Математика

Краевая задача с вырождением на границе вдоль многообразия коразмерности $k > 2$

© Д. И. Бояркин[1]

Аннотация. В статье рассматривается краевая задача для эллиптического уравнения произвольного порядка $2m$ с вырождением на границе области вдоль многообразия коразмерности $k > 2$. При исследовании используются методы функционального анализа и геометрии гладких многообразий, предложенные Ю. В. Егоровым и В. А. Кондратьевым. Эти методы позволяют исследовать краевые задачи в более общей постановке. Получены априорные оценки для решения задачи в обобщенных пространствах Соболева – Слободецкого и сформулирована теорема о гладкости решений задачи.

Ключевые слова: эллиптические операторы, гладкое многообразие, преобразование Фурье, условие Шапиро — Лопатинского

1. Классификация многообразия вырождения коразмерности $k > 2$

Зависимость свойств решений граничной задачи от природы касания векторного поля границы вдоль многообразия коразмерности $k = 2$ и исследование этих свойств, впервые было проделано R. Borrelli в работе [2].

Пусть G — ограниченная область в $\mathbb{R}^n$, $n > 3$, с кусочно-гладкой границей Γ^{n-1} и μ — гладкое векторное поле, определенное на Γ^{n-1}, касается Γ^{n-1} вдоль $(n-k)$–мерного гладкого многообразия Γ^{n-k}, $k > 2$, но не касается Γ^{n-k}.

Определим гладкие $(n-i)$–мерные многообразия Γ^{n-i}, $2 \leq i \leq k-2$, таким образом, чтобы $\Gamma^{n-1} \supset \ldots \supset \Gamma^{n-i} \supset \ldots \supset \Gamma^{n-(k-1)} \supset \Gamma^k$. Многообразие Γ^k является ориентируемым в Γ^{k-1} с помощью поля μ. Пусть $\beta = \langle \mu, n \rangle$ — скалярное произведение μ и n, где n — вектор внешней нормали к Γ^{n-1} в точках Γ^{k-1}. В точках Γ^k функция $\beta = 0$. Обозначим через Γ^{k-1}_+ множество точек Γ^{k-1}, в которых $\beta > 0$, а через Γ^{k-1}_- — множество точек Γ^{k-1}, где $\beta < 0$. Пусть $\beta^k = \langle \mu, n^k \rangle$ — скалярное произведение μ и n^k, где n^k — нормаль к Γ^k, лежащая в касательной плоскости к Γ^k и направленная в сторону Γ^{k-1}_+.

В зависимости от структуры поля μ $(n-k)$–мерное многообразие Γ^{n-k} отнесем к одному из классов:

– к первому классу, если $\beta > 0$, $\beta^k > 0$;

– ко второму классу, если $\beta > 0$, $\beta^k < 0$;

– к третьему классу, если $\Gamma^{k-1}_+ = \emptyset$ либо $\Gamma^{k-1}_- = \emptyset$.

Заметим что, так как поле μ не касается самого многообразия Γ^k, то Γ^k может относиться только к одному классу.

В настоящей работе рассматривается случай, когда Γ^k принадлежит к первому классу.

[1] Доцент кафедры прикладной математики, дифференциальных уравнений и теоретической механики, Мордовский государственный университет имени Н. П. Огарева, г. Саранск; boyarkindi@gmail.com.

2. Постановка краевой задачи

Задачи для эллиптического оператора второго порядка с вырождением вдоль многообразия коразмерности $k = 2$ рассматривались в работах Бицадзе А.В. [1], Мазьи В.Г., Панеях Б. П. [7], Hormander L. [8], и в ряде других работ. В работах Ю.В. Егорова – В.А. Кондратьева [5], [6] при исследовании подобных задач были предложены методы функционального анализа, теории эллиптических краевых задач и геометрии гладких многообразий. Эти методы позволяют исследовать краевые задачи для эллиптического оператора произвольного порядка при вырождении граничных условий на многообразии коразмерности $k > 2$. Подобные задачи возникают при моделировании явлений упругости, фильтрации и многих других физических процессов.

Рассмотрим краевую задачу

$$\begin{array}{lll} Lu = f & \text{в} & G, \\ B_j(\mu(x,D)u) = \phi_j, \quad j = 1, \ldots, m, & \text{на} & \Gamma^{n-1}, \\ B_j^k(u) = \phi_j^k, \quad j = 1, \ldots, m, & \text{на} & \Gamma^{n-k}, \end{array}$$

где L — эллиптический оператор порядка $2m$ с гладкими коэффициентами по переменным $x_1, x_2, \ldots, x_n$; B_j — дифференциальный оператор порядка m_j с гладкими коэффициентами по переменным $x_1, x_2, \ldots, x_n$; B_j^k — дифференциальный оператор порядка m_j^k с гладкими коэффициентами по переменным $x_{k+1}, \ldots, x_n$; $\mu(x, D)$ — дифференцирование вдоль гладкого векторного поля μ. Операторы L и B_j, $j = 1, \ldots, m$ удовлетворяют условию Шапиро — Лопатинского.

Обозначим через N^{n-k} — $(n-k+1)$–мерное гладкое многообразие, проходящее через Γ^{n-k} трансверсально к полю μ. Продолжим гладким образом поля μ в достаточно малую окрестность Ω^k многообразия Γ^{n-k} в $N^{n-k+1} \cap G$. Так как Γ^{n-k} относится к первому классу, то каждую точку из Ω^k можно соединить с N^{n-k+1} интегральной кривой поля μ. На $N^{n-k+1} \cap G$ операторы $L_k = f + \sum_{p=1}^{k-1} l_p$ и B_j^k, $j = 1, \ldots, m$, удовлетворяют условию Шапиро — Лопатинского.

Далее, определим $(n-i+1)$–мерные плоскости нормалей N^{n-i} к Γ, $2 < i \leq k-1$, проходящие соответственно через Γ^{n-i}. Заметим, что $N^{n-i} \in N^{n-i+1}$. Предположим, что в малой окрестности Ω многообразия Γ^{n-k} в G выполняется условие $[n_i, \mu] = 0$, где n_i — нормаль к плоскости N^{n-i}, $[,]$ — скобка Пуассона.

3. Априорные оценки и гладкость решений краевой задачи

Теорема 3.1. *Если $u \in H_{s-2m+1}(G)$, $\phi_j \in H_{s-m_j-\frac{3}{2}}(\Gamma^{n-1})$, $\phi_j^k \in H_{s-m_j-\frac{3}{2}}(\Gamma^{n-k})$, $d > 0$ — достаточно малое число и $s > \max\left(m_j + \frac{3}{2}, m_j^k + \frac{1}{2}\right)$, то существует такая постоянная $C > 0$, не зависящая от u, что*

$$C^{-1}\left(\|u\|_s + \|\mu(x,D)hu\|_s + \sum_{i=1}^{k-2} \|n_i(x,D)h^i u\|_s^{N^{n-i+1}} + \|h^k u\|_s^{N^{n-k}}\right) \leq$$

$$\leq \|f\|_{s-2m} + \|\mu(x,D)hf\|_{s-2m} + \sum_{i=1}^{k-2} \|n_i(x,D)h^i f\|_{s-2m}^{N^{n-i+1}} + \|h^k f\|_{s-2m}^{N^{n-k}} +$$

$$+ \sum_{j=1}^{m} \|\phi_j\|_{s-m_j-\frac{3}{2}}^{\Gamma^{n-1}} + \|h\phi\|_{s-m_j-\frac{1}{2}}^{\Gamma^{n-1}} + \sum_{i=1}^{k-2}\left(\sum_{j=1}^{m}\left(\|\phi_j\|_{s-m_j-\frac{3}{2}}^{\Gamma^{n-i+1}} + \|h^i\phi_j\|_{s-m_j-\frac{1}{2}}^{\Gamma^{n-i+1}}\right)\right) +$$

$$+\|\phi_j^k\|_{s-m_j-\frac{1}{2}}^{\Gamma^{n-k}}+\|u\|_0 \leq$$

$$\leq C\left(\|u\|_s+\|\mu(x,D)hu\|_s+\sum_{i=1}^{k-2}\|n_i(x,D)h^iu\|_s^{N^{n-i+1}}+\|h^ku\|_s^{N^{n-k}}\right),$$

где $f=Lu$ *в* G, $\phi_j=B_j(\mu(x,D)u)$ *на* Γ^{n-1}, $\phi_k=B_j^k(u)$ *на* Γ^{n-k}, $h\in C^\infty(G)$ *и* $h=1$ *вне* $\left(\frac{d}{2}\right)$ *–окрестности многообразия* Γ^{n-1}, $h^i\in C^\infty(G)$, $i=2,\ldots,k-2$, *причем* h^i *равна 1 в* $\left(\frac{d}{2}\right)$ *–окрестности многообразия* Γ^{n-i} *и равна нулю вне* d *окрестности этого многообразия,* $h^k\in C^\infty(G)$ *и* $h=1$ *вне* $\left(\frac{d}{2}\right)$ *–окрестности многообразия* Γ^{n-k}.

С л е д с т в и е 3.1. *Пространство решений однородной задачи*
$Lu=0$ *в* G,
$B_j(\mu(x,D)u)=0$, $j=1,\ldots,m$, *на* Γ^{n-1},
$B_j^k(u)=0$, $j=1,\ldots,m$, *на* Γ^{n-k},
конечномерно.

С л е д с т в и е 3.2. *Обозначим через* $\Pi_s(G)$ *пространство функций с конечной нормой*

$$\|u\|_{\Pi_s(G)}=\|u\|_s+\|\mu(hu)\|_s+\sum_{i=1}^{k-1}\|n_i(h^iu)\|_s^{N^{n-i}}+\|h^ku\|_s.$$

Через Γ_s^{n-i} $(i=2,\ldots,k-1)$ *— пространства функций, определенных на* Γ^{n-i} *с конечной нормой*

$$\|u\|_{\Gamma_s^{n-i}}=\|u\|_s^{\Gamma^{n-i}}+\|h^iu\|_{s+1}^{\Gamma^{n-i}},$$

Γ_s^{n-1} *— пространство функций, определенных на* Γ^{n-1} *с конечной нормой*

$$\|u\|_{\Gamma_s^{n-1}}=\|u\|_s^{\Gamma^{n-1}}+\|hu\|_{s+1}^{\Gamma^{n-1}},$$

Γ_s^{n-k} *— пространство функций, определенных на* Γ^{n-k} *с конечной нормой*

$$\|u\|_{\Gamma_s^{n-k}}=\|u\|_s^{\Gamma^{n-k}}+\|h^ku\|_{s+1}^{\Gamma^{n-k}},$$

где h, h^i, h^k *функции, определенные в теореме 2.1. Тогда область значений оператора* $u\to(Lu,B_j(\mu(x,D)u)|_{\Gamma^{n-1}},n_i(x,D)u|_{\Gamma^{n-i}})$, $B_j^k(u)|_{\Gamma^{n-k}}$, $j=1,\ldots,m$, $i=2,\ldots,k-1$, *действующего из* $\Pi_s(G)$ *в* $\Pi_{s-2m}(G)\times\Gamma_{s-m_j-\frac{3}{2}}^{n-1}\times\ldots\times\Gamma_{s-m_j-\frac{3}{2}}^{n-(k-1)}\times H_{s-m_j^k-\frac{1}{2}}(\Gamma^{n-k})$, *замкнута.*

Т е о р е м а 3.2. *Если многообразие* Γ^{n-k} *принадлежит к первому классу и известно, что* $u\in H_s(G)$, $Lu\in H_s(G)$, $\phi_j\in H_{s-m_j-\frac{3}{2}}(\Gamma^{n-1})$, $j=2,\ldots,k-1$, $\phi_j^k\in H_{s-m_j^k-\frac{1}{2}}(\Gamma^{n-k})$, *где* $s>\max\left(m_j+\frac{3}{2},m_j^k+\frac{1}{2}\right)$ *то* $u\in H_{s+1}(G)$ *и существует такая постоянная* $C>0$, *не зависящая от* u, *что*

$$\|u\|_s\leq C(\|f\|_{s-2m+1}+\|\mu(x,D)hf\|_{s-2m+1}+\sum_{i=1}^{k-2}\|n_i(x,D)h^if\|_{s-2m+1}^{N^{n-i+1}}+\|h^kf\|_{s-2m+1}^{N^{n-k}}+$$

$$+\sum_{j=1}^{m}\left(\|\phi_j\|_{s-m_j+\frac{3}{2}}^{\Gamma^{n-1}}+\|h\phi_j\|_{s-m_j+\frac{1}{2}}^{\Gamma^{n-1}}\right)+\sum_{i=1}^{k-2}\sum_{j=1}^{m}\left(\|\phi_j\|_{s-m_j+\frac{3}{2}}^{\Gamma^{n-i+1}}+\|h^i\phi_j\|_{s-m_j+\frac{1}{2}}^{\Gamma^{n-i+1}}\right)+$$

$$+\sum_{j=1}^{m}\|\phi_j^k\|_{s-m_j^k+\frac{1}{2}}^{\Gamma^{n-k}}+\|u\|_s).$$

Список литературы

1. Бицадзе А. В., *Краевые задачи для эллиптических уравнений второго порядка*, Наука, М., 1966, 293 с.

2. Borrelli R., "The singular, second order oblique derivative problem", *J. Math. and Mech.*, 1966, 51–81.

3. Бояркин Д. И., "Одно обобщение задачи с косой производной", *УМН*, **38**:1(229) (1983), 157–158.

4. Бояркин Д. И., "Нерегулярная эллиптическая краевая задача", *Труды Средневолжского математического общества*, **10**:1 (2008), 119–122.

5. Егоров Ю. В., *Линейные дифференциальные уравнения главного типа*, Наука, М., 1984, 360 с.

6. Егоров Ю. В., Кондратьев В. А., "О задаче с косой производной", *Матем. сб.*, **78** (1969), 148–176.

7. Мазья В. Г., Панеях Б. П., "Вырождающиеся эллиптические операторы и задача с косой производной", *Тр. ММО*, **31** (1974), 237–255.

8. Hormander L., "Pseudo-differential operators and non-elliptic boundary prob-lems", *Ann. Math.*, **83** (1966), 129–209; рус. пер.:Хёрмандер Л., "Псевдодифференциальные операторы и неэллиптические краевые задачи. – В кн.: Псевдодифференциальные операторы.", 1967, 166–296.

Дата поступления 03.11.2015

A boundary value problem with degeneration on the boundary along the manifold of codimension $k > 2$

© **D. I. Boyarkin**[2]

Abstract. The article considers the boundary value problem for elliptic equations of arbitrary order $2m$ with degeneracy on the boundary of the domain along manifolds of codimension $k > 2$. The study uses methods of functional analysis and geometry of smooth manifolds proposed by Y. V. Egorov and V. A. Kondratiev. These methods allow us to investigate the boundary value problem in more general formulation. Aprioristic estimates for the solution of a task in the generalized spaces of Sobolev – Slobodetsky are obtained and the theorem of smoothness of solutions of a task is formulated.

Key Words: elliptic operators, smooth variety, transformation Fourier, condition Lopatinsky

[2] Associate Professor of the Department of Applied Mathematics, Differential Equations and Theoretical Mechanics, N.P. Ogarev Mordovia State University, Saransk; boyarkindi@gmail.com.