УДК 517.9

Диффеоморфизмы 3-многообразий с одномерными базисными множествами просторно расположенными на 2-торах

© **В. З. Гринес**[1], **О. В. Починка**[2], **А. А. Шиловская**[3]

Аннотация. В настоящей работе рассматривается класс G А-диффеоморфизмов f, заданных на замкнутом 3-многообразии M^3 и имеющих неблуждающее множество, расположенное на конечном числе попарно непересекающихся ручно вложенных в M^3 f-инвариантных двумерных торов так, что каждый тор T есть объединение $W^u_{B_T} \cup W^u_{\Sigma_T}$, либо $W^s_{B_T} \cup W^s_{\Sigma_T}$, где B_T — одномерное базисное множество, просторно расположенное на T и Σ_T — конечное число периодических точек с одинаковым индексом Морса. Установлено, что объемлющее многообразие, допускающее такие диффеоморфизмы гомеоморфно факторпространству $M_{\widehat{J}} = \mathbb{T}^2 \times [0,1]/_\sim$, где $(z,1) \sim (\widehat{J}(z), 0)$ для некоторого алгебраического автоморфизма тора $\widehat{J}$, заданного матрицей $J \in GL(2,\mathbb{Z})$, которая есть либо гиперболическая, либо $J = \pm Id$. Показано, что любой диффеоморфизм $f \in G$ полусопряжен локально прямому произведению Аносовского диффеоморфизма и грубого преобразования окружности. Доказано, что структурно устойчивый диффеоморфизм $f \in G$ топологически сопряжен локально прямому произведению обобщенного DA-диффеоморфизма и грубого преобразования окружности. Для таких диффеоморфизмов найдена полная система топологических инвариантов и в каждом классе топологической сопряженности построен стандартный представитель.

Ключевые слова: А-диффеоморфизм, DA-диффеоморфизм, топологический инвариант, топологическая сопряженность

Пусть f — диффеоморфизм замкнутого гладкого 3-многообразия M^3, удовлетворяющий аксиоме A С. Смейла, согласно которой множество неблуждающих точек $NW(f)$ является гиперболическим и периодические точки плотны в $NW(f)$. Напомним, что замкнутое f-инвариантное множество $\Lambda \subset M^3$ называется *гиперболическим*, если существует непрерывное Df-инвариантное разложение касательного подрасслоения $T_\Lambda M$ в сумму $E^s_\Lambda \oplus E^u_\Lambda$ устойчивого и неустойчивого подрасслоений таких, что выполняются оценки: $\|Df^k(v)\| \leq C\lambda^k\|v\|, \quad \|Df^{-k}(w)\| \leq C\lambda^k\|w\|, \quad \forall v \in E^s_\Lambda, \forall w \in E^u_\Lambda, \forall k \in \mathbb{N}$, для некоторых фиксированных чисел $C > 0$ и $\lambda < 1$. Гиперболическая структура множества Λ приводит к существованию у каждой точки $x \in \Lambda$ *устойчивого* W^s_x и *неустойчивого* W^u_x многообразий, которые определяются следующим образом: $W^s_x = \{y \in M^3 : \lim\limits_{k\to+\infty} d(f^k(x), f^k(y)) = 0\}$, $W^u_x = \{y \in M^3 : \lim\limits_{k\to-\infty} d(f^k(x), f^k(y)) = 0\}$, где d — метрика на Λ, индуцированная римановой метрикой на $T_\Lambda M^3$.

Согласно спектральной теореме С. Смейла [24] неблуждающее множество $NW(f)$ А-диффеоморфизма, удовлетворяющего аксиоме A, f представляется в виде конечного объединения попарно непересекающихся замкнутых инвариантных множеств $B_1, \dots, B_n$, называемых *базисными*, каждое из которых содержит всюду плотную траекторию. Назовем *типом базисного множества* B_i пару неотрицательных чисел (a_i, b_i) таких, что $a_i = dim\ W^u_x$, $b_i = dim\ W^s_x$ для любой точки $x \in B_i$, причем $b_i = 3 - a_i$.

Базисное множество называется *нетривиальным*, если оно отлично от периодической орбиты (в том числе отлично и от неподвижной точки), и *тривиальным* в противном

[1] Профессор кафедры фундаментальной математики Национального исследовательского университета Высшая школа экономики; vgrines@hse.ru

[2] Заведующая кафедрой фундаментальной математики Национального исследовательского университета Высшая школа экономики; opochinka@hse.ru

[3] Аспирант кафедры дифференциальных уравнений, математического и численного анализа, ННГУ им. Н.И. Лобачевского, г.Нижний Новгород; a.shilovskaia@gmail.com

случае. Заметим, что для любого нетривиального базисного множества B_i выполняется условие $a_i \cdot b_i \neq 0$.

В силу [21] базисное множество является *аттрактором (репеллером)* тогда и только тогда, когда оно содержит неустойчивые (устойчивые) многообразия своих точек. Однако размерность базисного множества, вообще говоря, может не совпадать с размерностью неустойчивых (устойчивых) многообразий его точек. В случае, если размерность аттрактора (репеллера) совпадает с размерностью неустойчивых (устойчивых) многообразий его точек, то аттрактор (репеллер) называется *растягивающимся (сжимающимся).* Базисное множество, не являющееся аттрактором или репеллером, называется *седловым.*

Диффеоморфизмы с базисными множествами, топологическая размерность которых равна трем, были полностью изучены в конце 60-х годов прошлого века, а именно, было доказано, что они являются диффеоморфизмами Аносова, а многообразие M^3 есть трехмерный тор T^3, который и есть единственное базисное множество, являющееся аттрактором и репеллером одновременно. В работах [6], [18] Фрэнкса и Ньюхауса была получена топологическая классификация таких диффеоморфизмов (перевод работ см. в [19]).

Если базисное множество А-диффеоморфизма трехмерного многообразия является двумерным, то в силу [21] оно является аттрактором или репеллером. А. Брауном в [1] доказано, что если неблуждающее множество А-диффеоморфизма $f: M^3 \to M^3$ содержит двумерный аттрактор (репеллер), то он является либо растягивающимся аттрактором (сжимающимся репеллером), либо поверхностным аттрактором (поверхностным репеллером), то есть аттрактором, принадлежащим замкнутой (компактной без края) f-инвариантной поверхности, называемой *носителем.*

В работе Гринеса В.З. и Жужомы Е.В. ([11])[4] получена топологическая классификация структурно устойчивых диффеоморфизмов $f: M^3 \to M^3$ в предположении, что их неблуждающее множество содержит двумерный растягивающийся аттрактор (сжимающийся репеллер). Ими было доказано, что в этом случае несущее многообразие диффеоморфно трехмерному тору и неблуждающее множество содержит в точности одно нетривиальное (отличное от периодической орбиты) базисное множество.

В работе Гринеса В.З., Медведева В.С. и Жужомы Е.В. [13] доказано, что любое поверхностное двумерное базисное множество совпадает со своим носителем, являющимся объединением конечного числа ручно вложенных в M^3 двумерных торов. Кроме того, ограничение некоторой степени диффеоморфизма f на носитель сопряжено с гиперболическим автоморфизмом тора[5]. Следует подчеркнуть, что носитель двумерного поверхностного множества диффеоморфизма f может быть негладким в каждой своей точке (соответствующий пример имеется в [15]).

В серии работ В.З. Гринеса, Ю.А. Левченко, В.С. Медведева, О.В. Починки [10], [8], [7], [9], начиная с 2012 г., рассматривались A-диффеоморфизмы $f: M^3 \to M^3$ в предположении, что их нетривиальные базисные множества являются двумерными и поверхностными. В работе [9] доказано, что любой такой диффеоморфизм f объемлюще Ω-сопряжен (а если f – структурно устойчивый, то топологически сопряжен) некоторому модельному диффеоморфизму ϕ, являющемуся локально прямым произведением алгебраического

[4] В действительности в работе [11] получены более общие результаты для диффеоморфизма f, заданного на n-мерном многообразии ($n \geq 3$) при условии, что его неблуждающее множество содержит ориентируемый растягивающийся аттрактор. Однако в случае $n = 3$ условие ориентируемости можно опустить [12].

[5] *Гиперболическим автоморфизмом тора* $T^2 = \mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2$ называется диффеоморфизм $\widehat{C}$, задаваемый целочисленной унимодулярной матрицей $C = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, собственные значения λ_1, λ_2 которой удовлетворяют условиям $|\lambda_1| < 1$, $|\lambda_2| > 1$. То есть $\widehat{C}(x,y) = (ax+by, cx+dy)\ mod\ 1$

преобразования тора, заданного гиперболической матрицей $C \in GL(2,\mathbb{Z})$, и грубого преобразования окружности. Для модельных диффеоморфизмов установлен алгебраический критерий их принадлежности одному и тому же классу топологической сопряженности. Показано, что объемлющее многообразие, допускающее рассматриваемые диффеоморфизмы, является факторпространством $M_{\widehat{J}} = \mathbb{T}^2 \times [0,1]/_{\sim}$, где $(z,1) \sim (\widehat{J}(z),0)$ для некоторого алгебраического автоморфизма тора $\widehat{J}$, заданного матрицей $J \in GL(2,\mathbb{Z})$, которая есть либо гиперболическая, либо $J = \pm Id$.

Из вышесказанного понятно, что наличие базисных множеств размерности 3 и 2 налагает существенные ограничения на динамику диффеоморфизма и топологию его несущего многообразия. Из работ [3], [16], [25] следует, что условие существования нульмерного или одномерного базисного множества A-диффеоморфизма $f : M^3 \to M^3$ не накладывает ограничений на топологию объемлющего многообразия.

Изучению диффеоморфизмов на M^3, неблуждающее множество которых содержит одномерные базисные множества, посвящен целый ряд работ [4], [2], [3], [26], [27] Х. Бонатти, Х. Боте, Р. Вильямса, Е. Жужомы, Н. Исаенковой и др. При этом в работах [2], [3], [26], [27] базисные множества являлись одномерными растягивающимися аттракторами или сжимающимися репеллерами и не лежали на поверхностях, а диффеоморфизмы не были структурно устойчивыми. Вопрос существования структурно устойчивых диффеоморфизмов такого типа (с растягивающимся аттрактором) до сих пор остается открытым.

В работе [4] Х. Бонатти и Н. Гельман был изучен класс структурно устойчивых диффеоморфизмов, неблуждающее множество которого состоит в точности из одного одномерного аттрактора и одного репеллера, каждый из которых лежит на двумерной поверхности с непустым краем. Подчеркнем, что вопрос о топологической классификации вышеописанных диффеоморфизмов также не рассматривался.

В настоящей работе рассматривается класс G А-диффеоморфизмов f, заданных на замкнутом 3-многообразии M^3 и имеющих неблуждающее множество, расположенное на конечном числе попарно непересекающихся ручно вложенных в M^3 f-инвариантных двумерных торов так, что каждый тор T есть объединение $W^u_{B_T} \cup W^u_{\Sigma_T}$, либо $W^s_{B_T} \cup W^s_{\Sigma_T}$, где B_T — одномерное базисное множество, просторно расположенное на T и Σ_T — конечное число периодических точек с одинаковым индексом Морса. Под просторной расположенностью базисного множества B_T мы понимаем следующее. Положим $\hat{W}^s_x = W^s_x \cap T$ и $\hat{W}^u_x = W^u_x \cap T$ для любой точки $x \in B_T$. Следуя [20], множество B_T назовем *просторно расположенным* на T, если для различных точек $x, y \in B_T$ любая замкнутая кривая, составленная из дуг $[x,y]^s \subset \hat{W}^s_x$ и $[x,y]^u \subset \hat{W}^u_x$ не гомотопна нулю на T. Диффеоморфизм из класса G получается, например, из следующей конструкции.

Рассмотрим алгебраический автоморфизм тора $\widehat{C} : \mathbb{T}^2 \to \mathbb{T}^2$, индуцированный гиперболической матрицей $C \in GL(2,\mathbb{Z})$. Пусть p_0 – неподвижная седловая точка диффеоморфизма $\widehat{C}$, соответствующая началу координат в $\mathbb{R}^2$ с собственными значениями λ^u и λ^s. В некоторой окрестности U точки p_0 введем локальные координаты x_1, x_2, в которых матрица линейного отображения $\widehat{C}$ диагональная, то есть $\widehat{C}(x_1,x_2) = (\lambda^u x_1, \lambda^s x_2)$ на U. Выберем значение $r_0 \in (0, \frac{1}{2})$ так, чтобы 2-шар $B_{r_0}(p_0)$ радиуса r_0 с центром в точке p_0 содержался в U. Пусть $\delta(r)$ – функция одной переменной такая, что $0 \le \delta(r) \le 1$ для всех r, $\delta'(r) < 0$ для $r_0/2 < r < r_0$ и $\delta(r) = \begin{cases} 0, & r \ge r_0, \\ 1, & r \le r_0/2. \end{cases}$

Рассмотрим систему дифференциальных уравнений $\dot{x}_1 = 0$, $\dot{x}_2 = x_2\delta(\| x \|)$. Пусть η^t – поток этой системы, $\eta^t(x_1,x_2) = (x_1, \eta^t_2(x_1,x_2))$. Тогда $\eta^t = id$ вне шара $B_{r_0}(p_0)$ и $D\eta^t_p = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & e^t \end{pmatrix}$. Положим $f_{\widehat{C},p_0} = \eta^\tau \widehat{C}$ для некоторого $\tau > 0$ такого, что $e^\tau \lambda^s > 1$.

Заметим, что $Df_{\widehat{C},p_0} = \begin{pmatrix} \lambda^u & 0 \\ 0 & e^\tau \lambda^s \end{pmatrix}$, так что p_0 – гиперболический источник. По построению диффеоморфизм $f_{\widehat{C},p_0}$ сохраняет устойчивое слоение диффеоморфизма Аносова, и координатные оси $f_{\widehat{C},p_0}$ — инвариантны. Поскольку диффеоморфизмы η^τ и $\widehat{C}$ имеют противоположные направления движения на оси Ox_2, то диффеоморфизм $f_{\widehat{C},p_0}$ имеет две симметричные относительно p_0 неподвижные точки q_1, q_2 на оси Ox_2, которые являются гиперболическими седловыми точками (см. рис. 1.1).

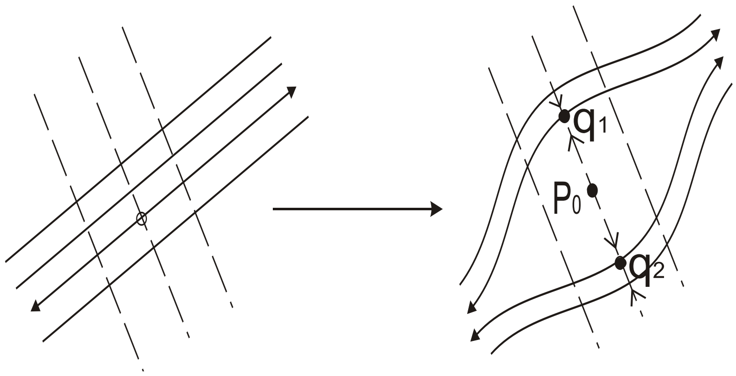

Рисунок **1.1**

Хирургическая операция Смейла

Для диффеоморфизма $f_{\widehat{C},p_0}$ множество $\Lambda = \mathbb{T}^2 \setminus W^u_{p_0}$ является одномерным аттрактором и спектральное разложение имеет вид $\{p_0, \Lambda\}$ (см. например [23]). Построенный таким образом одномерный аттрактор Λ является растягивающимся, а про диффеоморфизм $f_{\widehat{C},p_0}$ говорят, что он получен из гиперболического автоморфизма $\widehat{C}$ *раздутием* неподвижной точки p_0 вдоль неустойчивых многообразий.

Зададим диффеоморфизм φ на $\mathbb{S}^1 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = 1\}$ формулой $\varphi(x,y) = \left(\frac{4x}{5-3y}, \frac{5y-3}{5-3y}\right)$. По построению φ является диффеоморфизмом Морса-Смейла, неблуждающее множество которого состоит из одного источника $\alpha_0 = (0,1)$ и одного стока $\omega_0 = (0,-1)$. Представим $\mathbb{T}^3$ как произведение $\mathbb{T}^2 \times \mathbb{S}^1$ и зададим на нем диффеоморфизм f формулой $f(z,t) = (f_{\widehat{C},p_0}(z), \varphi(x,y))$, где $z \in \mathbb{T}^2$, $(x,y) \in \mathbb{S}^1$. Тогда тор $A = \mathbb{T}^2 \times \{\omega_0\}$ является аттрактором[6], а тор $R = \mathbb{T}^2 \times \{\alpha_0\}$ является репеллером диффеоморфизма f. Неблуждающее множество диффеоморфизма f состоит из одномерного поверхностного аттрактора $B_A = \Lambda \times \{\omega_0\}$ и неподвижной седловой точки $\sigma = \{p_0\} \times \{\omega_0\}$, принадлежащих поверхности A, а также одномерного седлового множества $B_R = \Lambda \times \{\alpha_0\}$ и неподвижного источника $\alpha = \{p_0\} \times \{\alpha_0\}$, лежащих на поверхности B_R (см. рис. 1.2). Таким образом, все базисные множества диффеоморфизма f разделены на две непустые части $\mathcal{B}_A = \{B_A, \sigma\}$ и $\mathcal{B}_R = \{B_R, \alpha\}$ такие, что

$$A = \bigcup_{B \in \mathcal{B}_A} W^u_B, \quad R = \bigcup_{B \in \mathcal{B}_R} W^s_B.$$

[6] Компактное множество $A \subset M^3$ называется *аттрактором диффеоморфизма* $f : M^3 \to M^3$, если существует замкнутая окрестность U множества A такая, что $f(U) \subset int\, U$, $\bigcap\limits_{j \geq 0} f^j(U) = A$. Аттрактор для диффеоморфизма f^{-1} называется *репеллером* диффеоморфизма f.

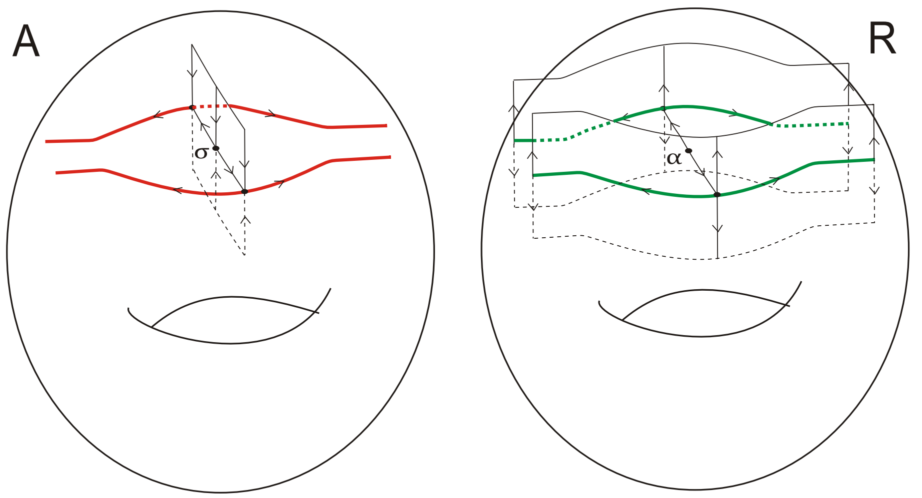

Рисунок **1.2**

Структурно устойчивый диффеоморфизм из класса G

Топология объемлющего многообразия M^3, допускающего диффеоморфизмы класса G уточняется следующим образом.

Теорема 1.1. *Пусть $f \in G$ диффеоморфизм. Тогда многообразие M^3 гомеоморфно многообразию $M_{\widehat{J}}$, где матрица J либо является гиперболической, либо совпадает с единичной матрицей $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, либо совпадает с матрицей $-I = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$.*

Гиперболический автоморфизм назовем *примарным*, если он не является степенью никакого другого гиперболического диффеоморфизма. Обозначим через $\mathcal{E}$ множество сохраняющих ориентацию примарных автоморфизмов двумерного тора.

Для описания динамики диффеоморфизмов класса G напомним теорию грубых преобразований окружности $\mathbb{S}^1$.

Пусть $MS(\mathbb{S}^1)$ — класс структурно устойчивых преобразований окружности, который согласно Майеру [17] совпадает с классом диффеоморфизмов Морса-Смейла на $\mathbb{S}^1$. Разобъем $MS(\mathbb{S}^1)$ на два подкласса $MS_+(\mathbb{S}^1)$ и $MS_-(\mathbb{S}^1)$, состоящих из сохраняющих и меняющих ориентацию диффеоморфизмов соответственно. Ниже мы приведем результаты Майера по топологической классификации структурно устойчивых преобразований.

Предложение 1.1.

1. Для любого диффеоморфизма $\varphi \in MS_+(\mathbb{S}^1)$ множество $NW(\varphi)$ состоит из $2n, n \in \mathbb{N}$, периодических орбит, каждая из которых периода k.

2. Для любого диффеоморфизма $\varphi \in MS_-(\mathbb{S}^1)$ множество $NW(\varphi)$ состоит из $2q$, $q \in \mathbb{N}$, периодических орбит, две из которых неподвижны, а остальные периода 2.

Положим $\varphi \in MS_+(\mathbb{S}^1)$. Перенумеруем периодические точки из $NW(\varphi)$: $p_0, p_1, \dots, p_{2nk-1}, p_{2nk} = p_0$ начиная с произвольной точки p_0 по часовой стрелке, тогда $\varphi(p_0) = p_{2nl}$, где l — целое такое, что при $k = 1$, $l = 0$, в то время как для $k > 1$, $l \in \{1, \dots, k-1\}$ и (k, l) являются взаимно простыми[7]. Заметим, что число l не зависит от выбора точки p_0.

[7] На самом деле, А. Г. Майер вместо числа l использовал число r_1, которое называл *числом вращения*, такое что $l \cdot r_1 \equiv 1 (mod\ k)$

Для $\varphi \in MS_-(\mathbb{S}^1)$ положим $\nu = -1$; $\nu = 0; \nu = +1$, если его неподвижные точки являются источниками, стоками и источниками или стоками соответственно. Заметим, что $\nu = 0$, если q нечетное, и $\nu = \pm 1$, если q четное.

Для $n, k \in \mathbb{N}$ и целого l такого, что $k = 1$, $l = 0$, тогда как для $k > 1$, $l \in \{1, \ldots, k-1\}$ построим стандартного представителя φ_+ в $MS_+(\mathbb{S}^1)$ с параметрами n, k, l. Для $q \in \mathbb{N}$, $\nu \in \{-1, 0, +1\}$ построим стандартного представителя φ_- in $MS_-(\mathbb{S}^1)$ с параметрами q.

Введем следующие отображения:
$\psi_m : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ — сдвиг на единицу времени потока $\dot{r} = \sin(2\pi m r)$ для $m \in \mathbb{N}$;
$\chi_{k,l} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ — диффеоморфизм, заданный формулой $\chi_{k,l}(r) = r - \frac{l}{k}$;
$\chi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ — диффеоморфизм, заданный формулой $\chi(r) = -r$;
$\tilde{\varphi}_{n,k,l} = \psi_{n \cdot k} \chi_{k,l} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$;
$\tilde{\varphi}_{q,0} = \psi_q \chi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ для нечетного q;
$\tilde{\varphi}_{q,+1} = \psi_q \chi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ и $\tilde{\varphi}_{q,-1} = \tilde{\varphi}^{-1}_{q,+1} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ для четного q.

Пусть $\tilde{\Pi}_+ = \{\tilde{\varphi}_+ = \tilde{\varphi}_{n,k,l}\}$ и $\tilde{\Pi}_- = \{\tilde{\varphi}_- = \tilde{\varphi}_{q,\nu}\}$. Непосредственно можно проверить, что $\tilde{\varphi}_\sigma(r + \mu) = \tilde{\varphi}_\sigma(r)$ для $\sigma \in \{+, -\}$ и $\mu \in \mathbb{Z}$. Тогда корректно определены диффеоморфизмы $\varphi_\sigma = \pi \tilde{\varphi}_\sigma \pi^{-1} : \mathbb{S}^1 \to \mathbb{S}^1$. Положим $\Pi_+ = \{\varphi_+\}$, $\Pi_- = \{\varphi_-\}$ и $\Pi = \Pi_+ \cup \Pi_-$.

Положим $M_J = (\mathbb{T}^2 \times \mathbb{R})/\Gamma$, где $\Gamma = \{\gamma^k, k \in \mathbb{Z}\}$ – группа степеней диффеоморфизма $\gamma : \mathbb{T}^2 \times \mathbb{R} \to \mathbb{T}^2 \times \mathbb{R}$, заданного формулой $\gamma(z, r) = (J(z), r - 1)$ для $J = \pm I \widehat{\xi}^\lambda$, $\xi \in \mathcal{E}$. Обозначим через $p_{_J} : \mathbb{T}^2 \times \mathbb{R} \to M_J$ естественную проекцию, а через $\tilde{\phi}_\sigma : \mathbb{T}^2 \times \mathbb{R} \to \mathbb{T}^2 \times \mathbb{R}$ прямое произведение отображений $\tilde{\varphi}_\sigma \in \tilde{\Pi}_\sigma$ и $C = \widehat{\xi}^\mu$, то есть $\tilde{\phi}_\sigma(z, r) = (C(z), \tilde{\varphi}_\sigma(r))$.

П р е д л о ж е н и е 1.2. *Диффеоморфизм $\tilde{\phi}_\sigma$ проектируется в диффеоморфизм $\phi_\sigma = p_{_J} \tilde{\phi}_\sigma p_{_J}^{-1} : M_J \to M_J$ в следующих случаях:*

- *при любом $\lambda \in \mathbb{Z}$ для $\sigma = +$;*
- *только при $\lambda = 0$ для $\sigma = -$.*

Будем называть диффеоморфизм $\phi_\sigma : M_J \to M_J$ *локально прямым произведением отображений C и φ_σ* и писать $\phi_\sigma = C \otimes \varphi_\sigma$. Обозначим через Φ множество всех таких локально прямых произведений.

Напомним, что отображение $g : M^3 \to M^3$ называется *полусопряженным с отображением $f : M^3 \to M^3$ или фактором отображения f*, если существует сюръективное непрерывное отображение $h : M^3 \to M^3$ такое, что $hf = gh$. Отображение h в этом случае называется *полусопряжением.*

Т е о р е м а 1.2. *Для любого диффеоморфизма $f \in G$ существует диффеоморфизм $\phi \in \Phi$, являющийся фактором f.*

Диффеоморфизмы класса Φ являются структурно устойчивыми, тогда как в классе G существуют диффеоморфизмы, не являющиеся структурно устойчивыми. Опишем конструкцию диффеоморфизма $f \in G$, не являющегося структурно устойчивым.

Определим диффеоморфизм $\phi : \mathbb{T}^3 \to \mathbb{T}^3$ формулой $\phi(z, x, y) = (\widehat{C}(z), \varphi(x, y))$, где $\widehat{C}$ диффеоморфизм Аносова на торе $\mathbb{T}^2$ и φ диффеоморфизм «источник-сток», построенные выше. Тогда $\phi \in \Phi$ и неблуждающее множество диффеоморфизма ϕ состоит из одного репеллера $R = \mathbb{T}^2 \times \{(0, 1)\}$ и одного аттрактора $A = \mathbb{T}^2 \times \{(0, -1)\}$.

Обозначим через $l_A \subset \mathbb{S}^1$ замкнутую дугу на окружности, ограниченную точками $(-\frac{3}{5}, -\frac{4}{5})$ и $(\frac{3}{5}, -\frac{4}{5})$, и такую, что $(0, 1) \notin l_A$. Положим $K_A = \mathbb{T}^2 \times l_A$. Зададим на множестве K_A диффеоморфизм g_A формулой $g_A(z, (x, y)) = (\eta^{\tau - \frac{5|x|\tau}{3}}(z), (x, y))$, где η^t поток, используемый при раздутии точки p_0 вдоль неустойчивых многообразий. Обозначим через ζ^t аналогичный поток для раздутия точки p_0 вдоль устойчивых многообразий. Обозначим через $l_R \subset \mathbb{S}^1$ замкнутую дугу на окружности, ограниченную точками $(\frac{3}{5}, -\frac{4}{5})$ и $(-\frac{3}{5}, \frac{4}{5})$, и такую, что $(0,-1) \notin l_R$. Положим $K_R = \mathbb{T}^2 \times l_R$. Зададим на множестве K_R диффеоморфизм g_R формулой $g_R(z,(x,y)) = (\zeta^{\tau - \frac{5|x|\tau}{3}}(z),(x,y))$.

Положим $g : \mathbb{T}^3 \to \mathbb{T}^3$ диффеоморфизм, совпадающий с g_A на K_A, с g_R на K_R и тождественный на $\mathbb{T}^3 \setminus (K_A \cup K_R)$. Тогда искомый диффеоморфизм определяется формулой $f = g\phi$. По построению диффеоморфизм f принадлежит классу G, так как его неблуждающее множество расположено на торах A и R, при этом $\mathcal{B}_A = \{B_A, \sigma_A\}$ и $\mathcal{B}_R = \{B_R, \sigma_R\}$, где B_A — растягивающийся одномерный аттрактор, B_R — сжимающийся одномерный репеллер, а σ_A, σ_R — седловые точки (см. Рис. 1.3). Построенный диффеоморфизм не является структурно устойчивым, поскольку устойчивая сепаратриса седла σ_A совпадает с неустойчивой сепаратрисой седла σ_R.

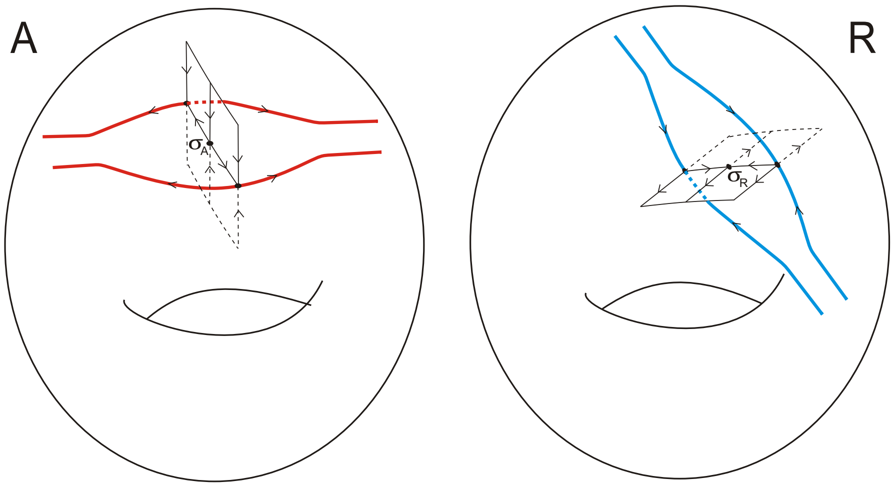

Рисунок **1.3**

Диффеоморфизм из класса G, не являющийся структурно устойчивым

Чтобы описать множество структурно устойчивых диффеоморфизмов в классе G построим ещё один класс Θ модельных диффеоморфизмов. Для этого возьмем примарный автоморфизм $\widehat{\xi}$, $\xi \in \mathcal{E}$ и обозначим через P множество, состоящее из конечного числа периодических орбит диффеоморфизма $\widehat{\xi}$. В окрестности множества P проведем раздутие периодических орбит множества P вдоль устойчивых или неустойчивых многообразий. Обозначим через $\mathcal{D}$ класс построенных DA-диффеоморфизмов $f_{\widehat{\xi},P}$. Аналогично приведенной выше конструкции построим *локально прямое произведение* θ_σ *DA-диффеоморфизма* $C = f^{\mu}_{\widehat{\xi},P}$ *и грубого преобразования окружности* φ_σ на многообразии M_J, где $J = \pm I f^{\lambda}_{\widehat{\xi},P}$. Обозначим через Θ множество таких моделей.

Теорема 1.3. *Любой структурно устойчивый диффеоморфизм* $f \in G$ *топологически сопряжен некоторому диффеоморфизму* $\theta \in \Theta$.

Фундаментом для настоящих исследований послужили результаты по топологической классификации А-диффеоморфизмов двумерных многообразий, неблуждающие множества которых содержат одномерные базисные множества, полученные в работах Х. Бонатти, Р. Ланжевена, В. З. Гринеса, А. Ю. Жирова, Х. Х. Калая, Р. В. Плыкина (для ссылок см. [5], [14], [22]).

Благодарность. Исследование выполнено при финансовой поддержке Программы фундаментальных исследований НИУ ВШЭ в 2016 году (проект № 98 «Топологические методы в динамике») и Российского фонда фундаментальных исследований (проект № 15-01-03689-а).

Список литературы

1. Brown A., "Nonexpanding attractors: conjugacy to algebraic models and classification in 3-manifolds", *Journal of Modern Dynamics*, **4** (2010), 517–548.
2. Bothe H., "The ambient structure of expanding attractors, I. Local triviality, tubular neighdorhoods II", *Math. Nachr.*, **107** (1982), 327–348.
3. Bothe H., "The ambient structure of expanding attractors, II. Solenoids in 3-manifolds", *Math. Nachr.*, **112** (1983), 69–102.
4. Bonatti H., Guelman N., "Axiom A diffeomorphisms which are derived from Anosov flows", *Journal of Modern Dynamics*, **4**:1 (2010), 1–63.
5. Bonatti Ch., Langevin R., *Diffeomorphismes de Smale des surfaces*, Asterisque. Paris, 2011, 250 pp.
6. Franks J., "Anosov Diffeomorphisms on Tori", *Transactions of the American Mathematical Society*, **145** (1969), 117–124.
7. Гринес В. З., Левченко Ю. А., Починка О. В., "О топологической классификации диффеоморфизмов на 3-многообразиях с поверхностными двумерными аттракторами и репеллерами", *Нелинейная динамика*, **10** (2014), 17–33.
8. Grines V., Levchenko Yu., Medvedev V., Pochinka O., "On the Dynamical Coherence of Structurally Stable 3-diffeomorphisms", *Regular and Chaotic Dynamics*, **19** (2014), 506–512.
9. Grines V., Levchenko Yu., Medvedev V., Pochinka O., "The topological classification of structural stable 3-diffeomorphisms with two-dimensional basic sets", *Nonlinearity*, **28** (2015), 4081–4102.
10. Гринес В. З., Левченко Ю. А., "О топологической классификации диффеоморфизмов трехмерных многообразий с двумерными поверхностными аттракторами и репеллерами", *Доклады Академии Наук*, **447**:2 (2012), 127–129.
11. Grines V., Zhuzhoma E., "On structurally stable diffeomorphisms with codimension one expanding attractors", *Trans. Amer. Math. Soc.*, **357** (2005), 617–667.
12. Жужома Е. В., Медведев В. С., "О неориентируемых двумерных базисных множествах на 3-многообразиях", *Матем. сб.*, **193**:6 (2002), 83–104.
13. Гринес В. З., Медведев В. С., Жужома Е. В., "О поверхностных аттракторах и репеллерах на 3-многообразиях", *Мат. зам.*, **78**:6 (2005), 813–826.
14. Гринес В. З., Починка О. В., *Введение в топологическую классификацию диффеоморфизмов на многообразиях размерности два и три*, Москва-Ижевск, 2011, 424 с.

15. Kaplan J., Mallet-Paret J., Yorke J., “The Lapunov dimension of nonwhere diffferntiable attracting torus”, *Ergodic theory and Dynam. Systems*, **2** (1984), 261–281.

16. Ma J., Yu B., “Genus two Smale-Williams solenoid attractors in 3-manifolds”, *Journal of Knot Theory and Its Ramifications*, **20**:6 (2011), 909–926.

17. Майер А. Г., “Грубое преобразование окружности в окружность”, *Учен. зап. ГГУ*, **12** (1939), 215–229.

18. Newhouse S. E., “On Codimension One Anosov Diffeomorphisms”, *American Journal of Mathematics*, **92**:3 (1970), 761–770.

19. Ньюхаус Ш. Е., “Гладкие динамические системы”, *Изд. "Мир"*, **4** (1977), 87–98.

20. Плыкин Р. В., “О топологии базисных множеств диффеоморфизмов Смейла”, *Матем. сб.*, **84(126)** (1971), 301–312.

21. Плыкин Р. В., “Источники и стоки А-диффеоморфизмов на поверхностях”, *Мат. сб.*, **23** (1974), 223–253.

22. Плыкин Р. В., “О гиперболических аттракторах диффеоморфизмов”, *УМН*, **35**:3(213) (1980), 94–104.

23. Robinson C., *Dynamical Systems: stability, symbolic dynamics, and chaos*, Studies in Adv. Math., Sec. edition, CRC Press., 1999, 506 pp.

24. Smale S., “Differentiable dynamical systems”, *Bull. Amer. Math. Soc.*, **73**:6 (1967), 747–817.

25. Smale S., “Stability and isotopy in discrete dynamical systems”, *Dynamical Systems*, 1973, 527–530.

26. Williams R. F., “One-dimensional non-wandering sets”, *Topology*, **6** (1967), 473–487.

27. Жужома Е. В., “О классификации одномерных растягивающихся аттракторов”, *Матем. заметки*, **86**:3 (2009), 360–370.

Дата поступления 9.05.2016

Diffeomorphisms of 3-manifolds with 1-dimensional basic sets exteriorly situated on 2-tori

© **V. Z. Grines**[8], **O.V. Pochinka**[9], **A.A. Shilovskaya**[10]

Abstract. In this paper we consider the class G of A-diffeomorphisms f, defined on a closed 3-manifold M^3. The nonwandering set is located on finite number of pairwise disjoint f-invariant 2-tori embedded in M^3. Each torus T is a union of $W^u_{B_T} \cup W^u_{\Sigma_T}$ or $W^s_{B_T} \cup W^s_{\Sigma_T}$, where B_T is 1-dimensional basic set exteriorly situated on T and Σ_T is finite number of periodic points with the same Morse number. We found out that an ambient manifold which allows such diffeomorphisms is homeomorphic to a quotient space $M_{\widehat{J}} = \mathbb{T}^2 \times [0,1]/_\sim$, where $(z,1) \sim (\widehat{J}(z),0)$ for some algebraic torus automorphism $\widehat{J}$, defined by matrix $J \in GL(2,\mathbb{Z})$ which is either hyperbolic or $J = \pm Id$. We showed that each diffeomorphism $f \in G$ is semiconjugate to a local direct product of an Anosov diffeomorphism and a rough circle transformation. We proved that structurally stable diffeomorphism $f \in G$ is topologically conjugate to a local direct product of a generalized DA-diffeomorphism and a rough circle transformation. For these diffeomorphisms we found the complete system of topological invariants; we also constructed a standard representative in each class of topological conjugation.

Key Words: A-diffeomorphism, DA-diffeomorphism, topological invariant, topological conjugation

[8] Professor of Chair of Fundamental Mathematics, HSE, Nizhny Novgorod; vgrines@yandex.ru

[9] Professor of Chair of Fundamental Mathematics, HSE, Nizhny Novgorod; olga-pochinka@yandex.ru

[10] PhD student of the Department of differential equations, mathematical and numerical analysis, Lobachevsky State University, Nizhny Novgorod; a.shilovskaia@gmail.com