

УДК 517.9

# Графовый критерий топологической эквивалентности $\Omega$ -устойчивых потоков без периодических траекторий на поверхностях и эффективный алгоритм для его применения

© В. Е. Круглов<sup>1</sup>, Д. С. Малышев<sup>2</sup>, О. В. Починка<sup>3</sup>

**Аннотация.** Изучение динамики потока на поверхностях путем разбиения фазового пространства на ячейки с одинаковым предельным поведением траекторий внутри ячейки восходит к классическим работам А.А. Андронова, Л.С. Понтрягина, Е.А. Леонтович, А. Г. Майера. Типы ячеек, которых конечное число, и их примыкание друг к другу полностью определяют класс топологической эквивалентности потока с конечным числом особых траекторий. Если в каждой ячейке грубого потока без периодических орбит выбрать по одной траектории, то ячейки распадаются на так называемые треугольные области, которые имеют один единственный тип. Комбинаторное описание такого разбиения приводит к трехцветному графу А.А. Ошемкова и В.В. Шарко, вершины которого соответствуют треугольным областям, а ребра — связывающим их сепаратрисам. Ими доказано, что два таких потока топологически эквивалентны тогда и только тогда, когда их трехцветные графы изоморфны и описан алгоритм распознавания трехцветных графов. Однако, построенный алгоритм не является эффективным с точки зрения теории графов. В настоящей работе динамика  $\Omega$ -устойчивых потоков без периодических траекторий на поверхностях описана на языке четырехцветных графов и приведен эффективный алгоритм распознавания таких графов.

**Ключевые слова:** многоцветный граф, топологический инвариант,  $\Omega$ -устойчивый поток, эффективный алгоритм

## 1. Введение и формулировка результатов

Традиционный подход к качественному изучению динамики потоков с конечным числом особых траекторий на поверхностях состоит в выделении на несущем многообразии областей с предсказуемым поведением траекторий — *ячеек*. Такой взгляд на непрерывные динамические системы восходит к классической работе А.А. Андронова и Л.С. Понтрягина [1] 1937 года, в которой они рассмотрели систему дифференциальных уравнений

$$\dot{x} = v(x) \quad (*)$$

где  $v(x)$  —  $C^1$ -векторное поле, заданное в круге на плоскости, граница которого является кривой без контакта, и нашли критерий грубости системы (\*).

В работах Е.А. Леонтович-Андроновой и А.Г. Майера [7], [8] рассматривался более общий класс динамических систем и их классификация также была основана на идеях о выделении множества специальных траекторий, относительное положение которых (схема Леонтович-Майера) полностью определяет качественную структуру разбиения фазового пространства динамической системы на траектории. Основной трудностью в обобщении этого результата на случай произвольных ориентируемых поверхностей положительного рода является возможность нового типа движения — незамкнутая рекуррентная траектория. Отсутствие таких траекторий для грубых потоков без особенностей на 2-торе была

<sup>1</sup> Студент ННГУ им. Н.И. Лобачевского; kruglovslava21@mail.ru

<sup>2</sup> Профессор кафедры прикладной математики и информатики НИУ ВШЭ-НН, профессор кафедры алгебры, геометрии и дискретной математики ННГУ; dsmalyshev@rambler.ru

<sup>3</sup> Профессор кафедры фундаментальной математики НИУ ВШЭ-НН; olga-pochinka@yandex.ru

доказана А.Г. Майером [9] в 1939 году. В 1971 в работе [14] М. Пейшото обобщил схему Леонтович-Майера для структурно устойчивых потоков на произвольных поверхностях и получил топологическую классификацию таких потоков, изучив все допустимые ячейки для них и введя комбинаторный инвариант – *ориентированный граф*, обобщающий схему Леонтович-Майера. В 1976 году Д. Нейманом и Т. О’Брайеном [11] на произвольных поверхностях были рассмотрены так называемые *регулярные потоки* – потоки без нетривиальных периодических траекторий, которые включают в себя описанные выше потоки как частный случай. Они ввели полный топологический инвариант для регулярных потоков – *орбитальный комплекс*, который представляет из себя пространство орбит потока, оснащенное некоторой дополнительной информацией. В 1998 году А. А. Ошемков и В. В. Шарко [12] ввели новый инвариант для структурно устойчивых систем на поверхностях – *трехцветный граф* и описали алгоритм распознавания изоморфности таких графов, который, однако, не является *эффективным*, то есть время его работы не ограничено некоторым полиномом от длины задания входной информации<sup>4</sup>.

В настоящей работе рассматривается класс  $G$ , состоящий из  $\Omega$ -устойчивых потоков  $f^t$  без периодических траекторий на поверхностях  $S$ . Каждому потоку рассматриваемого класса ставится в соответствие четырехцветный граф и приводится эффективный алгоритм различения таких графов.

Из критерия  $\Omega$ -устойчивости [15] следует, что потоки класса  $G$  имеют неблуждающее множество, состоящее из конечного числа гиперболических неподвижных точек и не имеют *циклов*, то есть наборов неподвижных точек

$$x_1, \dots, x_k, x_{k+1} = x_1$$

со свойством

$$W_{x_i}^s \cap W_{x_{i+1}}^u \neq \emptyset, i = 1, \dots, k.$$

При этом в классе  $G$  системы могут быть как структурно устойчивыми, так и нет, определяется это отсутствием или наличием *связок* – сепаратрис, идущих из седла в седло. Условие  $\Omega$ -устойчивости влечет тот факт, что связки потока из класса  $G$  не образуют замкнутых кривых.

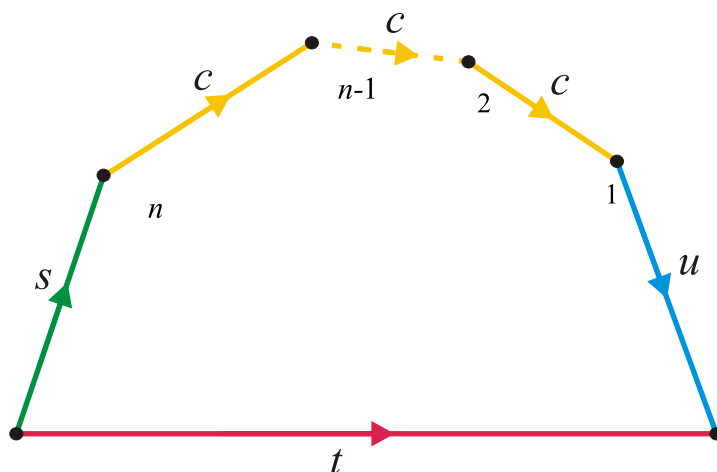
Обозначим через  $\Omega_{f^t}^0, \Omega_{f^t}^1, \Omega_{f^t}^2$  множество всех стоков, сёдел, источников потока  $f^t$  соответственно. Если множество  $\Omega_{f^t}^1$  пусто, то поток  $f^t$  имеет в точности две неподвижные точки: источник и сток, и одну ячейку, замыкание которой совпадает со всем несущим многообразием, которое в этом случае является сферой. Поэтому везде далее мы будем предполагать, что поток  $f^t$  имеет хотя бы одну седловую точку. Положим

$$\tilde{S} = S \setminus (\Omega_{f^t}^0 \cup W_{\Omega_{f^t}^1}^s \cup W_{\Omega_{f^t}^1}^u \cup \Omega_{f^t}^2).$$

Компонента связности множества  $\tilde{S}$  называется *ячейкой*. Согласно работе [6], в границу каждой ячейки  $J$  входит единственный источник  $\alpha$  и единственный сток  $\omega$ , а вся ячейка является объединением траекторий, идущих из  $\alpha$  в  $\omega$ . Выберем одну траекторию  $\theta_J$  в каждой ячейке  $J$  и будем называть её *t-кривой*. Положим

$$\mathcal{T} = \bigcup_{J \subset \tilde{S}} \theta_J, \bar{S} = \tilde{S} \setminus \mathcal{T}.$$

<sup>4</sup> В работе [4] доказано, что трехцветный граф с периодической подстановкой также является полным топологическим инвариантом для градиентно-подобных диффеоморфизмов на поверхностях, а в работе [3] приведен эффективный алгоритм распознавания таких графов.

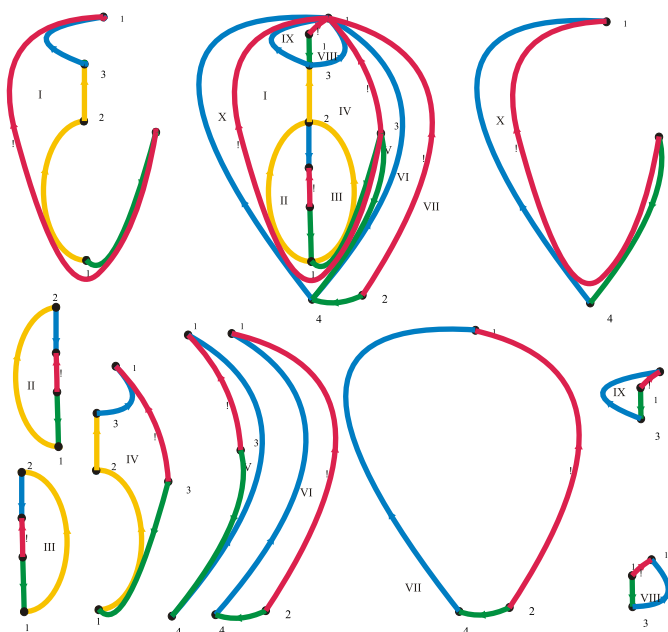


Р и с у н о к 1.1

Многоугольная область

Будем называть  $s$ -кривыми сепаратрисы, соединяющие седла (связки),  $u$ -кривыми – неустойчивые седловые сепаратрисы, имеющие в замыкании сток,  $s$ -кривыми – устойчивые седловые сепаратрисы, имеющие в замыкании источник. Будем закрашивать на рисунках  $t$ -кривые красным цветом,  $c$ -кривые – жёлтым цветом,  $u$ -кривые – синим цветом, а  $s$ -кривые – зелёным. Из работы [6] следует, что любая компонента связности  $\Delta$  множества  $\bar{S}$  (мы называем её *многоугольной областью*) гомеоморфна открытому диску и её граница состоит из одной  $t$ -кривой, одной  $u$ -кривой, одной  $s$ -кривой и конечного (возможно пустого) множества  $c$ -кривых (см. рис. 1.1).

На рисунке 1.2 изображён поток из класса  $G$  и все его многоугольные области.



Р и с у н о к 1.2

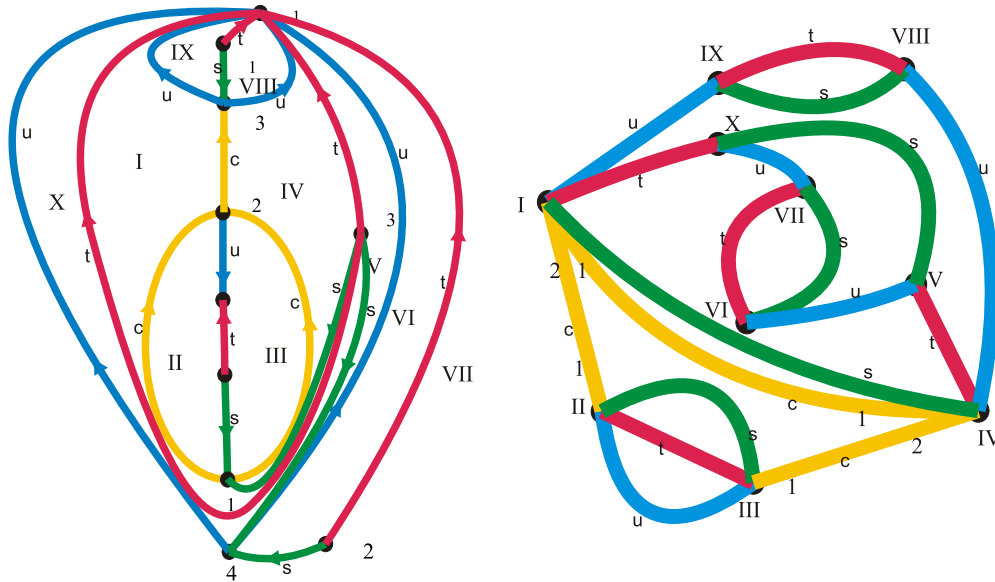
Пример потока из класса  $G$  (сверху в центре) и его многоугольные области

Обозначим через  $\Delta_{f^t}$  множество всех многоугольных областей потока  $f^t \in G$ . Поставим в соответствие потоку  $f^t \in G$  граф  $\Gamma_{f^t}$  следующим образом (см. рис. 1.3):

1) вершины графа  $\Gamma_{f^t}$  взаимно однозначно соответствуют многоугольным областям множества  $\Delta_{f^t}$ ;

2) две вершины графа инцидентны ребру цвета  $s$ ,  $t$ ,  $u$  или  $c$ , если соответствующие этим вершинам многоугольные области имеют общую  $s$ -,  $t$ -,  $u$ - или  $c$ -кривую, что устанавливает взаимно однозначное соответствие между ребрами графа и  $s$ -,  $t$ -,  $u$ - и  $c$ -кривыми;

3) при наличии более чем одного  $c$ -ребра, выходящего из некоторой вершины графа  $\Gamma_{ft}$ ,  $c$ -рёбра считаются упорядоченными согласно порядку появления  $c$ -кривых при обходе границы соответствующей области.



Р и с у н о к 1.3

Пример потока из класса  $G$  и его граф

Два многоцветных графа  $\Gamma_{ft}$  и  $\Gamma_{f^t}$ , соответствующие потокам  $f^t$  и  $f^{ft}$  из класса  $G$  соответственно, назовём *изоморфными*, если существует взаимно однозначное отображение вершин и ребер одного графа соответственно в вершины и ребра другого графа с сохранением цветности всех рёбер и нумерации  $c$ -рёбер.

**Т е о р е м а 1.1.** *Потоки из класса  $G$  топологически эквивалентны тогда и только тогда, когда их многоцветные графы изоморфны.*

Принято считать, что алгоритм решения задачи распознавания изоморфности графов (в каком-нибудь классе графов) является *эффективным*, если время его работы ограничено некоторым полиномом от длины задания входной информации. Такое определение эффективной разрешимости восходит к А. Кобхэму [2]. Стандартом труднорешаемости является NP-полнота задачи [5]. Сложностной статус задачи распознавания изоморфизма графов не известен до сих пор, т. е. в классе всех графов для этой задачи не доказана ни полиномиальная разрешимость, ни NP-полнота. Вместе с тем, многоцветные графы не являются графами общего вида, поскольку они вложимы в несущую поверхность, на которой заданы соответствующие им потоки класса  $G$ . Этот факт позволяет доказать следующую теорему.

**Т е о р е м а 1.2.** *Задача распознавания изоморфизма многоцветных графов, соответствующих потокам из класса  $G$ , может быть решена за полиномиальное время.*

*Благодарности.* Исследование выполнено при финансовой поддержке Программы фундаментальных исследований НИУ ВШЭ в 2016 году (проект № 98 «Топологические методы в динамике»), Российского фонда фундаментальных исследований (проекты № 15-01-03689-а, 16-31-60008-мол\_а\_дк), гранта Президента РФ МК-4819.2016.1, лаборатории алгоритмов и технологий анализа сетевых структур НИУ ВШЭ.

## 2. Доказательство классификационной Теоремы 1.1.

Приведем необходимый в доказательстве технический факт.

**Предложение 2.1.** ([13]) *Поток  $f^t$  из класса  $G$  в некоторой окрестности неподвижной точки  $p \in \Omega_{f^t}^i$  топологически сопряжен линейному потоку  $a^t(x, y) = ((\frac{x}{2})^t, (\frac{y}{2})^t)$  при  $i = 0$ ,  $b^t(x, y) = ((\frac{x}{2})^t, (2y)^t)$  при  $i = 1$  или  $c^t(x, y) = ((2x)^t, (2y)^t)$  при  $i = 2$ .*

Докажем, что потоки из класса  $G$  топологически эквивалентны тогда и только тогда, когда их многоцветные графы изоморфны.

Пусть  $f^t \in G$  ( $f^{t'} \in G$ ) и  $\Gamma_{f^t}$  ( $\Gamma_{f^{t'}}$ ) – многоцветный граф, построенный по потоку  $f^t$  ( $f^{t'}$ ). Обозначим через  $\pi_{f^t}$  – взаимно-однозначное соответствие между вершинами и многоугольными областями, а также между ребрами  $s$ -,  $t$ -,  $s$ -,  $c$ - кривыми графа  $\Gamma_{f^t}$  и потока  $f^t$  соответственно.

*Необходимость.* Пусть потоки  $f^t$  и  $f^{t'}$  топологически эквивалентны, т. е. существует гомеоморфизм  $h : S \rightarrow S$ , переводящий траектории  $f^t$  в траектории  $f^{t'}$ . Будем считать, не уменьшая общности, что множество многоугольных областей потока  $f^{t'}$  построено с помощью  $t$ -кривых  $\mathcal{T}' = h(\mathcal{T})$ . Тогда гомеоморфизм  $h$  переводит многоугольные области потока  $f^t$  в многоугольные области потока  $f^{t'}$  и искомый изоморфизм  $\xi : \Gamma_{f^t} \rightarrow \Gamma_{f^{t'}}$  определяется формулой  $\xi = \pi_{f^{t'}} h \pi_{f^t}^{-1}$ .

*Достаточность.* Пусть графы  $\Gamma_{f^t}$  и  $\Gamma_{f^{t'}}$  потоков  $f^t$  и  $f^{t'}$  изоморфны посредством  $\xi$ . Построим гомеоморфизм  $h : S \rightarrow S$ , осуществляющий топологическую эквивалентность потоков  $f^t$  и  $f^{t'}$ .

**Шаг 1.** Рассмотрим многоугольную область  $\Delta \in \Delta_{f^t}$ . Она содержит единственный источник  $\alpha$ , единственный сток  $\omega$  и  $n$  седловых точек  $\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_n, n \in \mathbb{N}$ , которые мы положим расположенными на границе в порядке номеров в направлении движения.

Рассмотрим область  $\Delta'$  для потока  $f^{t'}$ , для которой выполняется  $\Delta' = \pi_{f^{t'}}^{-1} \xi \pi_{f^t}$ . Изоморфизм  $\xi$  обеспечивает одинаковое количество одноцветных рёбер, исходящих из вершин графов, соответствующих областям  $\Delta$  и  $\Delta'$ , с сохранением нумерации  $c$ -рёбер, что влечёт у  $\Delta'$  наличие в границе ровно  $n - 1$  штук  $c$ -кривых, то есть как и у области  $\Delta$ , и расположенных в порядке номеров соответствующих им рёбер так, что  $c$ -кривая, соответствующая  $c$ -ребру с первым номером, лежит следом за  $u$ -кривой. Это означает наличие у области  $\Delta'$  ровно  $n$  штук седел  $\sigma'_1, \sigma'_2, \dots, \sigma'_n$ , расположенных на границе при движении в выбранном направлении; также это означает одинаковое расположение  $c$ -кривых в границе  $\Delta$  и в границе  $\Delta'$ .

**Шаг 2.** Построим гомеоморфизм  $H_\Delta : cl(\Delta) \rightarrow cl(\Delta')$ , переводящий траектории потока  $f^t$ , лежащие в  $cl(\Delta)$  в траектории потока  $f^{t'}$ , лежащие в  $cl(\Delta')$ , таким образом, чтобы для некоторой стороны  $\ell'$  области  $\Delta'$  выполнялось  $\ell' = \pi_{f^{t'}}^{-1} \xi \pi_{f^t}(\ell)$ , где  $\ell$  – некоторая сторона области  $\Delta$ .

Положим  $H_\Delta(\alpha) = \alpha'$ ,  $H_\Delta(\omega) = \omega'$ ,  $H_\Delta(\sigma_i) = \sigma'_i$ ,  $i = \overline{1, n}$ . Будем обозначать замыкание участка некоторой траектории, ограниченного точками  $a$  и  $b$ , через  $l_{a,b}$ , а через  $\lambda_{a,b}$  – его длину, при этом через  $l_{\alpha,\omega}$  ( $l_{\alpha',\omega'}$ ) всегда будем обозначать  $t$ -кривую, а через  $\lambda_{\alpha,\omega}$

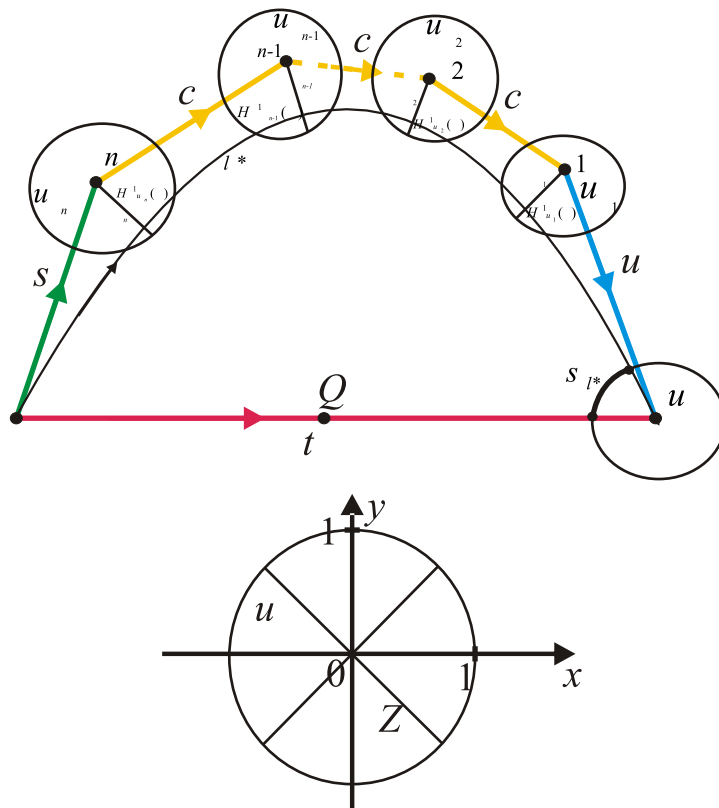
$(\lambda_{\alpha',\omega'})$  – её длину. Кроме того, замыкание некоторой оговорённой ранее секущей участка, ограниченного точками  $c$  и  $d$ , будем обозначать через  $m_{c,d}$ , а через  $\mu_{c,d}$  – его длину. Отметим, что  $l_{a,b} = l_{b,a}$ ,  $m_{c,d} = m_{d,c}$ ,  $\lambda_{a,b} = \lambda_{b,a}$ ,  $\mu_{c,d} = \mu_{d,c}$ . Для точки  $x$  такой, что  $x \in l_{\alpha,\omega}$ , положим  $H_{\Delta}(x) = x'$ , где  $x' \in l_{\alpha',\omega'}$  и  $\lambda_{\alpha',x'} = \frac{\lambda_{\alpha,x}\lambda_{\alpha',\omega'}}{\lambda_{\alpha,\omega}}$ . Аналогичным образом определим отображение  $H_{\Delta}$  на каждой стороне многоугольной области.

Определим точку  $Q \in l_{\alpha,\omega}$  ( $Q' \in l_{\alpha',\omega'}$ ) так, что  $\lambda_{\alpha,Q} = \lambda_{Q,\omega}$  ( $\lambda_{\alpha',Q'} = \lambda_{Q',\omega'}$ ). Из этого определения вытекает, что  $H_{\Delta}(Q) = Q'$ .

**Шаг 3.** Проведём секущие от неподвижных точек до точки  $Q$ , трансверсальные всем траекториям нашей области. Для этого совершим следующие действия.

Обозначим  $u_{\sigma_1}, u_{\sigma_2}, \dots, u_{\sigma_n}$  попарно не пересекающиеся окрестности точек  $\omega, \sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_n$  соответственно. На плоскости  $\mathbb{R}^2$  зададим поток  $b^t(x, y) = ((\frac{x}{2})^t, (2y)^t)$ , для которого  $(0, 0)$  – седловая точка. Пусть  $u = \{(x, y) : x^2 + y^2 < 1\}$ . На основании Предложения 2.1. у любого седла  $\sigma_i$  существует окрестность, внутри которой  $f^t$  сопряжён  $b^t|_u$ . Обозначим через  $u_{\sigma_1}, u_{\sigma_2}, \dots, u_{\sigma_n}$  попарно не пересекающиеся окрестности точек  $\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_n$  соответственно, такие, что  $f^t|_{u_{\sigma_i}}$ , где  $i = \overline{1, n}$ , сопряжён  $b^t|_u$  посредством гомеоморфизма  $H_{u_{\sigma_i}} : u_{\sigma_i} \rightarrow u$ . Пусть  $Z = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : |x| = |y|\} \cap u$ , представляющий из себя два пересекающихся в начале координат отрезка, пересекающих траектории  $b^t$  трансверсально. Положим  $\zeta$  – компонента связности  $Z \setminus \{(0, 0)\}$  такая, что  $H_{u_{\sigma_i}}^{-1}(\zeta) \subset \Delta$ . Для  $b^t$  отрезок  $\zeta$  трансверсален его траекториям, поэтому траекториям  $f^t$  будет трансверсально  $H_{u_{\sigma_i}}^{-1}(\zeta)$ . Выберем некоторую траекторию  $\ell^*$ , которая пересекает все  $H_{u_{\sigma_i}}^{-1}(\zeta)$  (см. рис. 2.1). Обозначим участки  $H_{u_{\sigma_i}}^{-1}(\zeta)$ , соединяющие  $\sigma_i$  и точку пересечения  $H_{u_{\sigma_i}}^{-1}(\zeta)$  и  $\ell^*$  через  $\zeta_i$ .

На плоскости  $\mathbb{R}^2$  зададим поток  $a^t(x, y) = ((\frac{1}{2}x)^t, (\frac{1}{2}y)^t)$ , для которого  $(0, 0)$  – сток. В силу Предложения 2.1. у стока  $\omega$  существует окрестность  $u_{\omega}$  и гомеоморфизм  $H_{u_{\omega}} : u_{\omega} \rightarrow u$  такие, что  $f^t|_{u_{\omega}}$  сопряжён  $a^t|_u$  посредством  $H_{u_{\omega}}$ . Поскольку  $\partial u$  трансверсальна всем траекториям  $a^t$ , получаем, что  $\partial u_{\omega}$ , гомеоморфная  $\partial u$  посредством  $H_{u_{\omega}}^{-1}$ , тоже трансверсальна траекториям  $f^t$ . Выберем некоторый участок  $\partial u_{\omega}$ , одним концом лежащий на  $l_{\alpha,\omega}$ , другим на  $\ell^*$ , и лежащий внутри нашей многоугольной области, назовём его  $S_{\theta\ell^*}$  (см. рис. 2.1).

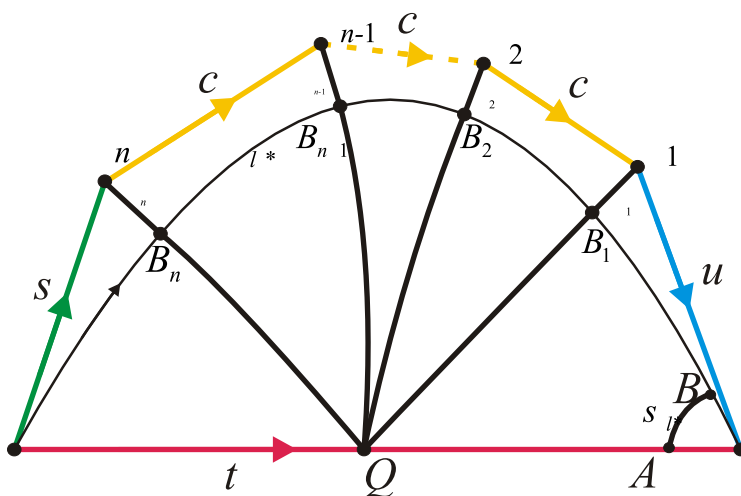


Р и с у н о к 2.1

Построение  $H_{u\sigma_i}^{-1}(\zeta)$  и  $S_{\theta\ell^*}$

Обозначим пересечение  $S_{\theta\ell^*}$  с  $l_{\alpha,\omega}$  через  $A$ , а с  $\ell^*$  – через  $B$ . Обозначим точку пересечения  $\ell^*$  с  $H_{u\sigma_i}^{-1}(\zeta)$  через  $B_i$ , где  $i = \overline{1, n}$ . Переобозначим в соответствии с оговорённым выше  $S_{\theta\ell^*}$  через  $m_{A,B}$  (смотрите Рис. 2.2).

Выберем  $t_0$  и  $t_i$  так, что  $A = f^{t_0}(Q)$  и  $B = f^{t_i}(B_i)$ . Определим секущую  $m_{B_i,Q}$ , трансверсально пересекающую траектории, формулой  $m_{B_i,Q} = \{f^{\frac{\mu_{A,x}}{\mu_{A,B}} t_i + (1 - \frac{\mu_{A,x}}{\mu_{A,B}}) t_0}(x)$ , где  $x \in m_{A,B}\}$ . При этом  $m_{B_i,Q}$  гладко соединяется с  $\zeta_i$ , поэтому  $m_{\sigma_i,Q}$  тоже трансверсально пересекает траектории (смотрите Рис. 2.2).



Р и с у н о к 2.2

Построение секущих

Так мы получили количество секущих, равное числу седловых точек наших многоугольных областей. Они не пересекаются между собой и своими концами имеют седловую точку и точку  $Q$  – середину  $t$ -кривой этой области.

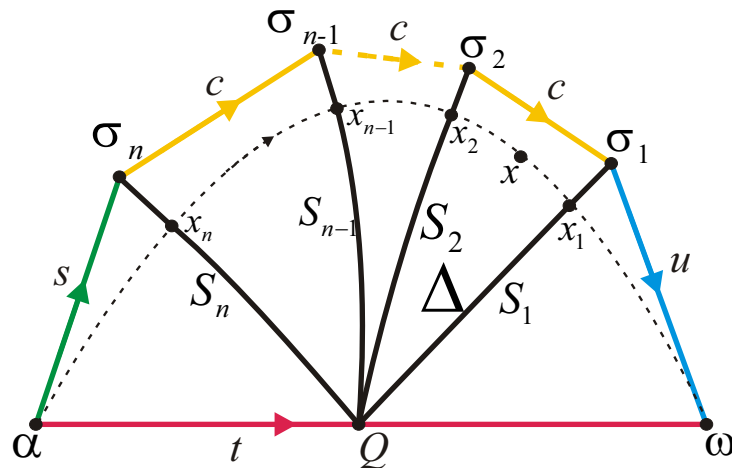
Повторим все действия шага 3 для потока  $f^t$ , помечая штрихами все обозначения, аналогичные сделанным для потока  $f^t$ .

**Шаг 4.** Доопределим  $H_\Delta$  внутри многоугольной области всюду.

Сначала распространим  $H_\Delta$  на секущую  $m_{\sigma_1, Q}$ . Положим для  $x \in m_{\sigma_1, Q}$ , что  $H_\Delta(x) = x'$ , если  $x' \in m_{\sigma'_1, Q'}$  и выполняется  $\mu_{Q', x'} = \frac{\mu_{Q, x} \lambda_{\sigma'_1, Q'}}{m_{\sigma_1, Q}}$ . Переобозначим наши секущие:  $m_{\sigma_i, Q} \equiv S_i$  ( $m_{\sigma'_i, Q'} \equiv S'_i$ ) (см. рис. 2.3).

Пусть  $x$  лежит в замкнутой области, ограниченной  $u$ -кривой,  $t$ -кривой и  $S_1$ . Выберем  $\tilde{t}_0$  так, что  $x = f^{\tilde{t}_0}(x_1)$ , где  $x_1 \in S_1$ . Точка  $x_1 = H_\Delta^{-1}(x'_1)$ , где  $x'_1 \in S'_1$ . Тогда для некоторого  $\tilde{t}'_0$  положим  $x' = H_\Delta(x)$ , где  $x' = f^{\tilde{t}'_0}(x'_1)$  и выполняется  $\lambda_{x', x'_1} = \frac{\lambda_{x, x_1} \lambda_{\omega', x'_1}}{\lambda_{\omega, x_1}}$  (см. рис. 2.3).

Пусть  $x$  лежит в замкнутой области, ограниченной  $s$ -кривой,  $S_i$  и  $S_{i+1}$ . Выберем  $\tilde{t}_i$  так, что  $x = f^{-\tilde{t}_i}(x_1)$ . Тогда положим  $x' = H_\Delta(x)$ , где  $x' = f^{-\tilde{t}'_i}(x'_1)$  для некоторого  $\tilde{t}'_i$  и выполняется  $\lambda_{x', x'} = \frac{\lambda_{x_i, x} \lambda_{x'_i, x'_{i+1}}}{\lambda_{x_i, x_{i+1}}}$ , где  $x_i \in S_i$  ( $x'_i \in S'_i$ ),  $x_{i+1} \in S_{i+1}$  ( $x'_{i+1} \in S'_{i+1}$ ), а для некоторых  $\bar{t}_i$  ( $\bar{t}'_i$ ) и  $\bar{t}_{i+1}$  ( $\bar{t}'_{i+1}$ ) имеет место  $x_i = f^{-\bar{t}_i}(x_1)$  ( $x'_i = f^{-\bar{t}'_i}(x'_1)$ ) и  $x_{i+1} = f^{-\bar{t}_{i+1}}(x_1)$  ( $x'_{i+1} = f^{-\bar{t}'_{i+1}}(x'_1)$ ) (см. рис. 2.3).



Р и с у н о к 2.3

Продолжение гомеоморфизма внутрь области  $\Delta$

Пусть  $x$  лежит в замкнутой области, ограниченной  $s$ -кривой,  $t$ -кривой и  $S_n$ . Выберем  $\tilde{t}_n$  так, что  $x = f^{-\tilde{t}_n}(x_1)$ . Тогда положим  $x' = H_\Delta(x)$ , где  $x' = f^{-\tilde{t}'_n}(x'_1)$  для некоторого  $\tilde{t}'_n$  и выполняется  $\lambda_{x', x'} = \frac{\lambda_{x_n, x} \lambda_{x'_n, \alpha'}}{\lambda_{x_n, \alpha}}$ , где  $x_n \in S_n$  ( $x'_n \in S'_n$ ) и для некоторого  $\bar{t}_n$  ( $\bar{t}'_n$ ) имеет место  $x_n = f^{-\bar{t}_n}(x_1)$  ( $x'_n = f^{-\bar{t}'_n}(x'_1)$ ) (см. рис. 2.3).

Итак, мы отобразили посредством  $H_\Delta$  многоугольную область  $\Delta$  на многоугольную область  $\Delta'$ .

**Шаг 5.** Мы строили  $H_\Delta$ , начиная с отображения сторон многоугольной области и затем непрерывно продолжая гомеоморфизм внутрь. Построив его на  $\Delta$ , получаем, что на некоторых сторонах смежных с ней многоугольных областей гомеоморфизм уже создан, однако это не создаёт проблемы для создания гомеоморфизмов, отображающих эти смежные области друг на друга, и равных  $H_\Delta$  на смежных с  $\Delta$  сторонах, потому что мы начали построение  $H_\Delta$  с его определения на сторонах  $\Delta$ . Поэтому повторяем шаги



со второго по четвёртый для многоугольных областей, связанных посредством  $\pi_{ft}^{-1}\xi\pi_{ft}$  и имеющих общие стороны с многоугольными областями, на которых гомеоморфизм уже задан.

Таким образом, определим гомеоморфизм  $h : S \rightarrow S$  так, что  $h(x) = H_{\Delta}(x)$ , если  $x \in cl(\Delta)$ .

### 3. Эффективный алгоритм распознавания изоморфности графов потоков класса $G$

В данном разделе мы доказываем Теорему 1.2. путем построения эффективного алгоритма распознавания (с точностью до изоморфизма) многоцветных графов потоков из класса  $G$ . Для этого можно считать, что количества вершин и рёбер у этих графов совпадают, иначе они заведомо не изоморфны. По построению многоцветные графы потоков из  $G$  не являются графами общего вида, поскольку они вложимы в несущую поверхность, на которой заданы соответствующие им потоки класса  $G$ . Иными словами, эти графы можно изобразить так, что их вершины — точки на поверхности, а рёбра — жордановы кривые и рёбра не пересекаются во внутренних своих точках. Интерес к этому наблюдению вызван существованием эффективного алгоритма различения *обыкновенных графов* (т. е. непомеченных графов без петель, ориентированных и кратных рёбер), вложимых в заданную поверхность, а именно, имеет место следующий факт.

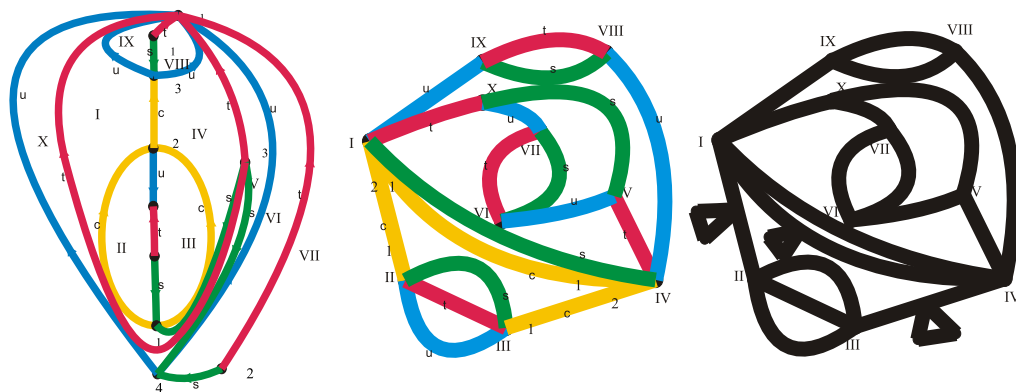
**Предложение 3.1.** ([10]) *Задача распознавания изоморфизма двух  $n$ -вершинных обыкновенных графов, каждый из которых вложим в поверхность рода  $g$ , может быть решена за время  $O(n^{O(g)})$ .*

К сожалению, приведенный результат не может быть непосредственно применён к распознаванию изоморфизма графов  $\Gamma_{ft}$  и  $\Gamma_{ft}$ , поскольку они не являются обыкновенными. Тем не менее, задачу изоморфизма многоцветных графов можно свести (с невысокой трудоёмкостью сведения) к задаче изоморфизма обыкновенных графов, вложимых в поверхность. Для этого нам понадобятся две операции с графами —  $k$ -подразбиение ребра и  $(k_1, k_2)$ -подразбиение ребра.

Операция  $k$ -подразбиения ребра  $(a, b)$  графа состоит в том, чтобы удалить его из графа, добавить вершины  $c_1, \dots, c_k$  и рёбра  $(a, c_1), (c_1, c_2), \dots, (c_k, b)$ .

Операция  $(k_1, k_2)$ -подразбиения ребра  $(a, b)$  графа состоит в том, чтобы удалить его из графа, добавить вершины  $c_1, c_2, \dots, c_{k_1}, v, u, w, d_1, d_2, \dots, d_{k_2}$  и рёбра  $(a, c_1), (c_1, c_2), \dots, (c_{k_1}, v), (v, u), (u, w), (v, w), (v, d_1), (d_1, d_2), \dots, (d_{k_2}, b)$ .

Для заданного графа  $\Gamma_{ft}$  построим соответствующий ему обыкновенный граф  $\Gamma(f^t)$  следующим образом. В графе  $\Gamma_{ft}$  выполним 1-подразбиение каждого  $s$ -ребра, 2-подразбиение каждого  $t$ -ребра, 3-подразбиение каждого  $u$ -ребра. Пусть  $e = (a, b)$  — произвольное  $s$ -ребро графа  $\Gamma_{ft}$ ,  $num_a(e)$  и  $num_b(e)$  — номера ребра  $e$  в множествах  $s$ -рёбер, соответственно инцидентных вершинам  $a$  и  $b$ . Выполним  $(num_a(e), num_b(e))$ -подразбиение ребра  $e$ . Подобную операцию выполним для всех  $s$ -рёбер графа  $\Gamma_{ft}$  (см. рис. 3.1).



Р и с у н о к 3.1

Пример потока  $f^t$  из класса  $G$ , его четырёхцветный граф  $\Gamma_{f^t}$  и соответствующий ему обыкновенный граф  $\Gamma(f^t)$

**Л е м м а 3.1.** *Графы  $\Gamma_{f^t}$  и  $\Gamma_{f^t}$  изоморфны тогда и только тогда, когда изоморфны графы  $\Gamma(f^t)$  и  $\Gamma(f^t)$ .*

**Д о к а з а т е л ь с т в о.** Очевидно, что по графу  $\Gamma_{f^t}$  граф  $\Gamma(f^t)$  определяется единственным образом. Покажем, что верно и обратное утверждение. Отсюда будет следовать справедливость леммы. Каждая многоугольная область множества  $\Delta_{f^t}$  имеет не менее трёх сторон, и поэтому каждая вершина  $\Gamma_{f^t}$  имеет не менее трёх соседей в этом графе. Очевидно, что в графе  $\Gamma(f^t)$  никакая вершина графа  $\Gamma_{f^t}$  не принадлежит никакому треугольнику. Поэтому множество вершин графа  $\Gamma_{f^t}$  образуют те и только те вершины графа  $\Gamma(f^t)$ , которые имеют не менее трёх соседей и не принадлежат треугольникам. Удалив из графа  $\Gamma(f^t)$  все вершины графа  $\Gamma_{f^t}$ , мы получим дизъюнктное объединение связанных подграфов, каждый из которых является либо путём, либо путём, к некоторой внутренней вершине которого «присоединён» треугольник. Эти связанные подграфы являются индикаторами наличия рёбер между соответствующими вершинами графа  $\Gamma_{f^t}$ . Если подграф является путём, то его длина определяет цвет из множества  $\{s, t, u\}$  у соответствующего ребра графа  $\Gamma_{f^t}$ . Если подграф является путём с «присоединённым» треугольником, то он соответствует некоторому  $c$ -ребру  $e = (a, b)$  графа  $\Gamma_{f^t}$ . В данном подграфе, удалив вершины треугольника, получим два пути, длины которых определяют номера  $e$  в множествах  $c$ -рёбер, инцидентных вершинам  $a$  и  $b$  соответственно. Тем самым, по графу  $\Gamma(f^t)$  граф  $\Gamma_{f^t}$  восстанавливается единственным образом.

**Д о к а з а т е л ь с т в о з а к о н ч е н о.**

Оценим количество вершин графа  $\Gamma(f^t)$  в предположении, что граф  $\Gamma_{f^t}$  имеет  $n$  вершин и  $m$  рёбер. Очевидно, что каждое из  $m$  рёбер графа  $\Gamma_{f^t}$  соответствует некоторому подграфу графа  $\Gamma(f^t)$ , содержащему не более  $2n + 5$  вершин. Поэтому граф  $\Gamma(f^t)$  имеет не более  $(2n + 5)m$  вершин и может быть эффективно вычислен по графу  $\Gamma_{f^t}$ . Отметим, что граф  $\Gamma(f^t)$  вложим в ту же поверхность, что и граф  $\Gamma_{f^t}$ . Поэтому, по Лемме 6.1, имеет место полиномиальное сведение задачи распознавания изоморфизма многоцветных графов потоков из класса  $G$  к задаче распознавания изоморфизма обыкновенных графов, вложенных в фиксированную поверхность. Отсюда и по Предложению 6.1 справедлива Теорема 1.2..

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Андронов А. А., Понтрягин Л. С., “Грубые системы”, *Доклады Академии наук СССР*, **14**:5 (1937), 247-250.
2. Cobham A, “The intrinsic computational difficulty of functions”, 1964, 24-30.
3. Grines V., Malyshev D., Pochinka O., Zinina S., “Efficient algorithms for the recognition of topologically conjugate gradient-like diffeomorphisms”, *Regular and Chaotic Dynamics*, **21**:2 (2016.), 189-203.
4. Гринес В. З., Капкаева С.Х., Починка О.В., “Трехцветный граф как полный топологический инвариант для градиентно-подобных диффеоморфизмов поверхностей”, *Математический сборник*, **205**:10 (2014.), 19-46.
5. Гэри М., Джонсон Д., *Вычислительные машины и труднорешаемые задачи*, М.: Мир, 1982, 416 с.
6. Починка О.В., Круглов В.Е., Митрякова Т.М., “О типах ячеек Омега-устойчивых потоков без периодических траекторий на поверхностях”, *Динамические системы*, **5(33)**:1-2 (2015), 43-49.
7. Леонтович Е. А., Майер А.Г., “О траекториях, определяющих качественную структуру разбиения сферы на траектории”, *Докл. Акад. АН СССР СССР*, **14**:5 (1937), 251-257.
8. Леонтович Е. А., Майер А.Г., “О схеме, определяющей топологическую структуру разбиения на траектории”, *Докл. Акад. АН СССР*, **103**:4 (1955), 557-560.
9. Майер А.Г., “Грубые преобразования окружности”, *Уч. Зап. ГГУ. Горький, публикации. ГГУ*, **12** (1939), 215-229.
10. Miller G., “Isomorphism testing for graphs of bounded genus”, 1980, 225-235.
11. Neumann D., O’Brien T., “Global structure of continuous flows on 2-manifolds”, *J. Diff. Eq.*, **22**:1 (1976), 89-110.
12. Ошемков А. А., Шарко В. В., “О классификации потоков Морса–Смейла на двумерных многообразиях”, *Матем. сб.*, **189**:8 (1998), 93-140.
13. Палис Ж., ди Мелу В., *Геометрическая теория динамических систем: Введение: Пер. с англ.*, Мир, М., 1986, 301 с.
14. Peixoto M., *On the classification of flows on two manifolds*, Dynamical systems Proc. Symp. held at the Univ. of Bahia, Salvador, Brasil, 1971.
15. Pugh C., Shub M., “ $\Omega$ -stability for flows”, *Inven. Math.*, **11** (1970), 150-158.

*Дата поступления 9.05.2016*

# The graph criterion for the topological equivalence of $\Omega$ – stable flows without periodic trajectories on surfaces and efficient algorithm for its application

© V. E. Kruglov<sup>5</sup>, D. S. Malyshev<sup>6</sup>, O. V. Pochinka<sup>7</sup>

**Abstract.** Studying of dynamics of flows on surfaces by dividing a phase space into cells with same limit behavior of trajectories within the cell goes back to the classical works of A.A. Andronov, L.S. Pontryagin, E.A. Leontovich and A.G. Mayer. Types of cells (which are finite in number) and abutting each other fully determine the class of topological equivalence of a flow with finite number of singular trajectories. If in each cell of the rough stream without periodic orbits we select one trajectory, the cells fall into so-called triangular regions which has the same single type. Combinatorial description of such a partition leads to a three-colored graph of A.A. Oshemkov and V.V. Sharko. The vertices of this graph correspond to the triangular areas and edges correspond to those separatrices that link them. A.A. Oshemkov and V.V. Sharko demonstrated that two such flow topologically equivalent if and only if their three-colored graphs are isomorphic and an algorithm of distinction of three-colored graphs is described. However, their algorithm is not effective in terms of graph theory. In this work the dynamics of  $\Omega$  –stable flows without periodic trajectories on surfaces is described in terms of four-colored graphs and effective algorithm of distinction of these graphs is given.

**Key Words:** multicolored graph, topological invariant,  $\Omega$ -stable flow, effective algorithm

---

<sup>5</sup> Student, Lobachevsky State University of Nizhni Novgorod, Nizhni Novgorod; krugovslava21@mail.ru

<sup>6</sup> Professor of Department of Applied Mathematics and Informatics, High School Economy, Nizhny Novgorod State University, Nizhny Novgorod; dsalyshev@rambler.ru

<sup>7</sup> Professor of Department fundamental mathematics, High School Economy, Nizhny Novgorod; olga-pochinka@yandex.ru