УДК 519.254

Идентификация ARX систем Винера дробного порядка при наличии помехи во входном сигнале

© **Д. В. Иванов**[1]

Аннотация. В статье рассмотрена параметрическая идентификация ARX (Autoregressive with exogenous input) систем Винера дробного порядка при наличии помех во входных сигналах. Предложен критерий для оценивания параметров данных систем, представляющий собой обобщение метода наименьших квадратов. Доказано, что при помехах класса мартингал-разности, получаемые оценки параметров будут обладать свойством сильной состоятельности. Показано, что в случае постоянной дисперсии помех для получения состоятельных оценок достаточно знать отношение их дисперсий.

Ключевые слова: параметрическая идентификация, система Винера, разность дробного порядка, помеха наблюдения, метод наименьших квадратов, состоятельность оценок

1. Введение

Для описания процессов различной природы все большее применение находят уравнения с производными и разностями дробного порядка. Несмотря на отсутствие простой интерпретации, которой обладают производные, интегралы и разности целых, модели, описываемые уравнениями дробного порядка, позволяют достаточно точно моделировать многие процессы в физике и технике[1-4], активно развивается раздел теории управления связанный с синтезом регуляторов дробного порядка. В связи с активным развитием и применением уравнений с разностями и производными дробного порядка для задач моделирования и прогнозирования, стали также активно развиваться методы идентификации систем, описываемых уравнениями и разностями дробного порядка.

При идентификации динамических систем наибольшее распространение получили линейные модели динамических систем. Линейные модели просты в описании и часто обеспечивают адекватную точность представления динамической системы. Однако существует огромное число систем, описываемых нелинейными уравнениями. В общем случае задача идентификации динамических систем не имеет решения и возможно говорить лишь об идентификации некоторых классов нелинейных систем, таких как системы класса Гаммерштейна, Винера, Вольтерра, билинейные системы и т.д. Идентификация даже отдельных классов нелинейных систем при наличии помех, по сравнению с линейными системами, является более сложной задачей. Идентификации линейных систем дробного порядка посвящены [4-9].

В данной статье предложен критерий, позволяющий получать сильно состоятельные оценки параметров ARX систем класса Винера дробного порядка при наличии помехи во входном сигнале.

2. Постановка задачи о локальной приводимости

Динамическая система, описываемая линейными стохастическими уравнениями с разностями дробного порядка:

[1] Доцент кафедры мехатроники в автоматизированных производствах, Самарский государственный университет путей сообщения, г. Самара; dvi85@list.ru

$$z_i = \sum_{m=1}^{r} b_0^{(m)} \Delta^{\alpha_m} z_{i-1} + \sum_{m=1}^{r_1} a_0^{(m)} \Delta^{\beta_m} x_i + \varsigma_i, y_i = f(z_i), w_i = x_i + \zeta_i, \tag{2.1}$$

где $f(\bullet)$ - нелинейная обратимая беровская функция,

$$0 < \alpha_1 \ldots < \alpha_r, 0 < \beta_1 \ldots < \beta_{r_1}, \Gamma(\alpha) = \int_0^\infty e^{-t} t^{\alpha-1} dt,$$

$$\Delta^{\alpha_m} z_i = \sum_{j=0}^{i} \begin{pmatrix} \alpha_m \\ j \end{pmatrix} z_{i-j},\ \Delta^{\beta_m} x_i = \sum_{j=0}^{i} \begin{pmatrix} \beta_m \\ j \end{pmatrix} x_{i-j},$$

$$\begin{pmatrix} \alpha_m \\ j \end{pmatrix} = (-1)^j \frac{\Gamma(\alpha_m+1)}{\Gamma(j+1)\Gamma(\alpha_m-j+1)}, \begin{pmatrix} \beta_m \\ j \end{pmatrix} = (-1)^j \frac{\Gamma(\beta_m+1)}{\Gamma(j+1)\Gamma(\beta_m-j+1)}.$$

Пусть выполнены условия:

1. Динамическая система устойчивая. Истинные параметры системы принадлежат компактному множеству $\tilde{\mathrm{B}}$.

2. Помехи $\{\varsigma_i\}$, $\{\zeta_i\}$ являются мартингал-разностями и удовлетворяют следующим условиям:

$E\left(\varsigma_{i+1}/F_\varsigma^{(i)}\right) = 0,\ E\left(\zeta_{i+1}/F_\zeta^{(i)}\right) = 0$ п.н.,

$E\left(\varsigma_{i+1}^2/F_\varsigma^{(i)}\right) < W_\varsigma,\ E\left(\zeta_{i+1}^2/F_\zeta^{(i)}\right) < W_\zeta$ п.н,

$E(\varsigma_i^2) < \infty,\ E(\zeta_i^2) < \infty$ п.н.,

где $F_\varsigma^{(i)}, F_\zeta^{(i)}$ – σ- алгебры, индуцированные семействами случайных величин $\{\varsigma_t, \zeta_t, t \in T_i\}, T_i = \{\mathrm{t}; \mathrm{t} \le \mathrm{i}, \mathrm{t} \in \mathrm{Z_c}$-множество целых чисел$\}$;

W_ς, W_ζ - случайные величины, $E(W_\varsigma) < \infty,\ E(W_\zeta) < \infty$ п.н.

3. $\{x_i\}$ статистически не зависит от $\{\varsigma_i\}$, $\{\zeta_i\}$.

4. $\{\varsigma_i\}$, $\{\zeta_i\}$ статистически не зависят между собой.

5. Для помехи $\{\zeta_i\}$ выполнено условие

$$\lim_{N\to\infty} \frac{1}{N} \left[\sum_{i=1}^{N} \varphi_\zeta^{(i)} \left(\varphi_\zeta^{(i)}\right)^T\right] = \lim_{N\to\infty} \frac{1}{N} \left[\sum_{i=1}^{N} E\left(\varphi_\zeta^{(i)} \left(\varphi_\zeta^{(i)}\right)^T\right)\right] = \begin{pmatrix} h_\zeta^{(11)} & \ldots & h_\zeta^{(r_1 1)} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ h_\zeta^{(1 r_1)} & \ldots & h_\zeta^{(r_1 r_1)} \end{pmatrix} = H_\zeta,$$

где $\varphi_\zeta^{(i)} = \left(\sum_{j=0}^{i} \begin{pmatrix} \beta_1 \\ j \end{pmatrix} \zeta_{i-j}, \ldots, \sum_{j=0}^{i} \begin{pmatrix} \beta_{r_1} \\ j \end{pmatrix} \zeta_{i-j}\right)^T$,

причем H_ζ положительно определена.

6. Входной сигнал x_i является случайным и удовлетворяет условию

$\lim_{N\to\infty} \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{N} \left(\left(\varphi_z^{(i)}\right)^T \middle| \left(\varphi_x^{(i)}\right)^T \right)^T \left(\left(\varphi_z^{(i)}\right)^T \middle| \left(\varphi_x^{(i)}\right)^T \right) = \left(\begin{array}{c|c} H_{zz} & H_{zx} \\ \hline (H_{zx})^T & H_{xx} \end{array}\right) = H$ п.н.,

где $\varphi_z^{(i)} = \left(\sum_{j=0}^{i} \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ j \end{pmatrix} z_{i-j-1}, \ldots, \sum_{j=0}^{i} \begin{pmatrix} \alpha_r \\ j \end{pmatrix} z_{i-j-1}\right)^T$,

$\varphi_x^{(i)} = \left(\sum_{j=0}^{i} \begin{pmatrix} \beta_1 \\ j \end{pmatrix} x_{i-j}, \ldots, \sum_{j=0}^{i} \begin{pmatrix} \beta_{r_1} \\ j \end{pmatrix} x_{i-j}\right)^T$,

причем H существует, ограничена и положительно определена.

Необходимо оценить неизвестные коэффициенты динамической системы, описываемой уравнением (2.1) по наблюдениям y_i, w_i при известных порядках *r*, *r1*, α_m, β_m .

3. Критерий для оценивания параметров

Представим уравнение (2.1) в виде линейной регрессии

$$y_i = \varphi_i^T \theta_0 + \varepsilon_i, \tag{3.1}$$

где $\varphi_i = \left(\left(\varphi_y^{(i)}\right)^T \,\middle|\, \left(\varphi_w^{(i)}\right)^T \right)^T$,

$\varphi_y^{(i)} = \left(\sum_{j=0}^{i} \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ j \end{pmatrix} f^{-1}(y_{i-j-1}), \ldots, \sum_{j=0}^{i} \begin{pmatrix} \alpha_r \\ j \end{pmatrix} f^{-1}(y_{i-j-1}) \right)^T$,

$\varphi_w^{(i)} = \left(\sum_{j=0}^{i} (-1)^j \begin{pmatrix} \beta_1 \\ j \end{pmatrix} w_{i-j}, \ldots, \sum_{j=0}^{i} (-1)^j \begin{pmatrix} \beta_{r_1} \\ j \end{pmatrix} w_{i-j} \right)^T$,

$\theta_0 = \left(b_0^T \mid a_0^T \right)^T, b_0 = \left(b_0^{(1)}, \ldots, b_0^{(r)}\right)^T, a_0 = \left(a_0^{(1)}, \ldots, a_0^{(r_1)}\right)^T, \varepsilon_i = \varsigma_i - a_0^T \varphi_\zeta^{(i)}$,

$\varphi_\zeta^{(i)} = \left(\sum_{j=0}^{i} (-1)^j \begin{pmatrix} \beta_1 \\ j \end{pmatrix} \zeta_{i-j}, \ldots, \sum_{j=0}^{i} (-1)^j \begin{pmatrix} \beta_{r_1} \\ j \end{pmatrix} \zeta_{i-j} \right)^T$.

Л е м м а 3.1. *Пусть выполнены предположения 1-3, тогда* $E(\varepsilon_i) = 0$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Из предположения 2 следует, что $E(\zeta_i) = 0$, $E(\varsigma_i) = 0$, тогда используя предположение 3 можно показать

$$E(\varepsilon_i) = E\left(\varsigma_i - a_0^T \varphi_\zeta^{(i)}\right) = E(\varsigma_i) - \sum_{m=1}^{r} a_0^{(m)} \sum_{j=0}^{i} \begin{pmatrix} \beta_m \\ j \end{pmatrix} E\left(\zeta_{i-j-1}\right) = 0.$$

Л е м м а 3.2. *Пусть выполнены предположения 2-6, тогда дисперсия обобщенной ошибки равна*

$$\bar{\sigma}_\varepsilon^2 = \bar{\sigma}_\varsigma^2 + a_0^T H_\zeta a_0 = \omega(b_0, a_0),$$

где $\bar{\sigma}_\varsigma^2 = \lim\limits_{N\to\infty} \frac{1}{N} \sum_{i=0}^{N} \varsigma_i^2$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. По определению дисперсии

$$\sigma_\varepsilon^2 = \lim_{N\to\infty} \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{N} E\left(\varepsilon_i - E\left(\varepsilon_i\right)\right)^2,$$

так как $E(\varepsilon_i) = 0$, то

$$\bar{\sigma}_\varepsilon^2 = \lim_{N\to\infty} \tfrac{1}{N} \textstyle\sum_{i=1}^{N} E\left(\varepsilon_i^2\right) = \lim_{N\to\infty} \tfrac{1}{N} \sum_{i=1}^{N} E\left(\varsigma_i - a_0^T \varphi_\zeta^{(i)}\right)^2 =$$
$$= \lim_{N\to\infty} \tfrac{1}{N} \textstyle\sum_{i=1}^{N} \left(\varsigma_i^2 + a_0^T \varphi_\zeta^{(i)} \left(\varphi_\zeta^{(i)}\right)^T a_0 - 2\, \varsigma_i a_0^T \varphi_\zeta^{(i)}\right)$$

Применяя лемму 1.1 [9, с.12, 10] для ς_i, ζ_i и предположения 3-5 получим

$$\lim_{N\to\infty} \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{N} \left(\varsigma_i^2 + a_0^T \varphi_\zeta^{(i)} \left(\varphi_\zeta^{(i)}\right)^T a_0\right) = \bar{\sigma}_\varsigma^2 + a_0^T H_\zeta a_0.$$

Используя лемму 2 [9, с.13, 11] и лемму 1 для случайных процессов получаем

$$\lim_{N\to\infty} \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{N} 2\zeta_i b_0^T \varphi_\xi^{(i)} = 0.$$

Будем искать оценки $\hat{\theta}(N)$ коэффициентов θ из условия минимума следующего критерия:

$$\min_{\theta\in\tilde{\mathrm{B}}}\sum_{i=1}^{N}\frac{\left(f^{-1}\left(y_i\right)-\varphi_i^T\theta\right)^2}{\bar{\sigma}_\varsigma^2+a^T H_\zeta a}=\min_{\theta\in\tilde{\mathrm{B}}}\frac{U_N(b,a)}{\omega(a)}. \tag{3.2}$$

Т е о р е м а 3.1. *Пусть динамическая система описывается уравнением (2.1) с начальными нулевыми условиями и выполняются предположения 1-6. Тогда оценка коэффициентов* $\hat{\theta}(N)$, *определяемая выражением (3.2) существует, единственная и сходится к истинному значению коэффициентов с вероятностью 1, т.е.*

$$\hat{\theta}(N)\xrightarrow[\mathrm{N}\to\infty]{}\theta_0.$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. При доказанных выше леммах доказательство проводится аналогично рассуждениям работы [7] .

4. Случай гомоскедастических помех

Полученный критерий (3.2) требует знания квадратов значений помех в наблюдении, что является довольно ограничительным условием. Для многих практических задач дисперсию помех можно считать постоянной. Пусть выполняется следующее предположение. Случайные процессы $\{\varsigma_i\}$, $\{\zeta_i\}$ являются мартингал-разностями и удовлетворяют следующим условиям:

$E\left(\varsigma_{i+1}/F_\varsigma^{(i)}\right)=0,\ E\left(\zeta_{i+1}/F_\zeta^{(i)}\right)=0$ п.н.,

$E\left(\varsigma_{i+1}^2/F_\varsigma^{(i)}\right)=\sigma_\varsigma^2<0,\ E\left(\zeta_{i+1}^2/F_\zeta^{(i)}\right)=\sigma_\zeta^2<0$ п.н.

7. Априорно известны отношения $\gamma=\sigma_\varsigma^2/\sigma_\zeta^2$.

Тогда оценки $\hat{\theta}(N)$ неизвестных параметров θ могут быть определены из критерия

$$\min_{\theta\in\tilde{\mathrm{B}}}\sum_{i=1}^{N}\frac{\left(f^{-1}\left(y_i\right)-\varphi_i^T\theta\right)^2}{\gamma+a^T H_\beta a}, \tag{4.1}$$

где $H_\beta=\left(\begin{array}{c|c|c} h_\beta^{(11)} & \dots & h_\beta^{(r_1 1)} \\ \hline \vdots & \ddots & \vdots \\ \hline h_\beta^{(1 r_1)} & \dots & h_\beta^{(r_1 r_1)} \end{array}\right)$, $h_\beta^{(mn)}=\lim\limits_{N\to\infty}\frac{1}{N}\sum_{j=0}^{N-1}\left(\begin{array}{c}\beta_m\\ j\end{array}\right)\left(\begin{array}{c}\beta_n\\ j\end{array}\right)\frac{N-j}{N}$.

Т е о р е м а 4.1. *Пусть динамическая система описывается уравнением* (2.1) *с начальными нулевыми условиями и выполняются предположения 1,3,4-6 и 2.0. Тогда оценка коэффициентов* $\hat{\theta}(N)$, *определяемая выражением (4.1) существует, единственная и сходится к истинному значению коэффициентов с вероятностью 1, т.е.*

$$\hat{\theta}(N)\xrightarrow[\mathrm{N}\to\infty]{}\theta_0.$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Доказательство проводится аналогично рассуждениям в работе [7] .

Список литературы

1. А. М. Нахушев, *Дробное исчисление и его применение*, ФИЗМАТЛИТ, М., 2003, 272 с.

2. В. В. Учайкин, *Метод дробных производных*, Издательство «Артишок», Ульяновск, 2008, 512 с.

3. В. В. Мишунин, *Системы автоматического управления и контроля с дробно-иррациональными передаточными функциями*, Изд-во БГТУ им. В.Г. Шухова, Белгород, 2004, 255 с.

4. И. В. Бойков, Н. П. Кривулин, “Параметрическая идентификация систем, математические модели которых описываются дифференциальными уравнениями с производными дробных порядков”, *Метрология*, 2013, № 9, 3–16.

5. И. В. Бойков, Н. П. Кривулин, “Параметрическая идентификация эредитарных систем с распределенными параметрами”, *Известия высших учебных заведений. Поволжский регион. Технические науки.*, 2013, № 2(26), 120–129.

6. Д. В. Иванов, О. А. Кацюба, “О состоятельности оценок параметров ARX-систем дробного порядка с помехой в выходном сигнале”, *Стохастическая оптимизация в информатика*, 2013, № 1(2), 21–32.

7. Д. В. Иванов, “Оценивание параметров линейных ARX-систем дробного порядка с помехой наблюдения во входном сигнале”, *Вестник Томского государственного университета. Управление, вычислительная техника и информатика*, 2014, № 2(27), 43–50.

8. Д. В. Иванов, “Численный алгоритм оценивания параметров линейных динамических систем дробного порядка с помехой в выходном сигнале”, *Эвристические алгоритмы и распределённые вычисления*, 2014, № 1(1), 53–63.

9. О. А. Кацюба, *Теория идентификации стохастических динамических систем в условиях неопределенности*, СамГУПС, Самара, 2008, 119 с.

10. О. А. Кацюба, А. И. Жданов, “Особенности применения МНК для оценивания линейных разностных операторов в задачах идентификации объектов управления”, *Автоматика и телемеханика*, 1979, № 8, 86–90.

11. О. А. Кацюба, А. И. Жданов, “Идентификация методом наименьших квадратов параметров уравнений авторегрессии с аддитивными ошибками измерений”, *Автоматика и телемеханика*, 1982, № 2, 29–38.

Дата поступления 5.05.2016

Identification of fractional-order ARX Wiener systems in the presence of noise in the input signals

© **D. V. Ivanov**[2]

Abstract. The paper describes the parametric identification of fractional-order Wiener ARX (Autoregressive with exogenous input) systems in the presence of noise in the input signals. The criterion for evaluating the parameters of these systems is proposed which is a generalization of the method of least squares. It is proved that the interference class martingale-difference derived parameter estimates will have the property of strong consistency. It is shown that in the case of constant noise variance to obtain consistent estimates it is sufficient to know the ratio of their variances.

Key Words: parametric identification, Wiener system, a difference of fractional order, errors in variables, least squares, consistent estimator

[2] Associate Professor of the Department of Mechatronics, Samara State University of Transport, Samara; dvi85@list.ru