УДК 517.9

О структуре одномерных базисных множеств эндоморфизмов поверхностей

© В. З. Гринес[1], Е. Д. Куренков[2]

Аннотация. Настоящая работа посвящена изучению динамики C^k-эндоморфизмов ($k \geq 1$) поверхностей, удовлетворяющих аксиоме A, в окрестности одномерных базисных множеств. Устанавливается, что если одномерное базисное множество эндоморфизма f поверхности имеет тип $(1,1)$ и является одномерным подмногообразием без края, то оно является аттрактором, гладко вложенным в несущую поверхность. Более того, существует $k \geq 1$ такое, что ограничение эндоморфизма f^k на любую компоненту связности аттрактора является растягивающим эндоморфизмом. Также устанавливается, что если базисное множество эндоморфизма f имеет тип $(2,0)$ и является одномерным подмногообразием без края, то оно является репеллером и существует $k \geq 1$ такое, что ограничение эндоморфизма f^k на любую компоненту связности базисного множества является растягивающим эндоморфизмом.

Ключевые слова: аксиома A, эндоморфизм, базисное множество

1. Введение

Хорошо известна ключевая роль понятий гиперболического множества и аксиомы А, введенных Д.В. Аносовым и С. Смейлом [1], [16] для исследования различных типов устойчивости диффеоморфизмов на многообразиях, в частности, для установления необходимых и достаточных условий структурной устойчивости. В работах [14], [10] аналогичные понятия были введены для эндоморфизмов, то есть гладких отображений, не являющихся, вообще говоря, взаимно однозначными.

Под C^k-эндоморфизмом гладкого замкнутого многообразия M^n понимается гладкое отображение класса C^k, $k \geqslant 1$. Если эндоморфизм f обладает обратным отображением класса C^k, то он называется C^k-диффеоморфизмом. Динамика эндоморфизмов окружности хорошо изучена и содержит целый ряд исчерпывающих результатов. Из работы А. Г. Майера [9] следует, что в том случае, когда f является диффеоморфизмом и его неблуждающее множество состоит из конечного числа гиперболических периодических точек, он является структурно устойчивым. Более того в работе [9] была получена топологическая классификация структурно устойчивых диффеоморфизмов окружности. В работах М. Шуба, З. Нитецки и М. Якобсона [17], [12], [18] была изучена структура неблуждающих множеств эндоморфизмов окружности, удовлетворяющих аксиоме A и получены содержательные результаты в направлении топологической классификации эндоморфизмов в предположении их структурной устойчивости или устойчивости на неблуждающем множестве.

На любой двумерной поверхности существует диффеоморфизм, удовлетворяющий аксиоме A С. Смейла. В силу спектральной теоремы С. Смейла [16] неблуждающее множество таких диффеоморфизмов представляется в виде конечного объединения замкнутых инвариантных (базисных) множеств, в каждом из которых диффеоморфизм имеет транзитивную орбиту. Топологическая структура таких базисных множеств хорошо изучена.

[1] Профессор кафедры фундаментальной математики Национального исследовательского университета Высшая школа экономики; vgrines@hse.ru

[2] Лаборант лаборатории ТАПРАДЕСС Национального исследовательского университета Высшая школа экономики; ekurenkov@hse.ru

В случае, когда размерность базисного множества равна нулю, оно локально устроено как декартово произведение двух канторовских множеств, а ограничение диффеоморфизма на него топологически сопряжено сдвигу некоторой марковской цепи с конечным числом состояний. Если размерность базисного множества равна единице, то оно является аттрактором (репеллером), целиком состоит из одномерных неустойчивых (устойчивых) многообразий его точек и локально устроено как декартово произведение канторовского множества на отрезок. Если размерность базисного множества равна двум, то оно совпадает с несущей поверхностью M^2, которая диффеоморфна двумерному тору, а исходный диффеоморфизм является диффеоморфизмом Д.В. Аносова. Более того, в ряде работ В.З. Гринеса, Р.В. Плыкина, А.Ю. Жирова, Х. Бонатти, Р. Ланжевена и др. (см. [4]) получены топологическая классификация базисных множеств диффеоморфизмов, удовлетворяющих аксиоме A и топологическая классификация структурно устойчивых диффеоморфизмов поверхностей.

Что касается эндоморфизмов поверхностей, не являющихся диффеоморфизмами, значительный прогресс достигнут в изучении рациональных отображений комплексной плоскости, базирующихся на классических результатах Г. Жюлиа и П. Фату и полученных в работах М. Якобсона, Дж. Милнора, М. Любича и др (см. [8], [11]). Для эндоморфизмов поверхностей, не связанных с комплексной динамикой, имеющиеся результаты существенно скромнее.

Имеется также большой прогресс в топологической классификации диффеоморфизмов, удовлетворяющих аксиоме А. Смейла на многообразиях размерности большей двух, в случае, когда размерность базисного множества совпадает с размерностью несущего многообразия. В этом случае диффеоморфизм является диффеоморфизмом Аносова и имеется целый ряд исчерпывающих классификационных результатов таких диффеоморфизмов в работах Дж. Фрэнкса, Ш. Ньюхауса, Э. Мэнинга и др (см. [2]). Имеется также значительный прогресс в топологической классификации структурно устойчивых диффеоморфизмов, обладающих базисными множествами коразмерности один, полученный в работах В.З. Гринеса, Е.В. Жужомы, В.С. Медведева, Р. В. Плыкина, О.В. Починки, Ю.А. Левченко и др. (см. [3], [5], [13]). Что же касается аналогичных результатов для эндоморфизмов, то наиболее полные результаты имеются по классификации растягивающихся эндоморфизмов [17]. Для таких эндоморфизмов неблуждающее множество состоит из единственного базисного множества, размерность которого совпадает с размерностью несущего многообразия.

Настоящая работа посвящена изучению динамики двумерных эндоморфизмов, удовлетворяющих аксиоме A, в окрестности одномерных базисных множеств. Полученные результаты являются частичным аналогом на случай эндоморфизмов поверхностей, соответствующих результатам Р.В. Плыкина для диффеоморфизмов (см. [13], Теорема 3).

Пусть $f : M^n \to M^n$ эндоморфизм класса C^r $(r \geqslant 1)$, заданный на замкнутом многообразии M^n, снабженном римановой метрикой, и $\Lambda \subset M^n$ f-инвариантное (инвариантное относительно эндоморфизма f) множество, то есть $f(\Lambda) = \Lambda$. Для любой точки $x \in \Lambda$ существует, вообще говоря, бесконечное множество последовательностей вида $\bar{x} = \{x_i \in \Lambda \mid x_0 = x, i \in \mathbb{Z}\}$, таких что $f(x_i) = x_{i+1}$. Каждую из таких последовательностей будем называть частной траекторией точки x, ассоциированной с инвариантным множеством Λ.

Определение 1.1. *Инвариантное множество Λ эндоморфизма $f : M^n \to \to M^n$ называется гиперболическим, если существуют константы $C > 0$, $0 < \mu < 1$ такие, что для любой частной траектории $\bar{x}$ точки x существует разложение касательного пространства $T_{\bar{x}}M^n$ в прямую сумму $T_{\bar{x}}M^n = E^s_{\bar{x}} \oplus E^u_{\bar{x}}$, инвариантное относи-*

тельно касательного отображения $Df\colon T_{\bar{x}}M^n \to T_{\bar{x}}M^n$, *для которого верны следующие неравенства:*

1. $||Df^n(v)|| \leqslant C\mu^n||v||$, *для любых* $n \geqslant 0$, $v \in E^s_{\bar{x}}$;
2. $||Df^n(v)|| \geqslant (1/C)\mu^{-n}||v||$, *для любых* $n \geqslant 0$, $v \in E^u_{\bar{x}}$.

В работе [14] было предложено следующее обобщение аксиомы A для эндоморфизмов (формально совпадающее с аналогичным определением для диффеоморфизмов).

Определение 1.2. *Эндоморфизм* $f\colon M^n \to M^n$ *удовлетворяет аксиоме* A , *если выполнены следующие условия:*

1. *неблуждающее множество* Ω_f *— гиперболично и не содержит критических точек;*
2. *множество периодических точек* Per_f *эндоморфизма* f *плотно в неблуждающем множестве* Ω_f .

Для эндоморфизма f , удовлетворяющего аксиоме A , имеет место теорема о спектральном разложении, доказанная в [14], и обобщающая соответствующий результат, полученный С. Смейлом [16].

Предложение 1.1. *Пусть эндоморфизм* f *удовлетворяет аксиоме* A . *Тогда его неблуждающее множество* Ω *представляется единственным образом в виде объединения конечного числа непересекающихся замкнутых* f *-инвариантных подмножеств (называемых базисными множествами)* $\Omega = \bigcup_{i=1}^{l} \Omega_i$ *таких, что ограничение* f *на каждое базисное множество является топологически транзитивным.*

Определение 1.3. *Базисное множество* Ω_i *эндоморфизма* f *называется аттрактором, если существует его замкнутая окрестность* U *такая, что* $f(U) \subset \subset \operatorname{Int} U$ *и* $\bigcap\limits_{n=0}^{\infty} f^n(U) = \Omega_i$.

Определение 1.4. *Базисное множество* Ω_i *эндоморфизма* f *называется репеллером, если существует его замкнутая окрестность* U *и подмножество* $\widetilde{U} \subset \operatorname{Int} U$ *такие, что* $f(\widetilde{U}) = U$ *и* $\bigcap\limits_{n=0}^{\infty} f^{-n}(U) = \Omega_i$ [3].

Определение 1.5. C^r *-эндоморфизм* $f\colon M^n \to M^n$ *называется растягивающим, если существуют константы* $C > 0$ *и* $\mu > 1$ *такие, что* $||Df^n(v)|| \geqslant C\mu||v||$ *для любого* $v \in TM^n$, $n = 0, 1, 2, \ldots$.

Наличие гладкой структуры на многообразии M^n не является обязательным условием для того, чтобы задать растягивающий эндоморфизм. Альтернативное определение растягивающего эндоморфизма, заданного на произвольном метрическом пространстве было предложено А. Б. Катком [7].

Определение 1.6. *Непрерывное отображение* $f\colon X \to X$ *метрического пространства* X *называется растягивающим, если существуют такие константы* $\varepsilon > > 0$ *и* $\mu > 1$, *что для любых* $x, y \in X$, $x \neq y$, $\rho(x, y) < \varepsilon$ *выполняется неравенство* $\rho(f(x), f(y)) > \mu\rho(x, y)$.

[3] Под $f^{-1}(A)$ понимается полный прообраз множества A .

В том случае, когда X является C^1-гладким компактным многообразием, данные определения эквивалентны.

Для базисного множества Λ эндоморфизма $f: M^n \to M^n$, удовлетворяющего аксиоме A, пару чисел (a, b), где a размерность $E^u_{\bar{x}}$, b размерность $E^s_{\bar{x}}$, $x \in \Lambda$, назовем типом множества Λ.

В настоящей работе изучается динамика и наличие гладкой структуры одномерного базисного множества Λ эндоморфизма $f: M^2 \to M^2$, удовлетворяющего аксиоме A, где M^2 – двумерное замкнутое многообразие. Основным результатом работы являются следующие теоремы.

Теорема 1.1. *Пусть базисное множество Λ имеет тип $(1, 1)$ и является одномерным подмногообразием без края. Тогда:*

1) Λ является аттрактором эндоморфизма f;

2) Λ является гладко вложенной окружностью;

3) существует $k \geq 1$ такое, что ограничение эндоморфизма f^k на любую компоненту связности Λ является растягивающим эндоморфизмом.

Теорема 1.2. *Пусть базисное множество Λ имеет тип $(2, 0)$ и является одномерным подмногообразием без края. Тогда:*

1) Λ является репеллером;

2) существует $k \geq 1$ такое, что ограничение эндоморфизма f^k на любую компоненту связности Λ является растягивающим эндоморфизмом.

Замечание 1.1. *В силу* [17] *(см. также* [7]*) любой растягивающий эндоморфизм окружности (в смысле определений 1.5., 1.6.) сопряжен отображению вида* $\bar{x} = kx \mod 1$, *где k есть степень отображения исходного эндоморфизма, а $x \in \mathbb{R}$.*

Замечание 1.2. *Компонента связности множества Λ в теореме 1.2. является окружностью, не обязательно гладко вложеной в M^2. Примером такой ситуации может служить отображение римановой сферы, порожденное отображением вида $z \to z^2 + c$ (z - принадлежит комплексной плоскости), при всех достаточно малых значениях параметра c, отличных от нуля (см. например,* [8] *стр. 67).*

Благодарности. Исследование осуществлено в рамках Программы фундаментальных исследований НИУ ВШЭ в 2016 году (проект «Топологические методы в динамике», ТЗ-98) при частичной поддержке РФФИ (грант 15-01-03687-а).

2. Вспомогательные сведения

Для точек гиперболического множества, как и в случае диффеоморфизмов, существуют понятия локального устойчивого и неустойчивого многообразий. Существенное отличие эндоморфизма от диффеоморфизма состоит в том, что у эндоморфизма, в силу отсутствия обратного отображения, локальное неустойчивое многообразие зависит, вообще говоря, от выбора конкретной частной траектории, проходящей через данную точку.

Определение 2.1. *Пусть $x \in \Lambda$, где Λ – гиперболическое инвариантное множество эндоморфизма $f: M^n \to M^n$ и $\bar{x}$ — частная траектория точки x. Множество*

$$W^s_{x,\varepsilon} = \{y \in M^n \mid \rho(f^n(x), f^n(y)) < \varepsilon, n = 0, 1, 2, \ldots\}$$

называется локальным устойчивым многообразием точки x *, а множество*

$$W^u_{\bar{x},\varepsilon} = \{y \in M^n \mid \exists \bar{y}, \rho(x_n, y_n) < \varepsilon, n = 0, -1, -2, \ldots\}$$

называется локальным неустойчивым многообразием точки x *, ассоциированным с частной траекторией* $\bar{x}$ *.*

Структура гиперболических множеств эндоморфизмов подробно изучалась в [14]. Приведем некоторые важные для данной работы результаты (доказательства см. [14], [6])

Пусть $\langle \cdot, \cdot \rangle$ – гладкая риманова метрика, заданная на многообразии M^n .

Предложение 2.1. *Для любого гиперболического множества* Λ *эндоморфизма* f *существует гладкая риманова метрика* $\langle \cdot, \cdot \rangle_\Lambda$ *, эквивалентная метрике* $\langle \cdot, \cdot \rangle$ *, ассоциированная с гиперболическим множеством* Λ *и число* λ *,* $0 < \lambda < 1$ *такие, что для любой частной траектории* $\bar{x} \subset \Lambda$ *имеют место неравенства*

$$||Df_{x_i}(v)||_\Lambda \leqslant \lambda ||v||_\Lambda \quad \text{при} \quad v \in E^s_{x_i},$$

$$||Df_{x_i}(v)||_\Lambda \geqslant (1/\lambda) ||v||_\Lambda \quad \text{при} \quad v \in E^s_{x_i},$$

$i \in \mathbb{Z}$.

Предложение 2.2. *Пусть* Λ *— гиперболическое множество эндоморфизма* f *, тогда верны следующие утверждения:*

1. *существует такое* $\varepsilon > 0$ *, что для любой частной траектории* $\bar{x} \subset \Lambda$ *, ассоциированной с точкой* $x \in \Lambda$ *, локальное устойчивое* $W^s_{x,\varepsilon}$ *и локальное неустойчивое* $W^u_{\bar{x},\varepsilon}$ *многообразия являются гладко вложенными подмногообразиями, касающимися* E^s_x *и* E^u_x *соответственно;*

2. $W^s_{x,\varepsilon}$ *и* $W^u_{\bar{x},\varepsilon}$ *непрерывно зависят от точки* x *и траектории* $\bar{x}$ *соответственно*[4] *;*

3. *существует такое* $\mu < 1$ *, что в метрике* ρ *на* M^n *, индуцированной метрикой* $\langle \cdot, \cdot \rangle_\Lambda$ *, верны следующие утверждения:*

   а) для любых $y, z \in W^s_{\bar{x},\varepsilon}$ *выполнены неравенства* $\rho(f^{n+1}(y), f^{n+1}(z)) \leqslant$
   $\leqslant \mu\rho(f^n(y), f^n(z))$ *,* $n = 0, 1, 2, \ldots$ *;*

   б)для любых двух точек $y, z \in W^u_{\bar{x},\varepsilon}$ *существуют их частные траектории* $\bar{y}$ *и* $\bar{z}$ *, для которых выполнены неравенства* $\rho(y_{-n-1}, z_{-n-1}) \leqslant \mu\rho(y_{-n}, z_{-n})$ *,* $n = 0, 1, 2, \ldots$ *.*

3. Доказательства теорем

Здесь и далее мы всегда будем предполагать, что на Λ задана метрика, определенная в предложении 2.1.

Пусть Λ –базисное множество эндоморфизма $f : M^2 \to M^2$, являющееся одномерным подмногообразием без края. Тогда Λ состоит из конечного числа $l \geqslant 1$ компонент связности $\Lambda_1, \ldots, \Lambda_l$, каждая их которых является топологическим вложением окружности, и $f(\Lambda_i) = \Lambda_{i+1}$, $i = 1, \ldots, l-1$, а $f(\Lambda_l) = \Lambda_1$.

[4] Непрерывная зависимость от частной траектории понимается в смысле метрики $\bar{\rho}(\bar{x}, \bar{y}) = \sum\limits_{i=-\infty}^{\infty} \frac{\rho(x_i, y_i)}{2^{|i|}}$

Лемма 3.1. *Пусть Λ_i — компонента связности базисного множества Λ, удовлетворяющего условиям теоремы 1.1., и $p \in \Lambda_i$ — периодическая точка периода k отображения f. Тогда для отображения f^k неустойчивое многообразие $W^u_{\bar{p},\varepsilon}$ точки p, ассоциированное с траекторией $\bar{p} = \{\ldots, p, p, p, \ldots\}$ содержится в Λ_i.*

Доказательство. Так как в силу аксиомы A множество Λ является гиперболическим, то в силу предложения 2.2. для эндоморфизма f^k существуют локальное устойчивое $W^s_{p,\varepsilon}$ и локальное неустойчивое $W^u_{\bar{p},\varepsilon}$ многообразия такие, что $f^k(W^s_{p,\varepsilon}) \subset W^s_{p,\varepsilon}$ и $f^k(W^u_{\bar{p},\varepsilon}) \supset W^u_{\bar{p},\varepsilon}$. Так как отображение f^k не содержит в Λ критических точек, то f^k в некоторой окрестности точки p является локальным диффеоморфизмом. Тогда в силу теоремы Гробмана — Хартмана отображение f^k в некоторой окрестности точки p сопряжено линейному седлу. Из этого следует, что $W^s_{p,\varepsilon}$ и $W^u_{\bar{p},\varepsilon}$ являются единственными инвариантными одномерными подмногообразиями, проходящими через точку p. Так как множество Λ_i также является инвариантным подмногообразием, проходящим через точку p, то необходимо должно выполняться либо включение $W^s_{p,\varepsilon} \subset \Lambda_i$, либо включение $W^u_{\bar{p},\varepsilon} \subset \Lambda_i$.

Покажем, что включение $W^s_{p,\varepsilon} \subset \Lambda_i$ выполняться не может. Предположим противное, тогда устойчивое многообразие $W^s_{p,\varepsilon}$ является такой окрестностью точки p в базисном множестве Λ, что любая другая точка из этой окрестности стремится к точке p под действием эндоморфизма f^k. Получаем противоречие с тем, что периодические точки отображения f^k плотны в Λ.

Доказательство закончено.

Следствие 3.1. *Если Λ — базисное множество, удовлетворяющее условиям теоремы 1.1., то Λ, является гладким подмногообразием.*

Доказательство.

Данный факт немедленно вытекает из того, что в силу аксиомы A периодические точки плотны в Λ, а неустойчивые многообразия $W^u_{\bar{p},\varepsilon}$ периодических точек, ассоциированных с периодическими траекториями, являются гладкими подмногообразиями.

Следствие 3.2. *Если Λ — базисное множество, удовлетворяющее условиям теоремы 1.1., то для любой точки $x \in \Lambda$ локальное устойчивое многообразие W^s_x пересекается с Λ трансверсально.*

Доказательство.

Так как $W^s_{x,\varepsilon}$ и $W^u_{\bar{x},\varepsilon}$ касаются E^s_x и E^u_x, а E^s_x и E^u_x пересекаются трансверсально, то в силу доказанной леммы данный факт верен для периодических точек базисного множества Λ. Кроме того, в силу того, что периодические точки плотны в Λ, а локальное устойчивое многообразие W^s_x непрерывно зависит от точки $x \in \Lambda$, то данный факт верен для любой точки $x \in \Lambda$.

Доказательство теоремы 1.1.

Покажем, что Λ является аттрактором. В силу следствия 3.2. каждая точка $x \in \Lambda$ имеет локальное устойчивое многообразие W^s_x, трансверсальное базисному множеству Λ. Рассмотрим объединение $U = \bigcup\limits_{x \in \mathcal{S}_i} W^s_{x,\varepsilon}$. В силу предложения 2.2. локальное устойчивое многообразие $W^s_{x,\varepsilon}$ непрерывно зависит от точки x, поэтому множество U имеет вид локального прямого произведения отрезка на отрезок. Кроме того, из условия 3.a предложения 2.2. следует, что $f(\operatorname{cl} U) \subset \operatorname{Int} U$. Свойство $\bigcap\limits_{n=0}^{\infty} f^n(\operatorname{cl} U) = \Lambda$ следует непосредственно из определения локального устойчивого многообразия. Таким образом, базисное множество Λ действительно является аттрактором для эндоморфизма f.

Рассмотрим произвольную компоненту связности Λ_i базисного множества Λ и покажем, что ограничение $f^l|_{\Lambda_i}$ является растягивающим отображением окружности

Покажем, что в рассматриваемом случае локальное неустойчивое $W^u_{\bar{x},\varepsilon}$ многообразие произвольной точки $x \in \Lambda_i$ не зависит от выбора частной траектории $\bar{x}$, ассоциированной с точкой x. Для этого докажем включение $W^u_{\bar{x},\varepsilon} \subset \Lambda_i$ Предположим противное, то есть, что существует точка $x \in \Lambda_i$ и такая ассоциированная с ней частная траектория $\bar{x}' \subset \Lambda$, что $W^u_{\bar{x}',\varepsilon} \not\subset \Lambda_i$. Выберем точку y такую, что $y \in W^u_{\bar{x}',\varepsilon}$ и $y \notin \Lambda_i$, и чтобы выполнялось включение $y \in U$, где U — окрестность окружности Λ_i из определения аттрактора. Тогда по определению аттрактора $\rho(f^{ln}(y), \Lambda_i) \to 0$ при $n \to +\infty$. Выберем такое $k > 0$, $k \in \mathbb{N}$ что $y \notin \bigcap\limits_{n=0}^{k} f^{ln}(U)$. По определению неустойчивого многообразия существует точка $z \in W^u_{\bar{x}',\varepsilon}$ такая, что $f^{lt} = y$ для некоторого $t \in \mathbb{N}$, и $z \in \bigcap\limits_{n=0}^{k} f^{ln}(U)$. Но тогда точка y обязана принадлежать множеству $\bigcap\limits_{n=0}^{k} f^{ln}(U)$, что противоречит выбору точки y.

Так как окружность Λ_i является гладкой, то можно рассмотреть касательное пространство к данной окружности $T_{\Lambda_i}M^2$. В силу того, что неустойчивые многообразия точек Λ_i не зависят от выбранной траектории, и в силу пункта 1 предложения 2.2. в касательном пространстве $T_{\Lambda_i}M^2$ для отображения f^l имеют место оценки $||Df^{ln}(v)|| \geqslant (1/C)\mu^{-n}||v||$, $\mu < 1$, $n \in \{0\} \cup \mathbb{N}$, $v \in T_{\Lambda_i}M^2$. Следовательно ограничение $f^l|_{\Lambda_i}$ является растягивающим отображением в смысле определения 1.5.
Д о к а з а т е л ь с т в о з а к о н ч е н о.

Д о к а з а т е л ь с т в о т е о р е м ы 1.2.

Покажем, что Λ является репеллером. Заметим, что в силу того, что размерность неустойчивого многообразия совпадает с размерностью многообразия M^2, неустойчивое многообразие произвольной точки x не зависит от выбора конкретной частной траектории $\bar{x} \subset \Lambda$. Положим $U = \bigcup\limits_{x \in \Lambda} W^u_{x,\varepsilon}$ и рассмотрим замыкание $\mathrm{cl}\, U$. Свойство $\bigcap\limits_{n=0}^{-\infty} f^n(\mathrm{cl}\, U) = \Lambda$ следует непосредственно из определения локального неустойчивого многообразия. Положим $\widetilde{U} = f^{-1}(\mathrm{cl}\, U) \cap \mathrm{cl}\, U$. В силу пункта 3.б предложения 2.2. выполнятся включение $\widetilde{U} \subset \mathrm{Int}\, U$. Следовательно, окружность Λ действительно является репеллером эндоморфизма f.

Рассмотрим произвольную компоненту связности Λ_i базисного множества Λ. Аналогично теореме 1.1. выберем $l > 0$ так, чтобы $f^l(\Lambda_i) = \Lambda_i$. Покажем, что сужение $f^l|_{\Lambda_i}$ является растягивающим отображением окружности. В силу того, что для любых двух точек $x, y \in \Lambda_i$ таких, что $\rho(x, y) < \varepsilon$ верно и что $y \in W^u_{x,\varepsilon}$, то в силу предложения 2.2. на множества Λ_i для некоторого $\mu > 1$ будет выполнятся неравенство $\rho(f^l(x), f^l(y)) > \mu\rho(x, y)$. Таким образом ограничение $f^l|_{\Lambda_i}$ является растягивающим отображением в смысле определения 1.6.
Д о к а з а т е л ь с т в о з а к о н ч е н о.

Список литературы

1. Д. В. Аносов, “Геодезические потоки на замкнутых римановых многообразиях отрицательной кривизны”, *Тр. мат. ин-та им. В.А. Стеклова АН СССР*, **90** (1967), 1-210.

2. Д. В. Аносов, *Гладкие динамические системы*, Мир, 1977.

3. В. З. Гринес, Е. В. Жужома, “Структурно устойчивые диффеоморфизмы с базисными множествами коразмерности один”, *Изв. РАН. Сер. матем.*, **66**:2 (2002), 3-66.

4. В. З. Гринес, О. В. Починка, *Введение в топологическую классификацию каскадов на многообразиях размерности два и три*, Регулярная и хаотическая динамика (Москва: Ижевский институт компьютерных исследований), 2011.

5. V. Z. Grines, O. V. Pochinka, V. S. Medvedev, Y. A. Levchenko, “The topological classification of structural stable 3-diffeomorphisms with two-dimensional basic sets”, *Nonlinearity*, **28** (2015), 4081-4102.

6. G, Ikegami, “Hyperbolic sets and axiom A for endomorphisms”, *Proc. of the Institute of the Natural Sciences (Nihon Univ)*, **26** (1991), 69-86.

7. А. Б. Каток, Б. Хасселблат, *Введение в современную теорию динамических систем*, "Факториал", 1999.

8. М. Ю. Любич, “Динамика рациональных преобразований: топологическая картина”, *УМН*, **41**:4 (1986), 35-95.

9. А. Г. Майер, “Грубое преобразование окружности в окружность”, *Уч. Зап. ГГУ.*, **12** (1939), 215-229.

10. R. Mane, C. Pugh, “Stability of endomorphisms”, *Lecture Notes in Math*, **468** (1975), 175-184.

11. Дж. Милнор, *Голоморфная динамика: Вводные лекции*, Регулярная и хаотическая динамика, 2000.

12. Z. Nitecki, “Nonsingular endomorphisms of the circle”, *"Global Analysis", Proc. Symp. in Pure Math.*, **14** (1970), 203-220.

13. Р. В. Плыкин, “О топологии базисных множеств диффеоморфизмов Смейла”, *Матем. сб.*, **84**:2 (1971), 301-312.

14. F. Przytycki, “Anosov endomorphisms”, *Stud. Math.*, **58**:3 (1976), 249-285.

15. F. Przytycki, “On Ω-stability and structural stability of endomorphisms satisfying Axiom A”, *Stud. Math.*, **60** (1977), 61-77.

16. S. Smale, “Differentiable dynamical systems”, *Bull. Amer. Math. Soc.*, **73**:76 (1967), 747-817.

17. M. Shub, “Endomorphisms of compact differentiable manifols”, *Amer. J. Math*, **91** (1969), 175-199.

18. М. В. Якобсон, “О гладких отображениях окружности в себя”, *Матем. Сб.*, **85** (1970), 163-188.

Дата поступления 9.05.2016

On structure of one dimensional basic sets of endomorphisms of surfaces

© V. Z. Grines[5], E. D. Kurenkov[6].

Abstract. This paper deals with the study of the dynamics in the neighborhood of one-dimensional basic sets of C^k, $k \geq 1$, endomorphism satisfying axiom of A and given on surfaces. It is established that if one-dimensional basic set of endomorphism f has the type $(1,1)$ and is a one-dimensional submanifold without boundary, then it is an attractor smoothly embedded in ambient surface. Moreover, there is a $k \geq 1$ such that the restriction of the endomorphism f^k to any connected component of the attractor is expanding endomorphism. It is also established that if the basic set of endomorphism f has the type $(2,0)$ and is a one-dimensional submanifold without boundary then it is a repeller and there is a $k \geq 1$ such that the restriction of the endomorphism f^k to any connected component of the basic set is expanding endomorphism.

Key Words: axiom A, endomorphism, basic set

[5] Professor of Department of fundamental mathematics, Higher School of Economics, Nizhny Novgorod; vgrines@hse.ru

[6] Laboratory TAPRADESS, National Research University Higher School of Economics; ekurenkov@hse.ru