УДК 517.968

О разрешимости интегро-дифференциального уравнения типа Буссинеска с нелокальными интегральными условиями

© Т. К. Юлдашев [1] К. Х. Шабадиков[2]

Аннотация. Рассмотрены вопросы однозначной разрешимости нелокальной смешанной задачи для нелинейного интегро-дифференциального уравнения типа Буссинеска четвертого порядка. Использован метод Фурье разделения переменных. Получена счетная система нелинейных интегральных уравнений (ССНИУ). Для доказательства теоремы об однозначной разрешимости ССНИУ использован метод последовательных приближений. Далее показана сходимость ряда Фурье к искомой функции нелокальной смешанной задачи. Данная работа является дальнейшим развитием теории интегро-дифференциальных уравнений в частных производных.

Ключевые слова: смешанная задача, интегро-дифференциальное уравнение, уравнение типа Буссинеска, нелокальные интегральные условия, однозначная разрешимость

1. Постановка задачи

Математическое моделирование многих процессов, происходящих в реальном мире, часто приводит к изучению смешанных задач для уравнений математической физики.Большой интерес с точки зрения физических приложений представляют дифференциальные уравнения в частных производных высоких порядков. Многие задачи газовой динамики, теории упругости, теории пластин и оболочек приводится к рассмотрению дифференциальных уравнений в частных производных высоких порядков [1] – [3]. Изучению различных задач для уравнений в частных производных четвертого порядка посвящено большое количество работ (см. [4] – [16]). Дифференциальные уравнения в частных производных типа Буссинеска имеют много приложений в математической физике (см. [17]).

В случаях, когда граница области протекания физического процесса недоступна для измерений, в качестве дополнительной информации, достаточной для однозначной разрешимости задачи, могут служить нелокальные условия в интегральной форме. Нелокальные задачи рассмотрены в работах многих авторов (см. [18], [19]). В настоящей работе предлагается методика изучения нелокальной смешанной задачи для нелинейного интегро-дифференциального уравнения типа Буссинеска четвертого порядка.

Итак, в области Ω рассматривается уравнение

$$\frac{\partial^2 U(t,x)}{\partial t^2} - \frac{\partial^4 U(t,x)}{\partial t^2 \partial x^2} - \mu(t)\frac{\partial^2 U(t,x)}{\partial x^2} = \tag{1.1}$$

$$= \eta(t)\int\limits_0^T U(\theta,x)d\theta + f\left(x, \int\limits_0^T\int\limits_0^l H(\theta,y)U(\theta,y)dyd\theta\right)$$

[1] Доцент кафедры высшей математики, Сибирский государственный аэрокосмический университет имени академика М. Ф. Решетнева, г. Красноярск, tursun.k.yuldashev@gmail.com

[2] Доцент кафедры математического анализа и дифференциальных уравнений, Ферганский государственный университет, г. Фергана, Узбекистан

с нелокальными интегральными условиями

$$U(0,x)+\int\limits_0^T \Theta_1(t)\cdot U(t,x)dt=\varphi_1(x),\; x\in\Omega_l, \tag{1.2}$$

$$U_t(0,x)+\int\limits_0^T \Theta_2(t)\cdot U(t,x)dt=\varphi_2(x),\; x\in\Omega_l \tag{1.3}$$

и граничными условиями Бенара

$$U(t,0)=U(t,l)=0,\; t\in\Omega_T, \tag{1.4}$$

где $\eta(t)\in C(\Omega_T)$, $\mu(t)\in C(\Omega_T)$, $f(x,\gamma)\in C(\Omega_l\times R)$, $\varphi_k(x)\in C^2(\Omega_l)$, $\varphi_k(0)=\varphi_k(l)=0$, $k=1,2$, $\Theta_k(t)\in C^2(\Omega_T)$, $k=1,2$, $\int\limits_0^T\int\limits_0^l |H(t,x)|dxdt<\infty$, $\Omega\equiv\Omega_T\times\Omega_l$, $\Omega_T\equiv[0,T]$, $\Omega_l\equiv[0,l]$, $0<T<\infty$, $0<l<\infty$.

Под решением смешанной задачи (1.1) – (1.4) понимаем функцию $U(t,x)\in C^{2,2}(\Omega)$, удовлетворяющую уравнению (1.1) и условиям (1.2) – (1.4).

2. Сведение смешанной задачи к счетной системе нелинейных интегральных уравнений

Решение данной задачи ищем в виде ряда Фурье:

$$U(t,x)=\sum_{n=1}^{\infty} u_n(t)\cdot\vartheta_n(x), \tag{2.1}$$

где функции $\vartheta_n(x)$ определены как собственные функции спектральной задачи $\vartheta''(x)+$ $+\lambda^2\vartheta(x)=0$, $\vartheta(0)=\vartheta(l)=0$, $0<\lambda$ и образуют полную систему собственных функций $\left\{\vartheta_n(x)\right\}_{n=1}^{\infty}$ в пространстве $L_2(\Omega_l)$, где λ_n – соответствующие собственные числа.

По предположению

$$f\left(x,\gamma\right)=\sum_{n=1}^{\infty} f_n(\gamma)\cdot\vartheta_n(x), \tag{2.2}$$

где $f_n(\gamma)=\int\limits_0^l f\left(y,\gamma\right)\cdot\vartheta_n(y)dy$, $\gamma=\int\limits_0^T\int\limits_0^l H(\theta,z)\sum\limits_{k=1}^{\infty} u_k(\theta)\cdot\vartheta_k(z)dzd\theta$.

Кроме того, учтем, что

$$\vartheta''_n(x)=-\lambda_n^2\cdot\vartheta_n(x). \tag{2.3}$$

Подставляя ряды (2.1) и (2.2) в уравнение (1.1), с учетом (2.3) получаем следующую счетную систему интегро-дифференциальных уравнений второго порядка:

$$u''_n(t)=-\tau_n\cdot\mu(t)\cdot u_n(t)+\frac{\eta(t)}{1+\lambda_n^2}\cdot\int\limits_0^T u_n(\theta)d\theta+\frac{1}{1+\lambda_n^2}f_n(\gamma), \tag{2.4}$$

где $\tau_n=\frac{\lambda_n^2}{1+\lambda_n^2}$, $u_n(t)=\int\limits_0^l U(t,y)\vartheta_n(y)dy$.

Нелокальные условия (1.2) и (1.3) для уравнения (2.4) запишем в следующем виде

$$u_n(0) + \int_0^T \Theta_1(t) \cdot u_n(t)dt = \varphi_{1n}, \tag{2.5}$$

$$u'_n(0) + \int_0^T \Theta_2(t) \cdot u_n(t)dt = \varphi_{2n}, \tag{2.6}$$

где $\varphi_{kn} = \int\limits_0^l \varphi_k(y) \cdot \vartheta_n(y)dy$, $k = 1, 2$.

Правую часть (2.4) обозначим через $F_n(t)$. Тогда путем интегрирования два раза по t из (2.4) получаем

$$u_n(t) = C_{2n} + C_{1n}t + \int_0^t (t-s)F_n(s)ds, \tag{2.7}$$

где C_{1n}, C_{2n} – пока неизвестные постоянные, для определения которых из интегральных условий (2.5) и (2.6) получаем следующую систему алгебраических уравнений

$$\begin{cases} C_{1n}\alpha_3 + C_{2n}\alpha_1 = g_1, \\ C_{1n}\alpha_2 + C_{2n}\alpha_4 = g_2, \end{cases} \tag{2.8}$$

$\alpha_1 = 1 + \int\limits_0^T \Theta_1(t)dt$, $\alpha_2 = 1 + \int\limits_0^T t\Theta_2(t)dt$, $\alpha_3 = \int\limits_0^T t\Theta_1(t)dt$,
$\alpha_4 = \int\limits_0^T \Theta_2(t)dt$, $g_k = \varphi_k - \int\limits_0^T \Theta_k(t) \int\limits_0^t (t-s)F_n(s)dsdt$, $k = 1, 2$.

Решая систему алгебраических уравнений (2.8), получаем

$$C_{1n} = \frac{\alpha_3 g_1 - \alpha_1 g_2}{\omega} = \frac{1}{\omega}\left\{\alpha_3\varphi_1 - \alpha_3 \int_0^T \Theta_1(t) \int_0^t (t-s)F_n(s)dsdt - \right. \tag{2.9}$$

$$\left. -\alpha_1\varphi_2 + \alpha_1 \int_0^T \Theta_2(t) \int_0^t (t-s)F_n(s)dsdt \right\},$$

$$C_{2n} = \frac{\alpha_2 g_1 - \alpha_3 g_2}{\omega} = \frac{1}{\omega}\left\{\alpha_2\varphi_1 - \alpha_2 \int_0^T \Theta_1(t) \int_0^t (t-s)F_n(s)dsdt - \right. \tag{2.10}$$

$$\left. -\alpha_3\varphi_2 + \alpha_3 \int_0^T \Theta_2(t) \int_0^t (t-s)F_n(s)dsdt \right\},$$

где

$$\omega = \alpha_3\alpha_4 - \alpha_1\alpha_2 \neq 0. \tag{2.11}$$

Подставляя (2.9) и (2.10) в (2.7), получаем

$$u_n(t) = Q_n(t) + \tau_n \frac{\alpha_2 + \alpha_3 t}{\omega} \int_0^T \Theta_1(t) \int_0^t (t-s) \cdot \mu(s) \cdot u_n(s)dsdt - \tag{2.12}$$

$$-\tau_n \frac{\alpha_3 + \alpha_1 t}{\omega} \int_0^T \Theta_2(t) \int_0^t (t-s) \cdot \mu(s) \cdot u_n(s) ds dt -$$

$$-\tau_n \int_0^t (t-s) \cdot \mu(s) \cdot u_n(s) ds -$$

$$-\frac{\alpha_2 + \alpha_3 t}{\omega} \int_0^T \Theta_1(t) \int_0^t (t-s) \frac{p(s)}{1+\lambda_n^2} \int_0^T u_n(\theta) d\theta ds dt +$$

$$+\frac{\alpha_3 + \alpha_1 t}{\omega} \int_0^T \Theta_2(t) \int_0^t (t-s) \frac{p(s)}{1+\lambda_n^2} \int_0^T u_n(\theta) d\theta ds dt +$$

$$+\int_0^t (t-s) \frac{p(s)}{1+\lambda_n^2} \int_0^T u_n(\theta) d\theta ds -$$

$$-\frac{\alpha_2 + \alpha_3 t}{\omega} \int_0^T \Theta_1(t) \int_0^t (t-s) \frac{s^2}{2(1+\lambda_n^2)} f_n(\gamma) ds dt +$$

$$+\frac{\alpha_3 + \alpha_1 t}{\omega} \int_0^T \Theta_2(t) \int_0^t (t-s) \frac{s^2}{2(1+\lambda_n^2)} f_n(\gamma) ds dt +$$

$$+\int_0^t (t-s) \frac{s^2}{2(1+\lambda_n^2)} f_n(\gamma) ds,$$

где $Q_n(t) = \frac{1}{\omega}\Big[(\alpha_2 + \alpha_3 t) \cdot \varphi_{1n} - (t\alpha_1 + \alpha_3) \cdot \varphi_{2n}\Big]$, $p(t) = \int_0^t (t-s) \cdot \eta(s) ds$.

Используем формулу Дирихле

$$\int_0^T \Theta_k(t) \int_0^t (t-s) \cdot \mu(s) \cdot u_n(s) ds dt = \int_0^T \mu(s) \cdot u_n(s) \cdot \Big(\nu_{1k}(s) - s \cdot \nu_{2k}(s)\Big) ds dt,$$

где

$$\nu_{1k}(s) = \int_s^T t \cdot \Theta_k(t) dt, \; \nu_{2k}(s) = \int_s^T \Theta_k(t) dt, \; k = 1, 2.$$

Тогда счетную систему нелинейных интегральных уравнений (ССНИУ) (2.12) запишем в следующем виде

$$u_n(t) = \Im_1(t; u_n) \equiv Q_n(t) + \int_0^T \Re_n(t,s) u_n(s) ds + G_n(t) \int_0^T u_n(\theta) d\theta + \qquad (2.13)$$

$$+\Phi_n(t) \int_0^l f\left(y, \int_0^T \int_0^l H(\theta, z) \sum_{k=1}^{\infty} u_k(\theta) \cdot \vartheta_k(z) dz d\theta\right) \vartheta_n(y) dy, \; t \in \Omega_T,$$

где

$$\Re_n(t,s)=\begin{cases} -\dfrac{\alpha_2+\alpha_3 t}{\omega}\tau_n\mu(s)\cdot\Big(\nu_{11}(s)-s\cdot\nu_{21}(s)\Big)+ \\ +frac\alpha_3+\alpha_1 t\omega\tau_n\mu(s)\cdot\Big(\nu_{12}(s)-s\cdot\nu_{22}(s)\Big)- \\ -\tau_n(t-s)\cdot\mu(s),\ 0\le s<t, \\ -\dfrac{\alpha_2+\alpha_3 t}{\omega}\tau_n\mu(s)\cdot\Big(\nu_{11}(s)-s\cdot\nu_{21}(s)\Big)+ \\ +\dfrac{\alpha_3+\alpha_1 t}{\omega}\tau_n\mu(s)\cdot\Big(\nu_{12}(s)-s\cdot\nu_{22}(s)\Big), t<s\le T, \end{cases}$$

$$G_n(t)=-\frac{\alpha_2+\alpha_3 t}{\omega}\int\limits_0^T\Theta_1(t)\int\limits_0^t(t-s)\frac{p(s)}{1+\lambda_n^2}dsdt+$$

$$+\frac{\alpha_3+\alpha_1 t}{\omega}\int\limits_0^T\Theta_2(t)\int\limits_0^t(t-s)\frac{p(s)}{1+\lambda_n^2}dsdt+\int\limits_0^t(t-s)\frac{p(s)}{1+\lambda_n^2}ds,$$

$$\Phi_n(t)=-\frac{\alpha_2+\alpha_3 t}{2\omega}\int\limits_0^T\Theta_1(t)\int\limits_0^t\frac{(t-s)\cdot s^2}{1+\lambda_n^2}dsdt+$$

$$+\frac{\alpha_3+\alpha_1 t}{2\omega}\int\limits_0^T\Theta_2(t)\int\limits_0^t\frac{(t-s)\cdot s^2}{1+\lambda_n^2}dsdt+\frac{1}{2}\int\limits_0^t\frac{(t-s)\cdot s^2}{1+\lambda_n^2}ds.$$

3. Однозначная разрешимость ССНИУ

В пространстве $B_2(T)$ используем следующую норму

$$\Big\|u(t)\Big\|_{B_2(T)}=\sqrt{\sum_{n=1}^{\infty}\max_{t\in\Omega_T}\Big|u_n(t)\Big|^2}.$$

Для функции $g(x)\in L_2(\Omega_l)$ рассматривается норма

$$\Big\|g(x)\Big\|_{L_2(\Omega_l)}=\sqrt{\int\limits_0^l\Big|g(y)\Big|^2dy}.$$

Т е о р е м а 3.1. *Пусть выполняются: условие* (2.11) *и*
1). $\beta_1=\Big\|Q(t)\Big\|_{B_2(T)}<\infty$; $\beta_2=\max_{t\in\Omega_T}\Big\|\Re(t,s)\Big\|_{B_2(T)}+\Big\|G(t)\Big\|_{B_2(T)}<\infty$;
2). $\beta_3=\Big\|\Phi(t)\Big\|_{B_2(T)}<\infty$; $M=\Big\|f(x,\gamma)\Big\|_{L_2(\Omega_l)}<\infty$;
3). $\Big|f(x,\gamma_1)-f(x,\gamma_2)\Big|\le L(x)\Big|\gamma_1-\gamma_2\Big|$, $\delta_1=\Big\|L(x)\Big\|_{L_2(\Omega_l)}<\infty$;
4). $\delta_2=\int\limits_0^T\int\limits_0^l\Big|H(t,x)\Big|dxdt<\infty$; $\rho=\beta_2T+\beta_3\delta_1\delta_2\delta_3<1$,
где $\delta_3=\max_{x\in\Omega_l}\sqrt{\sum\limits_{n=1}^{\infty}\Big|\vartheta_n(x)\Big|^2}<\infty$.

Тогда ССНИУ (2.13) *имеет единственное решение в пространстве* $B_2(T)$. *Это решение может быть найдено методом последовательных приближений:*

$$u_n^0(t) = Q_n(t),\ u_n^{j+1}(t) = \Im_1(t; u_n^j),\ j = 0, 1, 2, \ldots,\ t \in \Omega_T. \tag{3.1}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Рассмотрим шар $S\Big(u_n^0; r_1\Big)$ с радиусом $r_1 = \beta_1 + \frac{\beta_3 M}{1-\beta_2 T}$. Для нулевого приближения, в силу первого условия теоремы, из (3.1) имеем

$$\left\| u^0(t) \right\|_{B_2(T)} \leq \beta_1. \tag{3.2}$$

Для первой разности, в силу условий теоремы, из (3.1) с учетом (3.2) получим оценку

$$\sqrt{\sum_{n=1}^{\infty} \left| u_n^1(t) - u_n^0(t) \right|^2} \leq \sqrt{\sum_{n=1}^{\infty} \left| \int_0^T \Re_n(t,s) \cdot Q_n(s) ds \right|^2} +$$

$$+ \sqrt{\sum_{n=1}^{\infty} \Big| G_n(t) \Big|^2} \sqrt{\sum_{n=1}^{\infty} \left| \int_0^T Q_n(t) dt \right|^2} + \sqrt{\sum_{n=1}^{\infty} \left[\Big| \Phi_n(t) \Big| \int_0^l \left| f\left(y, \gamma^0\right) \vartheta_n(y) \right| dy \right]^2}$$

или

$$\left\| u^1(t) - u^0(t) \right\|_{B_2(T)} \leq \beta_1 \beta_2 T + \beta_3 \sqrt{\sum_{n=1}^{\infty} \left[\int_0^l \left| f\left(y, \gamma^0\right) \right| \cdot \left| \vartheta_n(y) \right| dy \right]^2} \leq \tag{3.3}$$

$$\leq \beta_1 \beta_2 T + \beta_3 \left\| f(x, \gamma^0) \right\|_{L_2(\Omega_l)} = \beta_1 \beta_2 T + \beta_3 M,$$

где $\gamma^0 = \int\limits_0^T \int\limits_0^l H(\theta, z) \sum\limits_{k=1}^{\infty} u_k^0(\theta) \cdot \vartheta_k(z) dz d\theta$.

Для разности $u_n^2(t) - u_n^0(t)$, в силу условий теоремы, из (3.1) с учетом (3.3) получим оценку

$$\sqrt{\sum_{n=1}^{\infty} \left| u_n^2(t) - u_n^0(t) \right|^2} \leq \sqrt{\sum_{n=1}^{\infty} \left[\int_0^T \left| \Re_n(t,s) \right| \cdot \left| u_n^1(s) - u_n^0(s) \right| ds \right]^2} +$$

$$+ \sqrt{\sum_{n=1}^{\infty} \Big| G_n(t) \Big|^2} \sqrt{\sum_{n=1}^{\infty} \left[\int_0^T \left| u_n^1(t) - u_n^0(t) \right| dt \right]^2} +$$

$$+ \sqrt{\sum_{n=1}^{\infty} \Big| \Phi_n(t) \Big|^2} \sqrt{\sum_{n=1}^{\infty} \left[\int_0^l \left| f\left(y, \gamma^1\right) \cdot \vartheta_n(y) \right| dy \right]^2}$$

или

$$\left\| u^2(t) - u^0(t) \right\|_{B_2(T)} \leq \Big(\beta_1 \beta_2 T + \beta_3 M \Big) \cdot \beta_2 T + \tag{3.4}$$

$$+ \beta_3 \sqrt{\sum_{n=1}^{\infty} \left[\int_0^l \left| f\left(y, \gamma^1\right) \right| \cdot \left| \vartheta_n(y) \right| dy \right]^2} \leq$$

$$\leq \Big(\beta_1\beta_2 T+\beta_3 M\Big)\cdot\beta_2 T+\beta_3 M=\beta_1\Big(\beta_2 T\Big)^2+\Big(\beta_2 T+1\Big)\cdot\beta_3 M,$$

где $\gamma^1=\int\limits_0^T\int\limits_0^l H(t,z)\sum\limits_{k=1}^{\infty}u_k^1(t)\cdot\vartheta_k(z)dzdt$.

Далее из (3.1) с учетом (3.4) имеем

$$\left\|u^3(t)-u^0(t)\right\|_{B_2(T)}\leq\Big(\beta_1\beta_2 T+\beta_3 M\Big)\cdot\Big(\beta_2 T\Big)^2+\Big(\beta_2 T+1\Big)\cdot\beta_3 M= \tag{3.5}$$

$$=\beta_1\Big(\beta_2 T\Big)^3+\left(\Big(\beta_2 T\Big)^2+\beta_2 T+1\right)\cdot\beta_3 M.$$

Продолжая этот процесс, аналогично (3.5) получаем

$$\left\|u^j(t)-u^0(t)\right\|_{B_2(T)}\leq\beta_1\Big(\beta_2 T\Big)^j+ \tag{3.6}$$

$$+\left(\Big(\beta_2 T\Big)^{j-1}+\Big(\beta_2 T\Big)^{j-2}+\cdots+\Big(\beta_2 T\Big)^2+\beta_2 T+1\right)\cdot\beta_3 M.$$

Из последнего условия теоремы следует, что $\beta_2 T<1$. Поэтому из (3.6), переходя к пределу при $j\to\infty$

$$\lim_{j\to\infty}\left\|u^j(t)-u^0(t)\right\|_{B_2(T)}\leq\lim_{j\to\infty}\left[\beta_1\Big(\beta_2 T\Big)^j+\right.$$

$$\left.+\left(\Big(\beta_2 T\Big)^{j-1}+\Big(\beta_2 T\Big)^{j-2}+\cdots+\Big(\beta_2 T\Big)^2+\beta_2 T+1\right)\cdot\beta_3 M\right],$$

имеем

$$\left\|u^\infty(t)-u^0(t)\right\|_{B_2(T)}<\beta_1+\frac{1}{1-\beta_2 T}\cdot\beta_3 M=r_1<\infty. \tag{3.7}$$

Из (3.7) следует, что оператор в правой части (2.13) отображает шар $S\Big(u_n^0;r_1\Big)$ в себя.

Теперь для произвольной разности $u_n^{j+1}(t)-u_n^j(t)$ получим следующую оценку

$$\sqrt{\sum_{n=1}^{\infty}\left|u_n^{j+1}(t)-u_n^j(t)\right|^2}\leq\sqrt{\sum_{n=1}^{\infty}\left[\int\limits_0^T\left|\Re_n(t,s)\right|\cdot\left|u_n^j(s)-u_n^{j-1}(s)\right|ds\right]^2}+$$

$$+\sqrt{\sum_{n=1}^{\infty}\Big|G_n(t)\Big|^2}\sqrt{\sum_{n=1}^{\infty}\left[\int\limits_0^T\left|u_n^j(t)-u_n^{j-1}(t)\right|dt\right]^2}+\sqrt{\sum_{n=1}^{\infty}\Big|\Phi_n(t)\Big|^2}\times$$

$$\times\sqrt{\sum_{n=1}^{\infty}\left[\int\limits_0^l L(y)\int\limits_0^T\int\limits_0^l|H(\theta,z)|\sum_{k=1}^{\infty}\left|u_k^j(\theta)-u_k^{j-1}(\theta)\right|\cdot\left|\vartheta_k(z)\right|dzd\theta\cdot\left|\vartheta_n(y)\right|dy\right]^2}$$

или

$$\left\|u^{j+1}(t)-u^j(t)\right\|_{B_2(T)}\leq \tag{3.8}$$

$$\leq\left\{\beta_2 T+\beta_3\delta_2\delta_3\sqrt{\sum_{n=1}^{\infty}\left[\int\limits_0^l L(y)\cdot\left|\vartheta_n(y)\right|dy\right]^2}\right\}\cdot\left\|u^j(t)-u^{j-1}(t)\right\|_{B_2(T)}\leq$$

$$\leq \rho \left\| u^j(t) - u^{j-1}(t) \right\|_{B_2(T)}.$$

В силу последнего условия теоремы, из оценки (3.8) следует, что оператор в правой части (2.13) является сжимающим. Из оценок (3.7) и (3.8) заключаем, что для оператора (2.13) существует единственная неподвижная точка (см. [20], стр. 389–401). Следовательно, в пространстве $B_2(T)$ интегральное уравнение (2.13) имеет единственное решение $u(t) \in B_2(T)$.

Кроме того, справедлива оценка скорости сходимости

$$\left\| u^{j+1}(t) - u(t) \right\|_{B_2(T)} \leq \Big(\beta_1 \beta_2 T + \beta_3 M \Big) \frac{\rho^{j+1}}{1-\rho}.$$

Теорема доказана.

Дифференцируя ССНИУ (2.13) два раза по t и учитывая

$$Q_n''(t) = 0, \; \frac{\partial^2}{\partial t^2} R_n(t,s) = 0,$$

имеем

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2} u_n(t) = \Im_2(t; u_n) \equiv G_n''(t) \int_0^T u_n(\theta) d\theta + \tag{3.9}$$

$$+\Phi_n''(t) \int_0^l f \left(y, \int_0^T \int_0^l H(\theta, z) \sum_{k=1}^{\infty} u_k(\theta) \cdot \vartheta_k(z) dz d\theta \right) \vartheta_n(y) dy, \; t \in \Omega_T,$$

где $G_n''(t) \in C\Big(\Omega_T\Big)$, $\Phi_n''(t) \in C\Big(\Omega_T\Big)$.

Т е о р е м а 3.2. *Пусть выполняются условия теоремы* 3.1. *и* $N_1 = \left\| G''(t) \right\|_{B_2(T)} < \infty$; $N_2 = \left\| \Phi''(t) \right\|_{B_2(T)} < \infty$.
Тогда $\dfrac{\partial^2}{\partial t^2} u(t) \in B_2(T)$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Для оператора в правой части (3.9) рассмотрим следующий итерационный процесс:

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2} u_n^0(t) = 0, \; \frac{\partial^2}{\partial t^2} u_n^{j+1}(t) = \Im_2(t; u_n^j), \; j = 0, 1, 2, \ldots, \; t \in \Omega_T. \tag{3.10}$$

Рассмотрим шар $S\Big(\frac{\partial^2}{\partial t^2} u_n^0; r_2\Big)$ с радиусом $r_2 = N_1 T \left(\beta_1 + \frac{1}{1-\beta_2 T} \right) + N_2 M$. Для первой разности, в силу условий теоремы и оценки (3.2), из (3.10) получаем оценку

$$\sqrt{\sum_{n=1}^{\infty} \left| \frac{\partial^2}{\partial t^2} u_n^1(t) - \frac{\partial^2}{\partial t^2} u_n^0(t) \right|^2} \leq \sqrt{\sum_{n=1}^{\infty} \left| G_n''(t) \right|^2} \sqrt{\sum_{n=1}^{\infty} \left[\int_0^T \left| u_n^0(t) - u_n^0(t) \right| dt \right]^2} +$$

$$+ \sqrt{\sum_{n=1}^{\infty} \left[\left| \Phi_n''(t) \right| \int_0^l \left| f(y, 0) \, \vartheta_n(y) \right| dy \right]^2}$$

или

$$\left\| \frac{\partial^2}{\partial t^2} u^1(t) - \frac{\partial^2}{\partial t^2} u^0(t) \right\|_{B_2(T)} \leq N_1 \beta_1 T + N_1 \sqrt{\sum_{n=1}^{\infty} \left[\int_0^l \left| f(y, 0) \right| \cdot \left| \vartheta_n(y) \right| dy \right]^2} \leq$$

$$\leq N_1\beta_1 T + N_2\Big\|f(x,\gamma)\Big\|_{L_2(\Omega_l)} = N_1\beta_1 T + N_2 M.$$

Для разности $\frac{\partial^2}{\partial t^2}u_n^2(t)-\frac{\partial^2}{\partial t^2}u_n^0(t)$, в силу условий теоремы и оценки (3.3), из (3.10) получим оценку

$$\sqrt{\sum_{n=1}^{\infty}\left|\frac{\partial^2}{\partial t^2}u_n^2(t)-\frac{\partial^2}{\partial t^2}u_n^0(t)\right|^2} \leq \sqrt{\sum_{n=1}^{\infty}\Big|G_n''(t)\Big|^2}\sqrt{\sum_{n=1}^{\infty}\left[\int\limits_0^T\left|u_n^1(t)-u_n^0(t)\right|dt\right]^2}+$$

$$+\sqrt{\sum_{n=1}^{\infty}\Big|\Phi_n''(t)\Big|^2}\sqrt{\sum_{n=1}^{\infty}\left[\int\limits_0^l\left|f\left(y,\gamma^1\right)\cdot\vartheta_n(y)\right|dy\right]^2}$$

или

$$\left\|\frac{\partial^2}{\partial t^2}u^2(t)-\frac{\partial^2}{\partial t^2}u^0(t)\right\|_{B_2(T)} \leq$$

$$\leq N_1\Big(\beta_1\beta_2 T+\beta_3 M\Big)T+N_2\sqrt{\sum_{n=1}^{\infty}\left[\int\limits_0^l\left|f\left(y,\gamma^1\right)\right|\cdot\left|\vartheta_n(y)\right|dy\right]^2} \leq$$

$$\leq \Big(\beta_1\beta_2 T+\beta_3 M\Big)\cdot N_1 T+N_2 M.$$

Далее из (3.10) с учетом (3.4) получим

$$\left\|\frac{\partial^2}{\partial t^2}u^3(t)-\frac{\partial^2}{\partial t^2}u^0(t)\right\|_{B_2(T)} \leq \tag{3.11}$$

$$\leq N_1 T\left(\beta_1\Big(\beta_2 T\Big)^2+\Big(\beta_2 T+1\Big)\cdot\beta_3 M\right)+N_2 M.$$

Продолжая этот процесс, аналогично (3.11) имеем

$$\left\|\frac{\partial^2}{\partial t^2}u^j(t)-\frac{\partial^2}{\partial t^2}u^0(t)\right\|_{B_2(T)} \leq N_1 T\left[\beta_1\Big(\beta_2 T\Big)^j+\right. \tag{3.12}$$

$$\left.+\left(\Big(\beta_2 T\Big)^{j-1}+\Big(\beta_2 T\Big)^{j-2}+\cdots+\Big(\beta_2 T\Big)^2+\beta_2 T+1\right)\cdot\beta_3 M\right]+N_2 M.$$

Из последнего условия теоремы 3.1. следует, что $\beta_2 T<1$. Поэтому из (3.12), переходя к пределу при $j\to\infty$

$$\lim_{j\to\infty}\left\|\frac{\partial^2}{\partial t^2}u^j(t)-\frac{\partial^2}{\partial t^2}u^0(t)\right\|_{B_2(T)} \leq \lim_{j\to\infty}N_1 T\left[\beta_1\Big(\beta_2 T\Big)^j+\right.$$

$$\left.+\left(\Big(\beta_2 T\Big)^{j-1}+\Big(\beta_2 T\Big)^{j-2}+\cdots+\Big(\beta_2 T\Big)^2+\beta_2 T+1\right)\cdot\beta_3 M\right]+N_2 M,$$

имеем

$$\left\|\frac{\partial^2}{\partial t^2}u^{\infty}(t)-\frac{\partial^2}{\partial t^2}u^0(t)\right\|_{B_2(T)} < N_1 T\cdot\left(\beta_1+\frac{1}{1-\beta_2 T}\right)+N_2 M=r_2<\infty. \tag{3.13}$$

Из (3.13) следует, что оператор в правой части (3.9) отображает шар $S\Big(\frac{\partial^2}{\partial t^2}u_n^0;r_2\Big)$ в себя. Следовательно, $\frac{\partial^2}{\partial t^2}u(t)\in B_2(T)$. Теорема доказана.

4. Разрешимость смешанной задачи (1.1) – (1.4)

Подставляя (2.13) в ряд (2.1), получаем формальное решение смешанной задачи (1.1) – (1.4):

$$U(t,x)=\sum_{n=1}^{\infty}u_n(t)\cdot\vartheta_n(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\Im_1\Big(t;u_n\Big)\cdot\vartheta_n(x)\equiv \tag{4.1}$$

$$\equiv\sum_{n=1}^{\infty}\vartheta_n(x)\Bigg\{Q_n(t)+\int_0^T\Re_n(t,s)\cdot u_n(s)ds+G_n(t)\int_0^T u_n(\theta)d\theta+$$

$$+\Phi_n(t)\int_0^l f\left(y,\int_0^T\int_0^l H(\theta,z)\sum_{k=1}^{\infty}u_k(\theta)\cdot\vartheta_k(z)dzd\theta\right)\vartheta_n(y)dy\Bigg\}.$$

Подставляем также (3.1) в ряд (2.1):

$$U^{j+1}(t,x)=\sum_{n=1}^{\infty}u_n^{j+1}(t)\cdot\vartheta_n(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\Im_1\Big(t;u_n^j\Big)\cdot\vartheta_n(x)\equiv \tag{4.2}$$

$$\equiv\sum_{n=1}^{\infty}\vartheta_n(x)\Bigg\{Q_n(t)+\int_0^T\Re_n(t,s)\cdot u_n^j(s)ds+G_n(t)\int_0^T u_n^j(\theta)d\theta+$$

$$+\Phi_n(t)\int_0^l f\left(y,\int_0^T\int_0^l H(\theta,z)\sum_{k=1}^{\infty}u_k^j(\theta)\cdot\vartheta_k(z)dzd\theta\right)\vartheta_n(y)dy\Bigg\}.$$

Теорема 4.1. *Пусть выполняются условия теоремы* 3.2. *и* $u(t)\in B_2(T)$ – *решение ССНИУ* (2.13). *Тогда последовательность функций* (4.2) *сходится к функции* (4.1) *при* $j\to\infty$.

Доказательство. Так как $u(t)\in B_2(T)$ – решение ССНИУ (2.13), тогда мы положим, что

$$\left\|u^j(t,\mu)-u(t,\mu)\right\|_{B_2(T)}\le\frac{\varepsilon}{\delta_3},$$

где $0<\varepsilon$ – малый параметр. Тогда для разности функций (4.2) и (4.1) с применением неравенства Гельдера получаем

$$\left|U^j(t,x)-U(t,x)\right|\le\sum_{n=1}^{\infty}\left|u_n^j(t)-u_n(t)\right|\cdot\left|\vartheta_n(x)\right|\le$$

$$\le\delta_3\cdot\left\|u^j(t)-u(t)\right\|_{B_2(T)}\le\delta_3\cdot\frac{\varepsilon}{\delta_3}=\varepsilon.$$

Так как для оператора (3.9) справедливо $\dfrac{\partial^2}{\partial t^2}u(t)\in B_2(T)$, то с применением неравенства Гельдера имеем оценку

$$\left|\frac{\partial^2}{\partial t^2}U(t,x)\right|\le\sum_{n=1}^{\infty}\left|\frac{\partial^2}{\partial t^2}u_n(t)\right|\cdot\left|\vartheta_n(x)\right|\le\delta_3\cdot\left\|\frac{\partial^2}{\partial t^2}u(t)\right\|_{B_2(T)}<\infty.$$

Дифференцируя (4.1) два раза по x и с учетом (2.3) получим

$$\frac{\partial^2 U(t,x)}{\partial x^2} = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(t) \cdot \frac{\partial^2 \vartheta_n(x)}{\partial x^2} = -\sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n^2 \cdot u_n(t) \cdot \vartheta_n(x). \tag{4.3}$$

Мы покажем, что ряд (4.3) сходится абсолютно и равномерно. Два раза интегрируя по частям следующий интеграл

$$u_n(t) = \int_0^l U(t,y)\vartheta_n(y)dy,$$

получаем

$$u_n(t) = -\frac{1}{\lambda_n^2}\int_0^l \frac{\partial^2 U(t,y)}{\partial y^2}\vartheta_n(y)dy. \tag{4.4}$$

Подставляя (4.4) в (4.3) и используя неравенства Гельдера и неравенства Бесселя, имеем оценку

$$\left| -\sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n^2 \cdot u_n(t) \cdot \vartheta_n(x) \right| = \left| \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^l \frac{\partial^2 U(t,y)}{\partial y^2}\vartheta_n(y)dy \cdot \vartheta_n(x) \right| \leq$$

$$\leq \sqrt{\sum_{n=1}^{\infty} \left|\vartheta_n(x)\right|^2} \cdot \sqrt{\sum_{n=1}^{\infty} \left[\int_0^l \left| \frac{\partial^2 U(t,y)}{\partial y^2} \right| \cdot \left|\vartheta_n(y)\right| dy \right]^2} \leq$$

$$\leq \delta_3 \cdot \left\| \frac{\partial^2 U(t,x)}{\partial x^2} \right\|_{L_2(\Omega_l)} < \infty.$$

Это и завершает доказательство теоремы.

Список литературы

1. Алгазин С. Д., Кийко И. А., *Флаттер пластин и оболочек*, Наука, М., 2006, 248 с.

2. Замышляева А. А., “Математические модели соболевского типа высокого порядка”, *Вестник Южно-УралГУ. Серия: Матем. моделир. и программирование*, **7**:2 (2014), 5 – 28.

3. Benney D. J., “Interactions of permanent waves of finite amplitude”, *Journ. Math. Phys.*, **43** (1964), 309 – 313.

4. Абзалимов Р. Р., Саляхова Е. В., “Разностно-аналитический метод вычисления собственных значений для уравнений четвертого порядка с разделенными краевыми условиями”, *Известия вузов. Математика*, 2008, № 11, 3 – 11.

5. Ахтямов А. М., Аюпова А. Р., “О решении задачи диагностирования дефектов в виде малой полости в стержне”, *Журн. СВМО*, **12**:3 (2010), 37 – 42.

6. Джураев Т. Д., Логинов Б. В., Малюгина И. А., “Вычисления собственных значений и собственных функций некоторых дифференциальных операторов третьего и четвертого порядков”, *Дифференц. уравнения мат. физики и их приложения*, 1989, 24 – 36.

7. Турбин М. В., “Исследование начально-краевой задачи для модели движения жидкости Гершель-Балкли”, *Вестник Воронежского государственного университета. Серия: Физика. Математика*, 2013, № 2, 246 – 257.

8. Шабров С. А., “Об одной математической модели малых деформаций стержневой системы с внутренними особенностями”, *Вестник Воронежского государственного университета. Серия: Физика. Математика*, 2013, № 1, 232 – 250.

9. Шабров С. А., “Об оценках функции влияния одной математической модели четвертого порядка”, *Вестник Воронежского государственного университета. Серия: Физика. Математика*, 2015, № 2, 168 – 179.

10. Юлдашев Т. К., “О смешанной задаче для нелинейного уравнения в частных производных четвертого порядка с отражающим отклонением”, *Вестник Южно-УралГУ. Серия: Математика. Механика. Физика*, 2011, № 10 (227), 40 – 48.

11. Юлдашев Т. К., “О смешанной задаче для нелинейного дифференциального уравнения, содержащего квадрат гиперболического оператора и нелинейное отражающее отклонение”, *Вестник ТомГУ. Математика и Механика*, **14**:2 (2011), 59 – 69.

12. Юлдашев Т. К., “Смешанная задача для нелинейного дифференциального уравнения четвертого порядка с малым параметром при параболическом операторе”, *Журнал вычисл. математики и мат. физики*, **51**:9 (2011), 1703 – 1711.

13. Юлдашев Т. К., “О смешанной задаче для одного нелинейного интегро-дифференциального уравнения в частных производных четвертого порядка”, *Журн. СВМО*, **14**:2 (2012), 137 – 142.

14. Юлдашев Т. К., “Об устойчивости по малым параметрам решения смешанной задачи для нелинейного псевдогиперболического уравнения”, *Журн. СВМО*, **15**:1 (2013), 134 – 142.

15. Юлдашев Т. К., “Об одной обратной задаче для линейного интегро-дифференциального уравнения Фредгольма в частных производных четвертого порядка”, *Вестник ВоронежГУ. Серия: Физика. Математика*, 2015, № 2, 180 – 189.

16. Yuldashev T. K., “A double inverse problem for a partial Fredholm integro-differential equation of fourth order”, *Proc. of Jangjeon Math. Society*, **18**:3 (2015), 417 – 426.

17. Уизем Дж., *Линейные и нелинейные волны*, Мир, М., 1977, 622 с.

18. Гордезиани Д. Г., Авалишвили Г. А., “Решения нелокальных задач для одномерных колебаний среды”, *Матем. моделирование*, **12**:1 (2000), 94 – 103.

19. Иванчов Н. И., “Краевые задачи для параболического уравнения с интегральным условием”, *Дифференц. уравнения*, **40**:4 (2004), 547 – 564.

20. Треногин В. А., *Функциональный анализ*, Наука, М., 1980, 495 с.

Дата поступления 16.04.2016

On solvability of a Boussinesq type integro-differential equation with nonlocal integral conditions

© **T. K. Yuldashev**[3] **K. H. Shabadikov**[4]

Abstract. This article considers the questions of one value solvability of the nonlocal boundary value problem for a nonlinear Boussinesq type fourth-order integro-differential equation. The Fourier method of separation of variables is employed. The countable system of nonlinear integral equations (CSNIE) is obtained. To prove the theorem of one-value solvability of CSNIE the method of successive approximations is used. The convergence of the Fourier series to an unknown function of considering nonlocal boundary value problem is shown. This paper advances the theory of Boussinesq type differential equations.

Key Words: Boundary value problem, nonlinear equation, Boussinesq type equation, nonlocal integral conditions, one valued solvability

[3] Associate professor of Higher Mathematics Chair, M. F. Reshetnev Siberian State Aerospace University, Krasnoyarsk, tursun.k.yuldashev@gmail.com

[4] Associate professor of Mathematical Analyses and Differential Equations Chair, Fergana State University, Fergana, Uzbekistan