УДК 517.956.2

О существовании периодических траекторий для непрерывных потоков Морса-Смейла

© В. З. Гринес[1], Е. В. Жужома[2], В. С. Медведев[3], Н. А. Тарасова[4]

Аннотация. В работе рассматривается класс непрерывных потоков Морса-Смейла, заданных на топологическом замкнутом многообразии M^n, размерность n которого не ниже трех, и таких, что устойчивые и неустойчивые многообразия различных седловых состояний равновесия не имеют пересечений. Устанавливается взаимосвязь между существованием у таких потоков замкнутых траекторий и топологией несущего многообразия. А именно, доказано, что если f^t – непрерывный поток Морса-Смейла из рассматриваемого класса обладает μ стоковыми и источниковыми состояниями равновесия и ν седлами коразмерности один, а фундаментальная группа $\pi_1(M^n)$ не содержит подгруппы, изоморфной свободному произведению $g = \frac{1}{2}(\nu - \mu + 2)$ экземпляров группы целых чисел $\mathbb{Z}$, то поток f^t имеет по крайней мере одну периодическую траекторию.

Ключевые слова: потоки Морса-Смейла, периодические траектории, гетероклинические траектории

1. Введение и формулировка основного результата

В настоящей работе рассматриваются непрерывные потоки Морса-Смейла без гетероклинических пересечений на замкнутом n-мерном топологическом многообразии M^n, $n \geq 3$ (основные понятия и факты теории динамических систем см. в [1], по системам Морса-Смейла см. книгу [3] и обзор [5]). Для формулировки основного результата приведем необходимые определения.

Пусть f^t – непрерывный поток на M^n. Это означает, что для любого $t \in \mathbb{R}$ задан гомеоморфизм $f_t : M^n \to M^n$ так, что $f_0 = id$ есть тождественное отображение и $f_{t_1+t_2} = f_{t_1} \circ f_{t_2}$ для любых t_1, $t_2 \in \mathbb{R}$. Напомним, что точка $x \in M^n$ называется *неблуждающей*, если для любой ее окрестности $U(x) = U$ и числа $T > 0$ найдется $t_0 \geq T$ такое, что $U(x) \cap f_{t_0}(U) \neq \emptyset$. Множество неблуждающих точек образует неблуждающее множество потока, которое обозначается через $NW(f^t)$. Известно, что $NW(f^t)$ состоит из целых траекторий, то есть является инвариантным множеством потока. Если N_1, N_2 – инвариантные множества потоков f_1^t, f_2^t соответственно, то будем говорить, что эти потоки *локально топологически эквивалентны* на N_1, N_2, если существуют окрестности $U(N_1)$, $U(N_2)$ и гомеоморфизм $\varphi : U(N_1) \to U(N_2)$ такой, что $\varphi(N_1) = N_2$ и φ отображает каждую траекторию (или часть траектории), принадлежащую $U(N_1)$, в траекторию (или часть траектории), принадлежащую $U(N_2)$, при этом концевые точки дуг траекторий из $U(N_1)$ должны переходить в концевые точки дуг траекторий из $U(N_2)$.

В связи с открытием в середине прошлого века топологических многообразий, которые не допускают гладкой структуры (см., например [11]), такие проблемы, как существова-

[1] профессор кафедры фундаментальной математики, Национальный исследовательский университет «Высшая школа экономики», Нижний Новгород; vgrines@yandex.ru

[2] профессор кафедры фундаментальной математики, Национальный исследовательский университет «Высшая школа экономики», Нижний Новгород; zhuzhoma@mail.ru

[3] научный сотрудник лаборатории ТАПРАДЕСС, Национальный исследовательский университет «Высшая школа экономики», Нижний Новгород; vmedvedev@hse.ru

[4] доцент кафедры ИМД, Институт пищевых технологий и дизайна, Нижний Новгород; tarasova-na-an@rambler.ru

ние периодических траекторий и исследование топологической структуры несущего многообразия, должны рассматриваться не только для гладких потоков на гладких многообразиях, но и для непрерывных потоков на топологических многообразиях. Особый интерес представляют непрерывные потоки, у которых неблуждающие множества аналогичны неблуждающим множествам гладких потоков с гиперболической структурой, поскольку последние обладают определенным типом устойчивости [2]. Простейшими потоками с такими неблуждающими множествами являются потоки Морса-Смейла, введенные Смейлом [13] (см. также [2], [5] с историческими комментариями). Будем называть f^t непрерывным *потоком Морса-Смейла*, если выполняются следующие условия:

1) неблуждающее множество $NW(f^t)$ состоит из конечного набора состояний равновесия и периодических траекторий, причем α- и ω-предельные множества любой траектории лежат в $NW(f^t)$;

2) в окрестности каждой траектории из $NW(f^t)$ поток локально топологически эквивалентен потоку либо с гиперболической периодической траекторией, либо с гиперболическим состоянием равновесия. Как следствие, для каждой траектории $l \subset NW(f^t)$ определяются (и существуют) устойчивое и неустойчивое многообразия $W^s(l)$, $W^u(l)$ соответственно, которые являются топологически вложенными подмногообразиями;

3) для любых траекторий l_1, $l_2 \subset NW(f^t)$ многообразия $W^s(l_1)$, $W^u(l_2)$ топологически трансверсальны (это означает, что в окрестности любой точки из $W^s(l_1) \cap W^u(l_2)$ пересечение многообразий $W^s(l_1)$, $W^u(l_2)$ локально гомеоморфно трансверсальному пересечению гиперплоскостей в n-мерном евклидовом пространстве $\mathbb{R}^n$).

Из конечности числа неблуждающих орбит вытекает, что инвариантные многообразия фиксированной неблуждающей орбиты пересекаются только вдоль самой орбиты.

Состояние равновесия (иногда будем говорить, неподвижная точка) $p \in NW(f^t)$ называется *узлом*, если либо $\dim W^s(p) = n$ (в этом случае p называется *стоком*, либо $\dim W^u(p) = n$ (в этом случае p называется *источником*). Неподвижная точка $\sigma \in NW(f^t)$ называется *седлом*, если ее устойчивое и неустойчивое многообразия имеют ненулевую топологическую размерность. Напомним, что индексом Морса седловой неподвижной точки называется размерность ее неустойчивого многообразия. Будем говорить, что седловая неподвижная точка является седлом коразмерности один, если ее индекс Морса равен 1 или $n-1$ (это эквивалентно тому, что одно инвариантное многообразие орбиты одномерное, а второе – коразмерности один).

Основной результат статьи содержится в следующей теореме.

Теорема 1.1. *Пусть f^t – непрерывный поток Морса-Смейла, заданный на замкнутом ориентируемом топологическом многообразии M^n размерности $n \geq 3$, такой, что*

1) неблуждающее множество $NW(f^t)$ содержит μ узлов и ν седел коразмерности один[5];

2) инвриантные многообразия различных седловых состояний равновесия не пересекаются;

3) фундаментальная группа $\pi_1(M^n)$ не содержит подгруппы, изоморфной свободному произведению $g = \frac{1}{2}(\nu - \mu + 2)$ экземпляров группы целых чисел $\mathbb{Z}$.

Тогда поток f^t имеет по крайней мере одну периодическую траекторию.

Благодарности. Авторы благодарят О.В. Починку, а также участников семинара «Топологическая динамика», в Национальном исследовательском университете «Высшая

[5] Отметим, что поток f^t может содержать также произвольное количество седел, коразмерность которых отлична от единицы.

школа экономики» за полезные обсуждения. Авторы благодарят РФФИ, грант 15-01-03689-а, и РНФ, грант 14-41-00044, за финансовую поддержку. Исследование осуществлено в рамках Программы фундаментальных исследований НИУ ВШЭ в 2016 году (проект 98).

2. Доказательство основного результата

Предположим, что поток f^t Морса-Смейла не имеет периодических траекторий. Сперва докажем следующий вспомогательный результат. Пусть σ – седло коразмерности один потока Морса-Смейла f^t на замкнутом ориентируемом топологическом многообразии M^n размерности $n \geq 3$ без гетероклинических пересечений, и предположим для определенности, что $\dim W^s(\sigma) = 1$, $\dim W^u(\sigma) = n-1$. Тогда топологическое замыкание $clos\ W^u(\sigma)$ является топологически вложенной $(n-1)$-мерной сферой S^{n-1}, состоящей из $W^u(\sigma)$ и некоторого стока s_0, $S^{n-1} = W^u(\sigma) \cup s_0$. Более того, существует окрестность U сферы S^{n-1}, гомеоморфная $S^{n-1} \times (-1;+1)$ и такая, что $f_T(clos\ U) \subset U$ для достаточно большого сдвига f_T на время T окрестности U вдоль траекторий потока f^t.

Действительно, из неравенства $n \geq 3$ вытекает, что размерность $\dim W^u(\sigma) = n-1 \geq 2$. Отсюда и из отсутствия гетероклинических пересечений следует, что замыкание $clos\ W^u(\sigma)$ состоит из неустойчивого многообразия $W^u(\sigma)$ и одного стока, скажем s_0. Поэтому $clos\ W^u(\sigma) = W^u(\sigma) \cup s_0$ является топологически вложенной $(n-1)$-мерной сферой, которую мы обозначим через S^{n-1}. Для $n = 3$ существование требуемой окрестности U сферы S^{n-1} доказано в [7], а для $n \geq 4$ – в [9]. Вспомогательное утверждение доказано. Отметим, что аналогичное утверждение справедливо для седла σ коразмерности один с $\dim W^s(\sigma) = n-1$, $\dim W^u(\sigma) = 1$. В этом случае $clos\ W^s(\sigma)$ состоит из $W^s(\sigma)$ и одного источника, скажем s_0, и топологически вложенная $(n-1)$-мерная сфера $S^{n-1} = W^s(\sigma) \cup s_0$ имеет окрестность U, гомеоморфную $S^{n-1} \times (-1;+1)$ и такую, что $f_{-T}(clos\ U) \subset U$ для достаточно большого $T > 0$.

Вернемся к доказательству теоремы. Возьмем произвольное седло σ коразмерности один, и предположим для определенности, что $\dim W^s(\sigma) = 1$, $\dim W^u(\sigma) = n-1$. По доказанному ранее утверждению, топологическое замыкание $clos\ W^u(\sigma)$ является топологически вложенной $(n-1)$-мерной сферой S^{n-1}, состоящей из $W^u(\sigma)$ и некоторого стока s_0, $S^{n-1} = W^u(\sigma) \cup s_0$, и существует окрестность U сферы S^{n-1}, гомеоморфная $S^{n-1} \times (-1;+1)$, такая, что $f_T(clos\ U) \subset U$. Если удалить из M^n окрестность U, то получим многообразие M_1^n (возможно, несвязное) с двумя граничными компонентами S_1^{n-1}, S_2^{n-1}, гомеоморфными S^{n-1}. Из включения $f_T(clos\ U) \subset U$ вытекает, что к каждой компоненте S_1^{n-1}, S_2^{n-1} можно подклеить шары B_1^n, B_2^n соответственно, и продолжить поток на эти шары так, чтобы внутри каждого B_1^n, B_2^n был ровно один сток. В результате мы получим поток Морса-Смейла f_1^t на M_1^n, у которого по сравнению с f^t на одно седло коразмерности один меньше и на один узел (в данном случае, сток) больше. Будем называть описанную процедуру разрезанием вдоль сепаратрисы коразмерности один.

Проделав ν разрезаний вдоль сепаратрис коразмерности один для всех седел коразмерности один, мы получим поток f_ν^t на M_ν^n Морса-Смейла, у которого в неблуждающем множестве содержатся $\mu + \nu$ узлов и нет седел коразмерности один. Из отсутствия седел коразмерности один следует, что на каждой компоненте связности многообразия M_ν^n имеется ровно один источник и ровно один сток [4]. Отсюда следует, что число компонент связности многообразия M_ν^n равно $k = \frac{1}{2}(\mu + \nu)$. В частности, число $\mu + \nu$ четное, и на каждой компоненте связности построенный промежуточный поток полярный.

Обозначим через $S^{n-1} \otimes S^1$ тотальное пространство локально тривиального расслоения $(S^{n-1} \otimes S^1, S^1, S^{n-1})$ над окружностью S^1 со слоем, являющимся $(n-1)$-мерной S^{n-1}.

Известно, что любые два, либо сохраняющие, либо обращающие ориентацию, гомеоморфизма $S^{n-1} \to S^{n-1}$ изотопны [6], [8]. Поэтому с точностью до гомеоморфности имеются только два тотальных пространства $S^{n-1} \otimes S^1$, одно из которых является прямым произведением $S^{n-1} \times S^1$, которое соответствует тривиальному расслоению $S^{n-1} \times S^1 \to S^1$.

Восстановление исходного многообразия M^n после разрезаний вдоль сепаратрис коразмерности один из полученных компонент связности дает связную сумму

$$M^n = \left(S^{n-1} \otimes S^1\right) \sharp \cdots \sharp \left(S^{n-1} \otimes S^1\right) \sharp N_1^n \sharp \cdots \sharp N_k^n, \tag{2.1}$$

поскольку каждое разрезание производилось по сфере коразмерности один с последующим приклеиванием n-мерного шара. В этой связной сумме N_1^n, ..., N_k^n суть компоненты связности многообразия M_ν^n. Число разрезаний исходного многообразия, которое не приводит к увеличению числа компонент связности, равно $g = \nu - \frac{1}{2}(\mu + \nu) + 1 = \frac{1}{2}(\nu - \mu + 2)$. Каждое такое разрезание означает наличие в связной сумме слагаемого $S^{n-1} \otimes S^1$.

Поскольку многообразие M^n ориентируемое, то все расслоения $S^{n-1} \otimes S^1$ являются тривиальными и, следовательно, связная сумма в (2.1) примет вид

$$M^n = \left(S^{n-1} \times S^1\right) \sharp \cdots \sharp \left(S^{n-1} \times S^1\right) \sharp N_1^n \sharp \cdots \sharp N_k^n.$$

Отсюда и из теоремы Ван-Кампена следует, что $\pi_1(M^n)$ содержит подгруппу изоморфную свободному произведению $g = \frac{1}{2}(\nu - \mu + 2)$ экземпляров $\mathbb{Z}$ группы целых чисел $\mathbb{Z} * \cdots * \mathbb{Z}$. Полученное противоречие доказывает утверждение теоремы. $\square$

Список литературы

1. Аносов Д.В., “Исходные понятия. Элементарная теория”, *Современные проблемы математики, Фундаментальные направления (Итоги науки и техники)*, **1** (1985), 156–204.

2. Аносов Д.В., “Грубые системы”, *Труды МИАН СССР*, **169** (1985), 59–93.

3. Гринес В.З., Починка О.В., *Введение в топологическую классификацию диффеоморфизмов на многообразиях размерности два и три*, Издательство РХД, Москва-Ижевск, 2011.

4. Гринес В.З., Жужома Е.В., Медведев В.С., Починка О.В., “Глобальные аттрактор и репеллер диффеоморфизмов Морса-Смейла”, *Труды МИАН*, **271** (2010), 1–20.

5. Жужома Е.В., Медведев В.С., “Глобальная динамика систем Морса-Смейла”, *Труды МИАН*, **261** (2008), 115–139.

6. Келдыш Л.В., “Топологические вложения в евклидово пространство”, *Труды МИАН СССР*, **81** (1966), 1–184.

7. Bonatti C., Grines V., Medvedev V., Pecou E., “Three-dimensional manifolds admitting Morse-Smale diffeomorphisms without heteroclinic curves”, *Topology and Appl.*, **117** (2002), 335–344.

8. Daverman R.J., Venema G.A., *Embeddings in Manifolds*, GSM, Amer. Math. Soc., Providence, 2009.

9. Grines V., Gurevich E., Pochinka O., "Topological classification of Morse-Smale diffeomorphisms without heteroclinic intersection", *Journal of Mathematical Sciences*, **208**:1 (2015), 81–90.

10. Hirch M., Pugh C., Shub M., *Invariant Manifolds. 583*, Springer-Verlag, Berlin-N.Y., 1977.

11. Milnor J., "On manifolds homeomorphic to the 7-sphere", *Annals of Math.*, **64**:2 (1956), 399–405.

12. Robinson C., *Dynamical Systems: stability, symbolic dynamics, and chaos. Studies in Adv. Math.*, CRC Press, Boca Raton, FL, 1999.

13. Smale S., "Morse inequalities for a dynamical system", *Bull. Amer. Math. Soc.*, **66** (1960), 43–49.

14. Smale S., "Differentiable dynamical systems", *Bull. Amer. Math. Soc.*, **66**:1 (1967), 741–817 (перевод *Успехи мат. наук* 25(1970), 113–185).

Дата поступления 9.05.2016

On the existence of periodic orbits for continuous Morse-Smale flows

© V. Z. Grines[6], E. V. Zhuzhoma[7], V. S. Medvedev[8], N. A. Tarasova[9]

Abstract. We consider the class of continuous Morse-Smale flows defined on a topological closed manifold M^n of dimension n which is not less than three, and such that the stable and unstable manifolds of saddle equilibrium states do not have intersection. We establish a relationship between the existence of such flows and topology of closed trajectories and topology of ambient manifold. Namely, it is proved that if f^t (that is a continuous Morse-Smale flow from considered class) has mu sink and source equilibrium states and ν saddles of codimension one, and the fundamental group $\pi_1(M^n)$ does not contain a subgroup isomorphic to the free product $g = \frac{1}{2}(\nu - \mu + 2)$ copies of the group of integers $\mathbb{Z}$, then the flow f^t has at least one periodic trajectory.

Key Words: Morse-Smale flows, periodic orbits, heteroclinic orbits

[6] professor of Department of fundamental mathematics, Higher School of Economics, Nizhny Novgorod; vgrines@yandex.ru

[7] professor of Department of fundamental mathematics, Higher School of Economics, Nizhny Novgorod; zhuzhoma@mail.ru

[8] researcher TAPRADESS laboratory, Higher School of Economics, Nizhny Novgorod; vmedvedev@hse.ru

[9] associate professor of Department of IMD , Institute of food technology and design, Nizhny Novgorod; tarasova-na-an@rambler.ru