УДК 519.624

Непрерывный аналог модифицированного метода Ньютона

© И. П. Рязанцева[1], О. Ю. Бубнова[2]

Аннотация. В итерационном методе Ньютона необходимо обращать производную оператора решаемого уравнения на каждом шаге. В модифицированном методе Ньютона обратный к производной оператор обращается только в начальной точке итерационного процесса. При этом вычисления сокращаются, а скорость сходимости падает. Известен непрерывный аналог метода Ньютона. В данной заметке построен непрерывный аналог модифицированного метода Ньютона для уравнения с сильно монотонным оператором. Получены достаточные условия сильной сходимости предложенного метода в гильбертовом пространстве.

Ключевые слова: гильбертово пространство, сильно монотонный оператор, производная Фреше, непрерывный метод, оператор сжатия, сходимость

Пусть H – вещественное гильбертово пространство, (u, v) - скалярное произведение элементов u и v из H, оператор $A : H \to H$ обладает свойствами:
а) A - сильно монотонный оператор, т.е.

$$(Au - Av, u - v) \geq M\|u - v\|^2 \quad \forall u, v \in H, \quad M > 0; \tag{1.1}$$

б) A удовлетворяет на H условию Липшица с постоянной $L > 0$, т.е.

$$\|Au - Av\| \leq L\|u - v\| \quad \forall u, v \in H. \tag{1.2}$$

Кроме того, считаем оператор A дифференцируемым по Фреше на H, тогда из (1.1) следует неравенство (см. [1])

$$(A'(u)h, h) \geq M\|h\|^2 \quad \forall u, h \in H. \tag{1.3}$$

В наших условиях уравнение

$$Ax = f \tag{1.4}$$

имеет в H единственное решение x при любом элементе $f \in H$ (см. [2] с. 273).

Для нахождения решения (1.4) можно использовать непрерывный аналог метода Ньютона [3]

$$\frac{dy(t)}{dt} = -\gamma(t)[A'(y(t))]^{-1}(Ay(t) - f), \tag{1.5}$$

$$y(t_0) = y_0 \in H, \quad t \geq t_0 \geq 0. \tag{1.6}$$

При численной реализации этого метода необходимо обращать линейный оператор $A'(y(t))$, что требует больших временных затрат. Такая же проблема возникает при нахождении решения (1.4) итеративным методом Ньютона (см. [4], с. 401). Метод Ньютона для (1.4) удалось упростить, т. е. построить модифицированный метод Ньютона следующего вида

$$x_{n+1} = x_n - [A'(x_0)]^{-1}(Ax_n - f), \tag{1.7}$$

[1] Профессор кафедры прикладной математики, Нижегородский государственный технический университет им. Р.Е. Алексеева, Нижний Новгород; lryazantseva@applmath.ru

[2] Доцент кафедры математики, информатики и информационных технологий, Нижегородская академия МВД России, Нижний Новгород; bubnovaoyu@mail.ru

где x_0 - начальная точка итерационного процесса. При этом скорость сходимости (1.7) ухудшилась по сравнению со скоростью сходимости классического метода Ньютона. Интерес к непрерывным методам в настоящее время весьма высок, так как имеются обширные пакеты программ для их численной реализации. В силу сказанного целью данной заметки является построение на основе (1.7) непрерывного метода и исследование его сильной сходимости.

Подобно (1.5) (см. [3]) на основании (1.7) построим непрерывный аналог модифицированного метода Ньютона в следующей форме:

$$\frac{dz(t)}{dt} = -\gamma(t)[A'(z_0)]^{-1}(Az(t) - f), \tag{1.8}$$

$$z(t_0) = z_0 \in H, \quad t \geq t_0 \geq 0, \tag{1.9}$$

где $\gamma(t)$ - непрерывная функция при $t \geq t_0$, и

$$0 < \gamma(t) \leq \gamma_0 \quad \forall t \geq t_0. \tag{1.10}$$

Исследуем вопрос о разрешимости задачи Коши (1.8), (1.9). Для этого введем обозначение

$$G(t, u) = -\gamma(t)[A'(z_0)]^{-1}(Au - f), \;\; t \geq t_0, \quad u \in H.$$

В наших условиях оператор $G(t, u)$ непрерывен по t при $t \geq t_0$. Поскольку из (1.3) вытекает неравенство

$$\|[A'(u)]^{-1}\| \leq \frac{1}{M} \quad \forall u \in H, \tag{1.11}$$

то с учетом (1.10) и свойства (1.2) оператора A приходим к неравенству

$$\|G(t, z_1) - G(t, z_2)\| \leq \frac{\gamma_0 L}{M}\|z_1 - z_2\| \; \forall z_1, z_2 \in H.$$

Следовательно, задача Коши (1.8), (1.9) однозначно разрешима в классе функций $C^1[t_0, +\infty)$ (см. [4], пункт 33.4).

Исследуем поведение $z(t)$ при $t \to \infty$.

Сделаем дополнительные предположения:

в) пусть производная $A'(u)$ в открытом шаре

$$B(z_0, r) = \{u \mid \|u - z_0\| < r\}, \quad r > 0$$

, удовлетворяет условию Липшица с постоянной $l > 0$, т. е.

$$\|A'(u) - A'(v)\| \leq l\|u - v\| \quad \forall u, v \in B(z_0, r);$$

г) верны неравенства

$$\|Az_0\| \leq \rho, \quad \frac{2l\rho}{M^2} < 1, \quad r' = \frac{Mq}{l} < r,$$

где

$$q = 1 - \sqrt{1 - \frac{2l\rho}{M^2}}.$$

Очевидно, что $0 < q < 1$.

Построим оператор $C : H \to H$,

$$Cu = u - [A'(z_0)]^{-1}(Au - f).$$

В [4], с. 405 доказано, что в наших предположениях оператор C отображает замкнутый шар $\overline{B(z_0, r')}$ в себя и является сжимающим на $\overline{B(z_0, r')}$ с коэффициентом сжатия q, т. е.

$$\|Cu - Cv\| \leq q\|u - v\| \quad \forall u, v \in \overline{B(z_0, r')}. \tag{1.12}$$

Значит, существует единственная неподвижная точка оператора C в $\overline{B(z_0, r')}$, которая в наших предположениях совпадает с единственным решением x уравнения (1.4). Кроме того, оператор $F : H \to H$, $F = E - C$ в силу (1.12) обладает свойством

$$(Fu - Fv, u - v) = \|u - v\|^2 - (Cu - Cv, u - v) \geq (1 - q)\|u - v\|^2 \;\; \forall u, v \in \overline{B(z_0, r')}. \tag{1.13}$$

Следовательно, F - сильно монотонный оператор на $\overline{B(z_0, r')}$ с постоянной $1 - q$.

Построим для уравнения $Fx = 0$ непрерывный метод первого порядка (см., например, [5]). Этот метод совпадает с задачей Коши (1.8), (1.9), при этом (1.8) можно записать в следующей форме

$$\frac{dz(t)}{dt} + \gamma(t)Fz(t) = 0. \tag{1.14}$$

Чтобы воспользоваться свойством (1.13) оператора F на траекториях задачи Коши (1.14), (1.9), необходимо показать, что

$$z(t) \in \overline{B(z_0, r')} \quad \forall t \geq t_0. \tag{1.15}$$

Для решения этой проблемы сделаем еще одно предположение:
пусть справедливо неравенство

$$(Fu, u - z_0) \geq 0 \quad \text{при} \quad \|u - z_0\| \geq r'. \tag{1.16}$$

Доказательство (1.15) ведем от противного: пусть при некотором $t = \bar{t} > t_0$ верно неравенство $\|z(\bar{t}) - z_0\| > r'$. Тогда в силу (1.16)

$$(Fz(\bar{t}), z(\bar{t}) - z_0) \geq 0. \tag{1.17}$$

В то же время из (1.14) при $t = \bar{t}$ имеем

$$\left(\frac{dz(t)}{dt}, z(t) - z_0\right)\Big|_{t=\bar{t}} + \gamma(\bar{t})(Fz(\bar{t}), z(\bar{t}) - z_0) = 0.$$

Отсюда, приняв во внимание (1.10) и (1.17), приходим к неравенству

$$\frac{d\|z(t) - z_0\|}{dt}\Big|_{t=\bar{t}} \leq 0.$$

Таким образом, $\|z(t) - z_0\|$ не возрастает при всех $t > t_0$, для которых $\|z(t) - z_0\| > r'$. Следовательно, (1.15) доказано. Далее, из (1.14) без труда получаем равенство

$$\left(\frac{d(z(t) - x)}{dt}, z(t) - x\right) + \gamma(t)(Fz(t) - Fx, z(t) - x) = 0,$$

откуда с учетом свойства (1.13) оператора F имеем неравенство

$$\frac{d\|z(t) - x\|^2}{dt} \leq -2\gamma(t)(1 - q)\|z(t) - x\|^2.$$

Следовательно,

$$\|z(t) - x\|^2 \leq \|z_0 - x\|^2 \, exp\left(-2(1 - q)\int_{t_0}^{t} \gamma(\tau)d\tau\right). \tag{1.18}$$

Таким образом, доказано утверждение.

Т е о р е м а 1.1. *Пусть H – вещественное гильбертово пространство, дифференцируемый по Фреше оператор $A : H \to H$ обладает свойствами а), б), в), г), непрерывная положительная при $t \geq t_0 \geq 0$ функция $\gamma(t)$ удовлетворяет условию (1.10), и*

$$\int_{t_0}^{+\infty} \gamma(t)dt = +\infty,$$

оператор $F : H \to H$, $Fu = [A'(z_0)]^{-1}(Au - f)$ обладает свойством (1.16). Тогда задача Коши (1.8), (1.9) имеет единственное решение $z(t)$ класса $C^1[t_0, +\infty)$ такое, что справедливо (1.15), и $\|z(t) - x\| \to 0$ при $t \to +\infty$, причем имеет место оценка (1.18), здесь x – единственное решение уравнения (1.4).

Укажем, что (1.16) есть одно из достаточных условий существования решения x уравнения $Fx = 0$ с $\|x - z_0\| \leq r'$ (см. [2], с.262; [6], сс. 15, 104).

Вопрос о сравнении скорости сходимости непрерывных методов не ставится, так как путем замены переменной t можно добиться любой скорости сходимости непрерывного метода [5]. В то же время разные непрерывные методы могут давать разные по свойствам приближения к искомому решению, что дает возможность выбрать приближение к искомому решению с априорно известными свойствами.

Отметим, что свойства а), б) и (1.11) оператора A в доказательстве теоремы были использованы только на некотором ограниченном множестве.

Список литературы

1. Качуровский Р.И., "Нелинейные монотонные операторы в банаховых пространствах", *Успехи математических наук*, **XXIII**:2(140) (1968), 121–168.

2. Вайнберг М.М., *Вариационный метод и метод монотонных операторов в теории нелинейных уравнений*, Наука, Москва, 1972.

3. Гаврурин М.К., "Нелинейные функциональные уравнения и непрерывные аналоги итеративных методов", *Известия вузов. Математика*, 1958, № 5(6), 18–31.

4. Треногин В.А., *Функциональный анализ*, Наука, Москва, 1980.

5. Антипин А.С., "Непрерывные и итеративные процессы с операторами проектирования и типа проектирования", *Вопросы кибернетики. Вычисл. вопросы анализа больших систем. М.: Научный совет по комплексной проблеме "Кибернетика"АН СССР*, 1989, 5–43.

6. Рязанцева И.П., *Избранные главы теории операторов монотонного типа*, НГТУ, Нижний Новгород, 2008.

Дата поступления 29.02.2016

A continuous analogue of modified Newton method

© I. P. Ryazantseva[3], O. Yu. Bubnova[4]

Abstract. In the iterative Newton method we invert derivative of operator of equation for every step. In the modified Newton method we findinverse of derivative of operator only at initial point of iterative process. Then amount of calculations decreases and convergence speed falls. Continuous analog of Newton method is known. We construct the continuous analog of the modified Newton method for equation with strongly monotone operator in this note. We obtain sufficient conditions of strong convergence in Hilbert space for propose method.

Key Words: Hilbert space, strictly monotone operator, Frechet derivative, continuous method, operator of contraction, convergence

[3] Professor of Applid Mathematics Chair, Nizhny Novgorod State Tehnical University after R.E. Alekseev, Nizhny Novgorod; lryazantseva@applmath.ru

[4] Associate Professor of Department of Mathematics, Computer Science and Information Technology, Nizhny Novgorod Academy of the Ministry of Internal Affairs of Russia, Nizhny Novgorod; bubnovaoyu@mail.ru