ при $t \geq t_0 \geq 0$.

Примечание. Решение системы (1.8) является векторной функцией $(y(t,t_0,y_0,z_0))^T$, $(z(t,t_0,y_0,z_0)^T)^T$. В определение включено только $y(t,t_0,y_0,z_0)$.

Предположим, что для системы

$$\frac{dy}{dt} = f_1(y), f_1(0) \equiv 0, \tag{1.9}$$

существует функция Ляпунова $V_1(y)$, удовлетворяющая условиям

$$a(\|y\|) \leq V_1(y) \leq b(\|y\|), \tag{1.10}$$

$$\frac{dV_1(y)}{dt}\Big|_{(1.9)} \leq\ -c(\|y\|). \tag{1.11}$$

Здесь функции $a(\|y\|)$ и $b(\|y\|)$ определённо-положительные и относятся к классу функций Хана, $c(\|y\|)$ - определённо-положительная функция, а полная производная по времени на решениях системы (1.9) функции $V_1(y)$ определяется по формуле

$$\frac{dV_1(y)}{dt}\Big|_{(1.9)} = \overline{\lim_{h\to\propto}} \frac{1}{h}\left\{V_1(y + hf_1(y)) - V_1(y)\right\},$$

где $V_1(y) \in C_{lip}(\|y\| \leq h)$.

Теорема 2. Если для системы (1.9) существует функция Ляпунова $V = V_1(y)$, удовлетворяющая условиям (1.10) - (1.11), то при достаточно малом $v^* > 0$, «частичное» положение равновесия $y = 0$ системы (1.8) будет устойчивым при постоянно действующих возмущениях, малых в каждый момент времени.

Доказательство. С учётом оценок (1.10) - (1.11) и того, что функция $V_1(y)$ является липшицевой, полная производная $V(y)$ по времени t на решениях системы (1.8) имеет оценку

$$\frac{dV_1(y)}{dt}\Big|_{(1.8)} \leq -c(\|y\|) + Lv^*. \tag{1.12}$$

Выберем далее некоторое $\epsilon \in (0, h)$. Положим, что $\delta(\epsilon) = b^{-1}(a(\epsilon))$, $v^* = \frac{c_1(b^{-1}(a(\epsilon)))}{L}$. Здесь $L > 0$ - постоянная Липшица. Если в области G_1 выполняется условие $\|r(t)\| \leq v^*$, то путём выбора $\delta(\epsilon)$ из (1.12) при достаточно малых v^* и с учётом того, что L есть ограниченная величина, можно добиться того, что будет справедливо неравенство

$$\frac{dV_1(y(t, t_0, y_0, z_0))}{dt}\Big|_{V(y)\equiv a(\epsilon)} < 0. \tag{1.13}$$

Рассмотрим далее фазовую переменную $y(t, t_0, y_0, z_0)$ решения системы (1.8) при $t_0 \geq$ $\geq 0, \|y_0\| < h, \|z_0\| < \infty$. С учётом (1.12) и в силу того, что $(a(\|y\|) \wedge (\|y\|))$ есть функция Хана, можно добиться того, что $V_1(y_0) < a(\epsilon)$. Докажем, что $V_1(y(t, t_0, y_0, z_0)) < a(\epsilon)$ при $t \geq t_0$.

Доказательство проведём от противного, т.е. пусть при $t \in t_0, t_1$ выполняется неравенство (1.13), а при $t = t_1$, $V_1(y(t, t_0, y_0, z_0)) = a(\epsilon)$. Но тогда будет $\dot{V_1}(y(t, t_0, y_0, z_0)) > 0$. В результате получили противоречие с (1.9). Следовательно, теорема доказана.
Доказательство закончено.
Рассмотрим систему (1.1) Предположим, что и система первого приближения имеет вид (1.2). Пусть теперь векторная функция $F_1(t, y, z)$ в системе (1.1) имеет вид

$$F_1(t, y, z) = f^{(1)}(t, y, z) + \omega(t),$$

где $\left\|f^{(1)}(t, y, z)\right\| \leq \alpha_2 \|y\|^{\mu}$ при $\|y\| \leq r$, $r < \infty$, $r > 0$, $f^{(1)}(t, 0, z) \equiv 0$, а $\omega(t)$ определяет постоянно действующие возмущения, малые в каждый момент времени, $\|\omega(t)\| < v_1$, $v_1 > 0$ - малое вещественное число.

Снова предположим, что для системы (1.3) существует функция $V(y)$, удовлетворяющая условиям (1.4). Выберем для системы (1.1) функцию Ляпунова $V(y)$, удовлетворяющую условиям (1.4). Тогда будем иметь

$$\frac{dV(y)}{dt}\Big|_{(1.1)} \leq -a_4 \|(y)\|^m + a_3 \|y\|^{m-\mu} \cdot a_2 \|y\|^{\mu} + a_3 \|y\|^{m \cdot \mu} \cdot v_1 = (-a_4 + a_3\alpha_2) \|y\|^m + a_3 v_1 \|y\|^{m-\mu}. \tag{1.14}$$

Пусть α_2 такое, что в (1.14) $-a_4 + a_3\alpha_2 < 0$. Выберем $v_1 > 0$ таким, чтобы выполнилось неравенство

$$\frac{dV(y)}{dt}\Big|_{(1.1)} < 0$$

при $r_1 \leq \|y\| \leq r$, r_1 и r - положительные.

Исходя из теоремы об устойчивости при постоянно действующих возмущениях, малых в каждый момент времени [4],[5],[6], неравенство (1.14) за счёт выбора величины $v_1 > 0$ имеет место в области $r_1 \leq \|y\| \leq r$. Таким образом,теорема доказана.

Теорема 3. «Частичное» положение равновесия $y = 0$ системы (1.7) устойчиво при постоянно действующих возмущениях, малых в каждый момент времени, если для системы (1.9) существует функция Ляпунова $V(y)$, удовлетворяющая условиям (1.10) - (1.11), $-a_4 + a_3\alpha_2 < 0$ и $v_1 > 0$ - достаточно малое в каждый момент времени.

Список литературы

1. Щенников В. Н.., "Исследование устойчивости по части переменных дифференциальных систем с однородными правыми частями", *Дифференциальные уравнения*, 1984, № 8, 1645–1649.

2. Воротников В. И., Румянцев В. В., *Устойчивость и управление по части координат фазового вектора динамических систем: теория, методы и предположения*, Научный мир, М., 2001, 320 с.

3. Зубов В. И., *Устойчивость движения*, Высшая школа, М., 1973, 272 с.

4. Красcовский Н. Н., *Некоторые задачи теории устойчивости движения*, Физматиз, М., 1959, 212 с.

5. Румянцев В. В., Озиранер А. С., *Устойчивость и стабилизация движения по отношению к части переменных*, Наука, М., 1987, 256 с.

6. Малкин И. Г., *Некоторые задачи теории устойчивости движения*, Наука, М., 1966, 632 с.

Дата поступления 29.02.2016

Research of stability-similar properties of partial-equilibrium state of a system of nonlinear differentional equations

© V. I. Dobkin[4], V. N. Shchennikov[5], E. V. Shchennikova[6]

Abstract. We study the asymptotic stability and stability of partial equilibrium state under constantly acting perturbations, small at any time, of nonlinear system of differential equations, for which a system of the first approximation includes homogeneous vector-functions of order $\mu > 1$.

Key Words: asymptotic stability, perturbations, Lyapunov function, phase variables, equilibrium position

[4] Master of Applied Mathematics, Differential Equations and Theoretical Mechanics Chair, Mordovian State University after N.P. Ogarev, Saransk; valeradz@rambler.ru

[5] Professor of Applied Mathematics, Differential Equations and Theoretical Mechanics Chair, Mordovian State University after N.P. Ogarev, Saransk; du@math.mrsu.ru

[6] Assistant professor of Fundamental Informatics Chair, Mordovian State University after N.P. Ogarev, Saransk; schennikova8000@yandex.ru