МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ И ИНФОРМАТИКА

УДК 517.9

Условия разрешимости системы уравнений, описывающих длинные волны в водном прямоугольном канале, глубина которого меняется вдоль оси.

© С. Н. Алексеенко [1], М. В. Донцова [2]

Аннотация. Нелокальная разрешимость задачи Коши в физических переменных доказана для системы уравнений,описывающих длинные волны в водном прямоугольном канале, глубина которого меняется вдоль оси. Чаще всего эту систему квазилинейных уравнений называют системой уравнений мелкой воды. Исходная система преобразуется к системе симметричных квазилинейных уравнений с помощью инвариантов Римана. Хотя ударные волны вполне возможны при построении решений квазилинейных гиперболических систем для широкого класса начальных данных, мы нашли достаточные условия на исходные данные, которые гарантируют существование глобального классического решения, продолженного конечным числом шагов из локального решения. Существование локального решения, гладкость которого не ниже, чем гладкости начальных условий, тоже доказана. Исследование рассматриваемой проблемы выполнено на основе метода дополнительного аргумента. Доказательство нелокальной разрешимости опирается на оригинальные глобальные оценки.

Ключевые слова: система длинных волн, метод дополнительного аргумента, глобальные оценки

1. Введение

Рассмотрим водный узкий (ширина канала меньше длины волны) канал прямоугольной формы, глубина которого меняется вдоль оси x, а ширина равна единице.

Динамика длинных (длина волны больше глубины) волн в таких каналах описывается следующей нелинейной системой дифференциальных уравнений в частных производных первого порядка [1]:

$$\begin{cases} \partial_t \eta + \partial_x \left[u(h(x) + \eta) \right] = 0, \\ \partial_t u + u \partial_x u + g \partial_x \eta = 0, \end{cases} \tag{1.1}$$

где $u(t,x)$ - усредненная по поперечному сечению скорость течения, $\eta(t,x)$ - колебания водной поверхности вдоль оси x, g - ускорение свободного падения, $h(x) + \eta$ и $h(x)$ - полная и невозмущенная глубина канала вдоль главной оси x.

Для системы уравнений (1.1) определим начальные условия:

$$u(0,x) = u_0(x), \ \eta(0,x) = \eta_0(x). \tag{1.2}$$

Задача (1.1), (1.2) рассматривается в области

$$\Omega_T = \{(t,x) \,|0 \le t \le T, x \in [0,+\infty), T > 0\}.$$

[1] Профессор кафедры прикладной математики, Нижегородский государственный технический университет им. Р.Е.Алексеева, г. Нижний Новгород; sn-alekseenko@yandex.ru

[2] Аспирантка кафедры прикладной математики, Нижегородский государственный педагогический университет им. К. Минина, г. Нижний Новгород; dontsowa.marina2011@yandex.ru

Для исследования систем такого вида применялись самые разнообразные подходы. Описание многих современных подходов содержится в [2]. В [2] содержится анализ разрешимости систем типа (1.1) как на основе классического метода характеристик, так и с использованием понятия обобщенного решения. Оба эти подхода, как и многие другие, имеют свои достоинства и недостатки. Так, в частности, в методе характеристик условием разрешимости в исходных координатах является существование обратной функции для решения характеристического уравнения. Нахождение обратной функции в общем случае представляет собой непростую задачу, особенно, когда характеристическое уравнение решается приближенно.

Задача определения условий разрешимости в исходных координатах систем и уравнений дифференциальных уравнений в частных производных первого порядка, как и задача построения численного решения дифференциальных уравнений в частных производных первого порядка, эффективно решается в рамках метода дополнительного аргумента [3],[4], [5], [6], [7]. В работе [3] с помощью метода дополнительного аргумента были определены условия локальной разрешимости задачи Коши для системы двух квазилинейных уравнений и указаны границы интервала разрешимости. Но то решение, существование которого доказано в [3], имеет меньшую гладкость, чем начальные функции. В настоящей работе представлены результаты исследования по определению условий нелокальной разрешимости задачи Коши для системы (1.1) с помощью метода дополнительного аргумента.

Для того, чтобы можно было применить метод дополнительного аргумента, рассматриваемую задачу нужно привести к преобразованной системе в инвариантах Римана. Это осуществляется с помощью специального алгоритма и введением новых неизвестных функций, которые называют инвариантами Римана [2], [4]. В данном случае они примут вид:

$$z_1 = u + 2\sqrt{g(h(x)+\eta)}, \; z_2 = -u + 2\sqrt{g(h(x)+\eta)}. \tag{1.3}$$

В результате получим следующую систему уравнений:

$$\begin{cases} \partial_t z_1 + \frac{1}{4}(3z_1 - z_2)\partial_x z_1 = gh'(x), \\ \partial_t z_2 + \frac{1}{4}(z_1 - 3z_2)\partial_x z_2 = -gh'(x). \end{cases} , \tag{1.4}$$

с начальными условиями

$$\varphi_1(x) = z_1(0,x) = u_0(x) + 2\sqrt{g(h(x)+\eta_0(x))}, \; \varphi_2(x) = z_2(0,x) = -u_0(x) + 2\sqrt{g(h(x)+\eta_0(x))}. \tag{1.5}$$

Стандартно проверяется, что если z_1, z_2 являются решением задачи (1.4), (1.5), то $u(t,x) = \frac{z_1(t,x)-z_2(t,x)}{2}$, $\eta(t,x) = \frac{(z_1(t,x)+z_2(t,x))^2}{16g} - h(x)$, являются решением задачи (1.1), (1.2).

2. Существование локального решения

В соответствии с методом дополнительного аргумента запишем для задачи (1.4), (1.5) расширенную характеристическую систему [3],[4], [5], [6], [7]:

$$\frac{d\eta_1(s,t,x)}{ds} = \frac{1}{4}(3w_1(s,t,x) - w_3(s,t,x)), \tag{2.1}$$

$$\frac{d\eta_2(s,t,x)}{ds} = \frac{1}{4}(w_4(s,t,x) - 3w_2(s,t,x)), \tag{2.2}$$

$$\frac{dw_1(s,t,x)}{ds} = gh'(\eta_1(s,t,x)), \tag{2.3}$$

$$\frac{dw_1(s,t,x)}{ds} = -gh'(\eta_2(s,t,x)), \tag{2.4}$$

$$w_3(s,t,x) = w_2(s,s,\eta_1),\ w_4(s,t,x) = w_1(s,s,\eta_2), \tag{2.5}$$

$$w_1(0,t,x) = \omega_1(\eta_1(0,t,x)),\ w_2(0,t,x) = \omega_2(\eta_2(0,t,x)). \tag{2.6}$$

Неизвестные функции $\eta_i,\ w_j,\ i = 1,2,\ j = \overline{1,4}$ зависят не только t и x, но еще и от дополнительного аргумента s . Интегрируя уравнения (2.1) - (2.4) по аргументу s и учитывая условия (2.5), (2.6) получим эквивалентную систему интегральных уравнений:

$$\eta_1(s,t,x) = x - \frac{1}{4}\int_s^t (3w_1 - w_3)d\nu, \tag{2.7}$$

$$\eta_2(s,t,x) = x - \frac{1}{4}\int_s^t (w_4 - 3w_2)d\nu, \tag{2.8}$$

$$w_1(s,t,x) = \varphi_1(\eta_1(0,t,x)) + \int_0^s gh'(\eta_1)d\nu, \tag{2.9}$$

$$w_2(s,t,x) = \varphi_2(\eta_2(0,t,x)) - \int_0^s gh'(\eta_2)d\nu, \tag{2.10}$$

$$w_3(s,t,x) = w_2(s,s,\eta_1),\ w_4(s,t,x) = w_1(s,s,\eta_2). \tag{2.11}$$

Система (2.7) - (2.11) эквивалентна следующей системе:

$$w_1(s,t,x) = \varphi_1(x - \frac{1}{4}\int_0^t (3w_1 - w_3)d\nu) + g\int_0^s h'(x - \frac{1}{4}\int_\nu^t (3w_1 - w_3)d\tau)d\nu, \tag{2.12}$$

$$w_2(s,t,x) = \varphi_2(x - \frac{1}{4}\int_0^t (w_4 - 3w_2)d\nu) - g\int_0^s h'(x - \frac{1}{4}\int_\nu^t (w_4 - 3w_2)d\tau)d\nu, \tag{2.13}$$

$$w_3(s,t,x) = w_2(s,s,x - \frac{1}{4}\int_s^t (3w_1 - w_3)d\nu), \tag{2.14}$$

$$w_4(s,t,x) = w_1(s,s,x - \frac{1}{4}\int_s^t (w_4 - 3w_2)d\nu). \tag{2.15}$$

При выполнении условий $h(x) \geq 0, \eta_0(x) \geq c > 0,\ u_0(x) \leqslant -2\sqrt{g(h(x) + \eta_0(x))}, \quad x \in [0,\infty)$ получаем, что

$$\varphi_1(x) = u_0 + 2\sqrt{g(h(x) + \eta_0)} \leqslant 0,\ \varphi_2(x) = -u_0 + 2\sqrt{g(h(x) + \eta_0)} \geqslant 0, \quad x \in [0,\infty).$$

Из (2.9), (2.10) при выполнении условий $h'(x) \leqslant 0, \varphi_1(x) \leqslant 0,\ \varphi_2(x) \geqslant 0, \quad x \in [0,\infty)$ получаем, что $w_1(s;t,x) \leqslant 0,\ w_2(s;t,x) \geqslant 0$ на Γ_T.

Из (2.11) следует, что $w_4(s;t,x) \leqslant 0,\ w_3(s;t,x) \geqslant 0$ на Γ_T. Следовательно,

$$\eta_1(s;t,x) = x - \frac{1}{4}\int_s^t [3w_1(\nu;t,x) - w_3(\nu;t,x)]\,d\nu \in [0,\infty), \quad (s,t,x) \in \Gamma_T,$$

$$\eta_2(s;t,x) = x - \frac{1}{4}\int_s^t [w_4(\nu;t,x) - 3w_2(\nu,t,x)]\,d\nu \in [0,\infty), \quad (s,t,x) \in \Gamma_T.$$

Обозначим $\Gamma_T = \{\,(s,t,x)|\, 0 \le s \le t \le T,\ x \in [0,+\infty),\ T > 0\}$,

$$C_\varphi = \max\{\sup_{[0,+\infty)} |\varphi_i|,\ \sup_{[0,+\infty)} |\varphi'{}_i|,\ \sup_{[0,+\infty)} |\varphi''{}_i|,\ i = 1,2\ \},$$

$$C_h = \max\{\ sup_{[0,+\infty)} |h|,\ \sup_{[0,+\infty)} |h'|,\ \sup_{[0,+\infty)} |h''|,\ \sup_{[0,+\infty)} |h'''|\},$$

$\bar{C}^{1,2,2}(\Omega_T)$ - пространство функций дифференцируемых по переменной t, дважды дифференцируемых по переменной x, имеющих смешанные производные второго порядка и ограниченные вместе со своими производными на Ω_T, $\bar{C}^{\alpha_1,\alpha_2,\dots\alpha_n}(\Omega_*)$ - пространство функций, определенных, непрерывных и ограниченных вместе со своими производными до порядка α_m по m - му аргументу, $m = \overline{1,n}$, на неограниченном подмножестве $\Omega_* \subset R^n, n = 1,2\dots.$.

Для произвольной функции U введем норму $\|U\| = \sup_{\Gamma_T} |U(s,t,x)|$ без указания в символе $\|\|$ области, по которой норма вычисляется, так как каждый раз это будет понятно из контекста.

Справедлива следующая теорема, в которой сформулированы условия существования локального решения задачи Коши (1.1), (1.2), которое имеет такую же гладкость по x, как и начальные функции.

Т е о р е м а 2.1. *Пусть $u_0, \eta_0 \in C^2([0,\infty))$, $h \in C^3([0,\infty))$ и выполняются условия*

$$h(x) \ge 0,\ h'(x) \leqslant 0,\ h''(x) \ge 0,\ \eta_0(x) \ge c > 0, \qquad x \in [0,\infty),$$

$$u_0(x) \leqslant -2\sqrt{g(h(x)+\eta_0(x))}\ u_0'(x) \ge \frac{|h'(x)+\eta_0'(x)|}{\sqrt{h(x)+\eta_0(x)}}, \quad x \in [0,\infty).$$

Тогда для любого $T \leqslant \min(\frac{C_\varphi}{4gC_h}, \frac{1}{10C_\varphi})$ задача Коши (1.1), (1.2) имеет единственное решение $u,\eta \in C^{1,2,2}(\Omega_T)$, где $u(t,x) = \frac{w_1(t,t,x)-w_2(t,t,x)}{2}$, $\eta(t,x) = \frac{(w_1(t,t,x)+w_2(t,t,x))^2}{16g} - h(x)$ и функции w_1, w_2 удовлетворяют системе интегральных уравнений (2.12)- (2.15).

Доказательство теоремы разбито на три леммы.

Л е м м а 2.1. *Пусть функции w_j, $j = \overline{1,4}$, удовлетворяют системе интегральных уравнений (2.12)- (2.15) и являются непрерывно дифференцируемыми и ограниченными вместе со своими первыми производными. Тогда функции*

$$u(t,x) = \frac{w_1(t,t,x) - w_2(t,t,x)}{2},\ \eta(t,x) = \frac{(w_1(t,t,x)+w_2(t,t,x))^2}{16g} - h(x)$$

будут решением задаи Коши (1.1), (1.2) на Ω_{T_0}, $T_0 \le T$, где T_0 - константа, определяемая через исходные данные.

Вышеприведенная лемма составляет по существу основу метода дополнительного аргумента. Во всех работах с использованием метода дополнительного аргумента (как упомянутых в списке литературы, так и других) подобное утверждение или доказывалось для изучаемых систем или анонсировалось.

Л е м м а 2.2. *При выполнении условий $u_0, \eta_0 \in C^2([0,\infty))$, $h \in C^3([0,\infty))$,*

$$h(x) \ge 0,\ h'(x) \leqslant 0,\ \eta_0(x) \ge c > 0,\ u_0(x) \leqslant -2\sqrt{g(h(x)+\eta_0(x))}, \qquad x \in [0,\infty),$$

и

$$T \leqslant \min(\frac{C_\varphi}{4gC_h}, \frac{1}{10C_\varphi}) \tag{2.16}$$

система интегральных уравнений (2.12) - (2.15) имеет единственное решение $w_j \in C^{1,1,1}(\Gamma_T)$.

Доказательство. Доказательство этой леммы проводится по схеме, изложенной в [3]. Поэтому приведем только его ключевые пункты, без которых остальной текст был бы непонятен. Основная трудность состоит в том, что в системе (2.12) - (2.15) присутствует суперпозиция неизвестных функций. Для преодоления этой трудности используется «двухуровневый» алгоритм последовательных приближений.

Нулевое приближение к решению системы интегральных уравнений (2.12) - (2.15) зададим равенствами: $w_{10}(s,t,x) = \varphi_1(x)$, $w_{20}(s,t,x) = \varphi_2(x)$.

Первое и последующие приближения системы уравнений (2.12) - (2.15) определим при помощи рекуррентной последовательности систем уравнений $(n = 1, 2, \ldots)$:

$$w_{1n} = \varphi_1(x - \frac{1}{4}\int_0^t (3w_{1n} - w_{3n})d\nu) + \int_0^s gh'(x - \frac{1}{4}\int_\nu^t (3w_{1n} - w_{3n})d\tau)d\nu, \tag{2.17}$$

$$w_{2n} = \varphi_2(x - \frac{1}{4}\int_0^t (w_{4n} - 3w_{2n})d\nu) - \int_0^s gh'(x - \frac{1}{4}\int_\nu^t (w_{4n} - 3w_{2n})d\tau)d\nu, \tag{2.18}$$

$$w_{3n} = w_{2(n-1)}(s,s,x - \frac{1}{4}\int_s^t (3w_{1n} - w_{3n})d\nu), \tag{2.19}$$

$$w_{4n} = w_{1(n-1)}(s,s,x - \frac{1}{4}\int_s^t (w_{4n} - 3w_{2n})d\nu). \tag{2.20}$$

При выполнении условий

$$h(x) \geq 0, \eta_0(x) \geq c > 0,\ u_0(x) \leqslant -2\sqrt{g(h(x) + \eta_0(x))},\ h'(x) \leqslant 0, \qquad x \in [0,\infty)$$

получаем, что $w_{1n}(s;t,x) \leqslant 0$, $w_{2n}(s;t,x) \geqslant 0$, $w_{4n}(s;t,x) \leqslant 0$, $w_{3n}(s;t,x) \geqslant 0$ на Γ_T. Следовательно,

$$\eta_{1n}(s;t,x) = x - \frac{1}{4}\int_s^t \left[3w_{1n}(\nu;t,x) - w_{3n}(\nu;t,x)\right]d\nu \in [0,\infty), \quad (s,t,x) \in \Gamma_T,$$

$$\eta_{2n}(s;t,x) = x - \frac{1}{4}\int_s^t \left[w_{4n}(\nu;t,x) - 3w_{2n}(\nu,t,x)\right]d\nu \in [0,\infty), \quad (s,t,x) \in \Gamma_T.$$

Теперь при каждом n систему (2.17) - (2.20) решаем (доказываем существование решения) с помощью своего процесса последовательных приближений. Нулевое приближение (при каждом n) определим равенствами: $w^0_{jn} = w_{j(n-1)}$, $j = \overline{1,4}$. Для системы уравнений (2.17) - (2.20) первое и все последующие приближения определим на основе соотношений:

$$w^{k+1}_{1n} = \varphi_1(x - \frac{1}{4}\int_0^t (3w^k_{1n} - w^k_{3n})d\nu) + \int_0^s gh'(x - \frac{1}{4}\int_\nu^t (3w^k_{1n} - w^k_{3n})d\tau)d\nu, \tag{2.21}$$

$$w^{k+1}_{2n} = \varphi_2(x - \frac{1}{4}\int_0^t (w^k_{4n} - 3w^k_{2n})d\nu) - \int_0^s gh'(x - \frac{1}{4}\int_\nu^t (w^k_{4n} - 3w^k_{2n})d\tau)d\nu, \tag{2.22}$$

$$w^{k+1}_{3n} = w_{2(n-1)}(s,s,x - \frac{1}{4}\int_s^t (3w^k_{1n} - w^k_{3n})d\nu), \tag{2.23}$$

$$w_{4n}^{k+1}=w_{1(n-1)}(s,s,x-\frac{1}{4}\int_s^t(w_{4n}^k-3w_{2n}^k)d\nu). \tag{2.24}$$

Так же, как в [3] устанавливается, что при выполнении условия

$$T\leqslant\min(\frac{C_\varphi}{2gC_h},\frac{1}{9C_\varphi}) \tag{2.25}$$

последовательные приближения (2.21) - (2.24) сходятся к непрерывному и ограниченному решению системы (2.17) - (2.20), для которого справедливы оценки: $\|w_{jn}\|\le 2C_\varphi,\ j=\overline{1,4}$.

С помощью дифференцирования последовательных приближений (2.21) - (2.24) выводится, что при выполнении условия (2.25) справедливы оценки:

$$||w_{1nx}^{k+1}||\le 4C_\varphi, ||w_{2nx}^{k+1}||\le 4C_\varphi,\ ||w_{3nx}^{k+1}||\le 8C_\varphi,\ ||w_{4nx}^{k+1}||\le 8C_\varphi.$$

Затем доказывается, что при выполнении условия (2.25) последовательные приближения $w_{jnx}^k,\ j=\overline{1,4}$ сходятся при $k\to\infty$, а значит, существуют производные $w_{jnx},\ j=\overline{1,4}$ и справедливы оценки:

$$\|\partial_x w_{1n}\|\le 4C_\varphi,\ \|\partial_x w_{2n}\|\le 4C_\varphi,\ \|\partial_x w_{3n}\|\le 8C_\varphi,\ \|\partial_x w_{4n}\|\le 8C_\varphi.$$

Затем, как и в [3], сначала доказывается, что при выполнении условия (2.25) последовательные приближения, определяемые из системы (2.17) - (2.20), сходятся к непрерывному решению системы (2.12) - (2.15), для которого справедливы оценки: $\|w_j\|\le 2C_\varphi,\ j=\overline{1,4}$.

После доказывается, что при выполнении условия (2.16) $w_{jnx}\to w_{jx}=\partial_x w_j,\ j=\overline{1,4}$, где функции $\partial_x w_j$ являются непрерывными по всем своим аргументам на Γ_T. Справедливы оценки: $\|\partial_x w_i\|\le 4C_\varphi,\ i=1,2,\ \|\partial_x w_3\|\le 8C_\varphi,\ \|\partial_x w_4\|\le 8C_\varphi$. Аналогично доказывается, что $w_j,\ j=\overline{1,4}$ имеют непрерывные и ограниченные производные по переменной t в области Γ_T. Единственность решения доказывается так же, как и в статье [3].

В нижеследующей лемме утверждается, что при выполнении следующих условий

$$h(x)\ge 0,\ h'(x)\leqslant 0,\ u_0(x)\leqslant -2\sqrt{g(h(x)+\eta_0(x))},\ \eta_0(x)\ge c>0,$$
$$h''(x)\ge 0,\ u_0'(x)\ge\frac{|h'(x)+\eta_0'(x)|}{\sqrt{h(x)+\eta_0(x)}},\quad x\in[0,\infty), \tag{2.26}$$

решение имеет такую же гладкость по x, как и начальные функции. Этот результат имеет определяющее значение для возможности продолжения решения.

Лемма 2.3. *Пусть $u_0,\eta_0\in C^2([0,\infty))$, $h\in C^3([0,\infty))$, тогда при выполнении условий (2.16), (2.26) функции w_j, $j=\overline{1,4}$, представляющие собой решение системы уравнений (2.12) - (2.15), имеют непрерывные и ограниченные производные $\frac{\partial^2 w_j}{\partial x^2}$, $\frac{\partial^2 w_j}{\partial xt}$, $j=\overline{1,4}$ на Γ_T, где $T\leqslant\min(\frac{C_\varphi}{4gC_h},\frac{1}{10C_\varphi})$.*

Доказательство.

При выполнении условий (2.16), (2.26) установлено, что справедливы неравенства: $|\eta_{1n}(s,t,x_1)-\eta_{1n}(s,t,x_2)|\le|x_1-x_2|$, $|\eta_{2n}(s,t,x_1)-\eta_{2n}(s,t,x_2)|\le|x_1-x_2|$, где $\eta_{1n}(s,t,x)=x-\frac{1}{4}\int_s^t(3w_{1n}-w_{3n})d\nu$, $\eta_{2n}(s,t,x)=x-\frac{1}{4}\int_s^t(w_{4n}-3w_{2n})d\nu$.

Дважды продифференцируем последовательные приближения (2.17) - (2.20) по x. Обозначив $\omega_j^n=w_{jnxx},\ j=\overline{1,4}$, получим систему уравнений:

$$\omega_1^n(s,t,x)=-\frac{1}{4}\varphi_1'(x-\frac{1}{4}\int_0^t(3w_{1n}-w_{3n})d\nu)\int_0^t(3\omega_1^n-\omega_3^n)d\nu+$$
$$+\varphi_1''(x-\frac{1}{4}\int_0^t(3w_{1n}-w_{3n})d\nu)(1-\frac{1}{4}\int_0^t(3w_{1nx}-w_{3nx})d\nu)^2-$$
$$-\frac{1}{4}\int_0^s gh''\int_\nu^t(3\omega_1^n-\omega_3^n)d\tau d\nu+g\int\limits_0^s h'''(1-\frac{1}{4}\int_\nu^t(3w_{1nx}-w_{3nx})d\tau)^2d\nu), \tag{2.27}$$

$$\omega_2^n\,(s,t,x) = -\frac{1}{4}\varphi_2'(x - \frac{1}{4}\int_0^t (w_{4n} - 3w_{2n})d\nu)\int_0^t (\omega_4^n - 3\omega_2^n)d\nu +$$
$$+\varphi_2''(x - \frac{1}{4}\int_0^t (w_{4n} - 3w_{2n})d\nu)(1 - \frac{1}{4}\int_0^t (w_{4nx} - 3w_{2nx})d\nu)^2 +$$
$$+\frac{1}{4}\int_0^s gh''\int_\nu^t (\omega_4^n - 3\omega_2^n)d\tau d\nu - g\int\limits_0^s h'''(1 - \frac{1}{4}\int_\nu^t (w_{4x} - 3w_{2x})d\tau)^2 d\nu), \qquad (2.28)$$

$$\omega_3^n\,(s,t,x) = \omega_2^{n-1}\cdot(1 - \frac{1}{4}\int_s^t (3w_{1nx} - w_{3nx})d\nu)^2 - \frac{1}{4}w_{2(n-1)x}\int_s^t (3\omega_1^n - \omega_3^n)d\nu, \qquad (2.29)$$

$$\omega_4^n\,(s,t,x) = \omega_1^{n-1}\cdot(1 - \frac{1}{4}\int_s^t (w_{4nx} - 3w_{2nx})d\nu)^2 - \frac{1}{4}w_{1(n-1)x}\int_s^t (\omega_4^n - 3\omega_2^n)d\nu, \qquad (2.30)$$

С учетом установленных выше оценок $\|w_{jn}\| \le 2C_\varphi$, $j=\overline{1,4}$, при $t \leqslant \frac{1}{10C_\varphi}$ имеем

$$|\frac{1}{4}\int_s^t (3w_{1n} - w_{3n})d\tau| \le 0.3, \ \ |\frac{1}{4}\int_s^t (w_{4n} - 3w_{2n})d\tau| \le 0.3.$$

Зафиксируем точку x_0. Рассмотрим множество $\Omega_{x_0} = \{x\,|0 \le x \le x_0 + 0.3\}$. В замкнутом ограниченном множестве Ω_{x_0} непрерывные вторые производные функций φ_i, $i=1,2$, и функция h''' будут равномерно непрерывны. Затем, при при выполнении условий (2.16), (2.26), доказана равностепенная непрерывность функций ω_1^n, ω_2^n по x при $x \in \Omega_{x_0}$, из которой следует равностепенная непрерывность функций ω_1^n, ω_2^n по x в выбранной, произвольной точке x_0, т.е. на $[0,\infty)$. Равностепенная непрерывность функций ω_1^n, ω_2^n по x используется для доказательства сходимости последовательных приближений ω_j^n, $j=\overline{1,4}$.

Рассмотрим систему уравнений

$$\tilde\omega_1^n = -\frac{1}{4}\varphi_1'(\eta_1(0,t,x))\int_0^t (3\tilde\omega_1^n - \tilde\omega_3^n)d\tau + \varphi_1''\cdot(1 - \frac{1}{4}\int_0^t (3w_{1x} - w_{3x})d\tau)^2 +$$
$$+g\int\limits_0^s (h'''(\eta_1)(1 - \frac{1}{4}\int_\nu^t (3w_{1x} - w_{3x})d\tau)^2 - \frac{1}{4}h''(\eta_1(\nu,t,x))\int_\nu^t (3\tilde\omega_1^n - \tilde\omega_3^n)d\tau d\nu), \qquad (2.31)$$

$$\tilde\omega_2^n = -\frac{1}{4}\varphi_2'(\eta_2(0,t,x))\int_0^t (\tilde\omega_4^n - 3\tilde\omega_2^n)d\tau + \varphi_2''\cdot(1 - \frac{1}{4}\int_0^t (w_{4x} - 3w_{2x})d\tau)^2 -$$
$$-g\int_0^s (h'''(\eta_2)(1 - \frac{1}{4}\int_\nu^t (w_{4x} - 3w_{2x})d\tau)^2 - \frac{1}{4}h''(\eta_2(\nu,t,x))\int_\nu^t (\tilde\omega_4^n - 3\tilde\omega_2^n)d\tau d\nu), \qquad (2.32)$$

$$\tilde\omega_3^n = \tilde\omega_2^{n-1}\cdot(1 - \frac{1}{4}\int_s^t (3w_{1x} - w_{3x})d\tau)^2 - \frac{1}{4}w_{2x}(s,s,\eta_1(s,t,x))\int_s^t (3\tilde\omega_1^n - \tilde\omega_3^n)d\tau, \qquad (2.33)$$

$$\tilde\omega_4^n = \tilde\omega_1^{n-1}\cdot(1 - \frac{1}{4}\int_s^t (w_{4x} - 3w_{2x})d\tau)^2 - \frac{1}{4}w_{1x}(s,s,\eta_2(s,t,x))\int_s^t (\tilde\omega_4^n - 3\tilde\omega_2^n)d\tau. \qquad (2.34)$$

Доказывается, что при выполнении условий (2.16), (2.26) система рекуррентных уравнений (2.31) - (2.34) при каждом n имеет решение, причем $\tilde\omega_j^n \to \tilde\omega_j$, $j=\overline{1,4}$, справедливы оценки: $\|\tilde\omega_1\| \le 2C_\varphi$, $\|\tilde\omega_2\| \le 2C_\varphi$, $\|\tilde\omega_3\| \le 4C_\varphi$, $\|\tilde\omega_4\| \le 4C_\varphi$.

Далее доказывается, что последовательные приближения ω_j^n сходятся к функциям $\tilde\omega_j$, $j=\overline{1,4}$ при $n\to\infty$.

Получаем, что $w_{jnxx} \to w_{jxx} = \tilde\omega_j$, где функции $\frac{\partial^2 w_j}{\partial x^2}$, $j=\overline{1,4}$, непрерывны и ограничены в области Γ_T при выполнении условий (2.16), (2.26).

Аналогично устанавливаем, что существуют непрерывные и ограниченные производные $\frac{\partial^2 w_j}{\partial xt}$, $j=\overline{1,4}$, в области Γ_T при выполнении условий (2.16), (2.26).

3. Существование нелокального решения

Т е о р е м а 3.1. *Пусть $u_0, \eta_0 \in C^2([0,\infty))$ и $h \in C^3([0,\infty))$ и выполняются условия (2.26). Тогда для любого $T > 0$ задача Коши (1.1), (1.2) имеет единственное решение $u, \eta \in C^{1,2,2}(\Omega_T)$, где $u(t,x) = \frac{w_1(t,t,x)-w_2(t,t,x)}{2}$, $\eta(t,x) = \frac{(w_1(t,t,x)+w_2(t,t,x))^2}{16g} - h(x)$ и функции w_1, w_2 удовлетворяют системе интегральных уравнений (2.12)- (2.15).*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Продифференцируем систему уравнений (1.4) по x. Обозначим $p(t,x) = \partial_x z_1(t,x)$, $q(t,x) = \partial_x z_2(t,x)$, получим

$$\begin{cases} \partial_t p + \frac{1}{4}(3z_1 - z_2)\partial_x p = -\frac{3}{4}p^2 + \frac{1}{4}pq + gh'', \\ \partial_t q + \frac{1}{4}(z_1 - 3z_2)\partial_x q = \frac{3}{4}q^2 - \frac{1}{4}pq - gh'', \\ p(0,x) = \varphi_1'(x), \quad q(0,x) = \varphi_2'(x). \end{cases} \tag{3.1}$$

Добавим к системе уравнений (2.7) -(2.11) два уравнения:

$$\begin{cases} \frac{d\gamma_1(s,t,x)}{ds} = -\frac{3}{4}\gamma_1^2(s,t,x) + \frac{1}{4}\gamma_1(s,t,x)\gamma_2(s,s,\eta_1) + gh''(\eta_1), \\ \frac{d\gamma_2(s,t,x)}{ds} = \frac{3}{4}\gamma_2^2(s,t,x) - \frac{1}{4}\gamma_1(s,s,\eta_2)\gamma_2(s,t,x) - gh''(\eta_2), \end{cases} \tag{3.2}$$

с начальными условиями

$$\gamma_1(0,t,x) = \varphi_1'(\eta_1), \quad \gamma_2(0,t,x) = \varphi_2'(\eta_2). \tag{3.3}$$

Перепишем систему уравнений (3.2) в следующем виде:

$$\begin{cases} \gamma_1(s,t,x) = \varphi_1'(\eta_1) + \int\limits_0^s [-\frac{3}{4}\gamma_1^2 + \frac{1}{4}\gamma_1\gamma_2(\tau,\tau,\eta_1) + gh''(\eta_1)]d\tau, \\ \gamma_2(s,t,x) = \varphi_2'(\eta_2) + \int\limits_0^s [\frac{3}{4}\gamma_2^2 - \frac{1}{4}\gamma_1(\tau,\tau,\eta_2)\gamma_2 - gh''(\eta_2)]d\tau. \end{cases} \tag{3.4}$$

Аналогично тому, как это выполнено в статье [7], доказывается существование непрерывно дифференцируемого решения задачи (3.4). Следовательно,

$$\gamma_1(t,t,x) = p(t,x) = \frac{\partial z_1}{\partial x}, \gamma_2(t,t,x) = q(t,x) = \frac{\partial z_2}{\partial x}$$

Для вывода глобальных оценок отметим, что из (2.7) -(2.11) следуют оценки:

$$\|w_i\| \leqslant C_\varphi + gTC_h, \ i = 1,2$$

. Следовательно,

$$\|z_i\| \leqslant C_\varphi + gTC_h, \ i = 1,2. \tag{3.5}$$

Далее, из (3.2) имеем:

$$\begin{cases} \gamma_1(s,t,x) = \varphi_1'(\eta_1)exp(\int\limits_0^s (-\frac{3}{4}\gamma_1 + \frac{1}{4}\gamma_2(\tau,\tau,\eta_1))d\tau) + \\ +g\int\limits_0^s h''exp(\int\limits_\tau^s (-\frac{3}{4}\gamma_1 + \frac{1}{4}\gamma_2(\nu,\nu,\eta_1))d\nu)d\tau, \\ \gamma_2(s,t,x) = \varphi_2'(\eta_2)exp(\int\limits_0^s (\frac{3}{4}\gamma_2 - \frac{1}{4}\gamma_1(\tau,\tau,\eta_2))d\tau) - \\ -g\int\limits_0^s h''exp(\int\limits_\tau^s (\frac{3}{4}\gamma_2 - \frac{1}{4}\gamma_1(\nu,\nu,\eta_2))d\nu)d\tau. \end{cases} \tag{3.6}$$

При выполнении условия $u_0'(x) \geq \frac{|h'(x)+\eta_0'(x)|}{\sqrt{h(x)+\eta_0(x)}}, \quad x \in [0,\infty)$, получаем:

$$\varphi_1'(x) \geqslant 0,\ \varphi_2'(x) \leqslant 0, \quad x \in [0,\infty).$$

Из (3.6) при выполнении условий $h''(x) \geq 0,\ \varphi_1'(x) \geqslant 0,\ \varphi_2'(x) \leqslant 0, \quad x \in [0,\infty)$ получаем, что $\gamma_1 \geqslant 0,\ \gamma_2 \leqslant 0$, на Γ_T, значит, $\|\gamma_i\| \leqslant C_\varphi + gTC_h,\ i = 1,2$. Следовательно,

$$\|\partial_x z_i\| \leqslant C_\varphi + gTC_h,\ i = 1,2. \tag{3.7}$$

Далее, также, как в статье [7] выводится, что при всех t и x справедливы оценки:

$$|\partial^2_{x^2} z_1| \leq E_{11} ch\left(t\sqrt{C_{12}C_{21}}\right) + \frac{E_{21}C_{12} + C_{13}}{\sqrt{C_{12}C_{21}}} sh\left(t\sqrt{C_{12}C_{21}}\right) + C_{12}C_{23}t^2, \tag{3.8}$$

$$|\partial^2_{x^2} z_2| \leq E_{21} ch\left(t\sqrt{C_{12}C_{21}}\right) + \frac{E_{11}C_{21} + C_{23}}{\sqrt{C_{12}C_{21}}} sh\left(t\sqrt{C_{12}C_{21}}\right) + C_{21}C_{13}t^2, \tag{3.9}$$

где $E_{11},\ E_{21},\ C_{12},\ C_{13},\ C_{21},\ C_{23}$ - постоянные, которые определяются через исходные данные.

Полученные глобальные оценки для $z_1,\ z_2,\ \partial_x z_1,\ \partial_x z_2,\ \partial^2_{x^2} z_1,\ \partial^2_{x^2} z_2$ ((3.5), (3.7)- (3.9)) дают возможность продолжить решение на любой заданный промежуток $[0,\ T]$.

Взяв в качестве начальных значений $z_1(T_0,x),\ z_2(T_0,x)$, продлим решение на промежуток $[T_0,\ T_1]$, а затем, беря начальные значения $z_1(T_1,x),\ z_2(T_1,x)$, продлим решение на промежуток $[T_1,\ T_2]$. Длина промежутка разрешимости не будет уменьшаться, так как она определяется величинами $\|\partial_x z_1\|$, $\|\partial_x z_2\|$, а эти величины в силу глобальных оценок (3.7) ограничены значением $C_\varphi + gTC_h$ на любом промежутке разрешимости. В частности, начальные значения

$$z_1(T_k,x), z_2(T_k,x) \in \bar{C}^2([0,+\infty)),\ |z_1(T_k,x)| \leqslant C_\varphi + gTC_h,\ |z_2(T_k,x)| \leqslant C_\varphi + gTC_h.$$

$$|\partial_x z_1(T_k,x)| \leqslant C_\varphi + gTC_h,\ |\partial_x z_2(T_k,x)| \leqslant C_\varphi + gTC_h.$$

Для вторых производных справедливы оценки (3.8), (3.9), где в качестве t можно взять T. В результате за конечное число шагов решение может быть продлено на любой заданный промежуток $[0,\ T]$.

Единственность решения доказывается применением аналогичных оценок, которые позволили установить сходимость последовательных приближений.

Так как $u(t,x) = \frac{z_1(t,x) - z_2(t,x)}{2},\ \eta(t,x) = \frac{(z_1(t,x)+z_2(t,x))^2}{16g} - h(x),\ \ h \in C^3([0,\infty)),$
$z_1, z_2 \in C^{1,2,2}(\Omega_T)$, то $u, \eta \in C^{1,2,2}(\Omega_T)$.

Список литературы

1. Пелиновский Е. Н., *Гидродинамика волн цунами*, Институт прикладной физики РАН, Нижний Новгород, 1996.

2. Рождественский Б. Л., Яненко Н. И., *Системы квазилинейных уравнений и их приложения в газовой динамике*, Наука, М., 1978.

3. Иманалиев М. И., Алексеенко С. Н., “К вопросу существования гладкого ограниченного решения для системы двух нелинейных дифференциальных уравнений в частных производных первого порядка”, *Докл. РАН*, **379**:1 (2001), 16–21.

4. Иманалиев М. И., Панков П. С., Алексеенко С. Н., “Метод дополнительного аргумента”, *Вестник КазНУ*, 2006, Серия "Математика, механика, информатика". Спец. выпуск, № 1, 60–64.

5. Алексеенко С. Н., Донцова М. В., “Исследование разрешимости системы уравнений, описывающей распределение электронов в электрическом поле спрайта”, *Матем. вестник педвузов и университетов Волго-Вятского региона*, **14** (2012), 34–41.

6. Алексеенко С. Н., Донцова М. В., “Локальное существование ограниченного решения системы уравнений, описывающей распределение электронов в слабоионизированной плазме в электрическом поле спрайта”, *Матем. вестник педвузов и университетов Волго-Вятского региона*, **15** (2013), 52–59.

7. Алексеенко С. Н., Шемякина Т. А., Донцова М. В., “Условия нелокальной разрешимости систем дифференциальных уравнений в частных производных первого порядка”, *Научно-технические ведомости СПбГПУ. Физико–математические науки*, 2013, № 3 (177), 190–201.

Дата поступления 24.04.2016

The solvability conditions of the system of long waves in a water rectangular channel, the depth of which varies along the axis.

© S. N. Alekseenko[3], M. V. Dontsova[4]

Abstract. Nonlocal solvability of the Cauchy problem in physical variables is proved for the system of long waves in a water rectangular channel with the depth varying along its axis. Most often this system of quasi-linear equations is called as the Shallow water system. The starting system is transformed to the system of symmetric quasi-linear equations with help of Riemann invariants. Although shock waves are expected in this quasi-linear hyperbolic system for a wide class of initial data, we find a sufficient condition on the initial data that guarantees existence of a global classical solution continued from a local solution. The existence of the local solutions, the smoothness of which is not lower than the smoothness of the initial conditions, is also proven. The investigation of the considered problem is based on the method of an additional argument. The proof of the nonlocal solvability relies on original global estimates.

Key Words: long-wave system, method of an additional argument, global estimates

[3] The professor of the applied mathematics chair, Nizhniy Novgorod State Technical University, Nizhniy Novgorod; sn-alekseenko@yandex.ru

[4] A post - graduate student of the applied mathematics chair, Nizhniy Novgorod State Pedagogical University, Nizhniy Novgorod; dontsowa.marina2011@yandex.ru