УДК 517.968

Устойчивость и дифференцируемость по малому параметру смешанной задачи для нелинейного уравнения в частных производных восьмого порядка

© Т. К. Юлдашев [1]

Аннотация. В работе рассматриваются вопросы непрерывной зависимости и дифференцируемости по малому параметру обобщенного решения смешанной задачи для нелинейного уравнения в частных производных восьмого порядка, левая часть которого является суперпозицией двух операторов математической физики четвертого порядка. С помощью метода Фурье разделения переменных смешанная задача сведена к изучению счетной системы нелинейных интегральных уравнений Вольтерра второго рода с малым параметром. Доказана непрерывная зависимость обобщенного решения рассматриваемой смешанной задачи по малому положительному параметру. Также доказана дифференцируемость обобщенного решения рассматриваемой смешанной задачи по малому параметру. При доказательстве существования производной по малому параметру счетной системы нелинейных интегральных уравнений Вольтерра второго рода использован метод последовательных приближений. Результаты, полученные в данной работе, играют важную роль при построении асимптотических разложений по малому параметру решения смешанной задачи для рассматриваемого нелинейного уравнения в частных производных восьмого порядка.

Ключевые слова: Смешанная задача, уравнение восьмого порядка, суперпозиция дифференциальных операторов, устойчивость решения по малому параметру, дифференцируемость решения по малому параметру.

1. Введение

Теория смешанных и краевых задач для уравнений в частных производных в силу ее прикладной важности является одним из важнейших разделов теории дифференциальных уравнений в частных производных.

Смешанные задачи в теории упругости возникают при расчете различных деталей машин и элементов конструкций, находящихся во взаимодействии, при расчете фундаментов и оснований сооружений [1]. Смешанными задачами также являются многие задачи концентрации напряжений в окрестности всевозможных трещин, инородных включений, подкрепляющих стрингеров и накладок. Много смешанных задач и в гидродинамике. Это и нелинейные задачи теории крыла и глиссирования, теории струйных течений, теории качки корабля и удара тел о поверхность жидкости, фильтрации, теории взрыва, ряд задач гидроупругости.

Представляют большой интерес с точки зрения физических приложений дифференциальные уравнения в частных производных высоких порядков [2], [3].

Дифференциальные уравнения в частных производных четвертого, пятого и шестого порядков изучались во многих работах, в частности [4] – [18]. Дифференциальные уравнения в частных производных высоких порядков изучались, в частности, в [19] – [25].

При исследовании реальных объектов зачастую приходится принимать во внимание разнообразные факторы, действующие на данную систему. При рассмотрении различных

[1] Доцент кафедры высшей математики, Сибирский государственный аэрокосмический университет имени академика М. Ф. Решетнева, г. Красноярск, tursun.k.yuldashev@gmail.com

задач управления движением существенную роль играет теория устойчивости. Под устойчивостью обычно понимают свойство системы, которое сохранится при малых изменениях начальных состояний, внешних воздействий, параметров системы и т.д.

В данной работе рассматриваются вопросы устойчивости и дифференцируемости по малому параметру обобщенного решения смешанной задачи для нелинейного уравнения в частных производных восьмого порядка, левая часть которого является суперпозицией двух операторов математической физики четвертого порядка. Результаты данной работы играют важную роль при построении асимптотических разложений по малому параметру решения смешанной задачи для рассматриваемого нелинейного уравнения в частных производных восьмого порядка.

Используются следующие известные понятия. Рассматривается банахово пространство $B_2(T)$ с нормой

$$\left\|a(t)\right\|_{B_2(T)} = \sqrt{\sum_{n=1}^{\infty}\left(\max_{t\in D_T}|a_n(t)|\right)^2}.$$

Для произвольной функции $g(x),\ x \in D_l$ в пространстве $L_2(D_l)$ используется норма

$$\left\|g(x)\right\|_{L_2(D_l)} = \sqrt{\int_0^l |g(y)|^2 dy}.$$

Для числовой последовательности φ_n в пространстве ℓ_2 рассматривается норма

$$\left\|\varphi\right\|_{\ell_2} = \sqrt{\sum_{n=1}^{\infty}|\varphi_n|^2}.$$

2. Постановка задачи

В области D рассматривается уравнение

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} - \varepsilon\frac{\partial^3}{\partial t\,\partial x^2} + \frac{\partial^4}{\partial x^4}\right)\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \varepsilon\frac{\partial^4}{\partial t^2\,\partial x^2} + \frac{\partial^4}{\partial x^4}\right)u(t,x) = f\left(t,x,u(t,x)\right) \tag{2.1}$$

со смешанными условиями

$$u(0,x) = \phi_1(x),\ u_t(0,x) = \phi_2(x),\ u_{tt}(0,x) = \phi_3(x),\ x \in D_l, \tag{2.2}$$

$$\begin{gathered} u(t,0) = u(t,l) = \frac{\partial^2}{\partial x^2}u(t,0) = \frac{\partial^2}{\partial x^2}u(t,l) = \\ = \frac{\partial^4}{\partial x^4}u(t,0) = \frac{\partial^4}{\partial x^4}u(t,l) = \frac{\partial^6}{\partial x^6}u(t,0) = \frac{\partial^6}{\partial x^6}u(t,l) = 0, \end{gathered} \tag{2.3}$$

где $f(t,x,u) \in C(D\times R)$, $\phi_i(x) \in C^9(D_l)$, $i = \overline{1,3}$, $D \equiv D_T \times D_l$, $D_T \equiv [0;T]$, $D_l \equiv [0;l]$, $0 < T < \infty$, $0 < l < \infty$, $0 < \varepsilon$ – малый параметр.

В данной работе обобщенное решение смешанной задачи (2.1)–(2.3) записывается в виде ряда:

$$u(t,x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n(t) b_n(x), \tag{2.4}$$

где $b_n(x) = \sqrt{\frac{2}{l}}\sin\lambda_n x$, $\lambda_n = \frac{n\pi}{l}$.

Коэффициенты разложения $a_n(t)$ обобщенного решения смешанной задачи (2.1)–(2.3) удовлетворяют следующей счетной системе нелинейных интегральных уравнений (ССНИУ) Вольтерра второго рода [26]

$$a_n(t) = \psi_n(t,\varepsilon)+$$

$$+\frac{1}{\omega_n(\varepsilon)}\int_0^t\int_0^l f\left(s,y,\sum_{i=1}^{\infty}a_i(s)b_i(y)\right)b_n(y)G_n(t,s,\varepsilon)dyds, \tag{2.5}$$

где

$$\psi_n(t,\varepsilon) = \frac{\mu_n^2(\varepsilon)\phi_{1n}+\phi_{3n}}{\mu_n^2(\varepsilon)+\mu_n^4(\varepsilon)}\exp\left\{-\mu_n^2(\varepsilon)t\right\}+\frac{\mu_n^4(\varepsilon)\phi_{1n}-\phi_{3n}}{\mu_n^2(\varepsilon)+\mu_n^4(\varepsilon)}\cos\mu_n(\varepsilon)t+$$

$$+\frac{\mu_n^2(\varepsilon)\phi_{1n}+(1+\mu_n^2(\varepsilon))\phi_{2n}+\phi_{3n}}{\mu_n^3(\varepsilon)+\mu_n^5(\varepsilon)}\sin\mu_n(\varepsilon)t,$$

$$G_n(t,s,\varepsilon) = \exp\left\{-\mu_n^2(\varepsilon)(t-s)\right\}+\mu_n(\varepsilon)\sin\mu_n(\varepsilon)(t-s)-\cos\mu_n(\varepsilon)(t-s),$$

$$\omega_n(\varepsilon) = \rho_n^2(\varepsilon)\mu_n^2(\varepsilon)(1+\mu_n^2(\varepsilon)),\ \mu_n^2(\varepsilon) = \frac{\lambda_n^4}{\rho_n(\varepsilon)},\ \rho_n(\varepsilon) = 1+\lambda_n^2\varepsilon,$$

начальные данные ϕ_{jn} подбирались из (2.2) так, что

$$\phi_{jn}(x) = \sum_{n=1}^{\infty}\phi_{jn}b_n(x), \phi_{jn}(x)\in L_2(D_l),\ j=\overline{1,3}.$$

Отметим, что в работе [26] изучена однозначная разрешимость смешанной задачи (2.1)–(2.3).

3. Устойчивость решения смешанной задачи по малому параметру

Т е о р е м а 3.1. *Пусть выполняются следующие условия:*

1) $\int\limits_0^T \|f\,(t,x,\sum_{i=1}^{\infty}\psi_i(t,\varepsilon)b_i(x))\|_{L_2(D_l)}\,dt \leq \Delta < \infty$;

2) $f(t,x,u)\in Lip\Big\{L(t,x)_{|u}\Big\}$, *где* $0<\int\limits_0^t\Big\|L(s,x)\Big\|_{L_2(D_l)}ds<\infty$;

3) $\Big\|\psi(t,\varepsilon)\Big\|_{B_2(T)}<\infty$;

4) $\Big\|\lambda^{-2}\Big(1+(3+T)\lambda^{-2}\Big)\Big\|_{\ell_2}\Big\|\phi_1\Big\|_{\ell_2}<\infty$, $\Big\|\lambda^{-4}\Big\|_{\ell_2}\Big\|\phi_2\Big\|_{\ell_2}<\infty$;

5) $\Big\|\lambda^{-8}\Big\|_{\ell_2}M_1^2M_2\sqrt{l}<\infty$, $\Big\|(\lambda^{-2}+\lambda^{-4}+\lambda^{-6}\Big\|_{\ell_2}\Big\|\phi_3\Big\|_{\ell_2}<\infty$;

6) $\left(\Big\|\lambda^{-2}\Big\|_{\ell_2}+\Big\|\lambda^{-4}\Big(1+\lambda^{-2}+\lambda^{-4}\Big)\Big\|_{\ell_2}\Big\|\lambda^{-2}+(1+T)\lambda^{-4}+\lambda^{-6}T\Big\|_{\ell_2}\right)\times$

$\times M_1^2M_2\sqrt{l}\int\limits_0^T\|f\,(t,x,\sum_{i=1}^{\infty}\psi_i(t,\varepsilon_1)b_i(x))\|_{L_2(D_l)}\,dt<\infty$,

где $M_1=\sqrt{\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\big(\omega_n(\varepsilon)\big)^2}}$, $M_2=\Big\|G(t,s)\Big\|_{B_2(T)}$.

Тогда для произвольных $\varepsilon_1, \varepsilon_2 \in [0, \varepsilon]$ *справедлива оценка:*

$$\Big|u(t,x,\varepsilon_1) - u(t,x,\varepsilon_2)\Big| \leq A|\varepsilon_1 - \varepsilon_2|,\ 0 < A = const.$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. С учетом (2.5) рассмотрим следующую разность:

$$a_n(t,\varepsilon_1) - a_n(t,\varepsilon_2) = \psi_n(t,\varepsilon_1) - \psi_n(t,\varepsilon_2) +$$
$$+\left(\frac{1}{\omega_n(\varepsilon_1)} - \frac{1}{\omega_n(\varepsilon_2)}\right)\int\limits_0^t\int\limits_0^l f\Big(s,y,\sum_{i=1}^{\infty} a_i(s,\varepsilon_1)b_i(y)\Big)b_n(y)G_n(t,s,\varepsilon_1)dyds+$$
$$+\frac{1}{\omega_n(\varepsilon_2)}\left[\int\limits_0^t\int\limits_0^l \left(f\left(s,y,\sum_{i=1}^{\infty} a_i(s,\varepsilon_1)b_i(y)\right) - f\left(s,y,\sum_{i=1}^{\infty} a_i(s,\varepsilon_2)b_i(y)\right)\right)\times\right.$$
$$\times b_n(y)G_n(t,s,\varepsilon_2)dyds+$$
$$\left.+\int\limits_0^t\int\limits_0^l f\left(s,y,\sum_{i=1}^{\infty} a_i(s,\varepsilon_1)b_i(y)\right)b_n(y)\Big(G_n(t,s,\varepsilon_1) - G_n(t,s,\varepsilon_2)\Big)dyds\right], \tag{3.1}$$

где

$$\psi_n(t,\varepsilon_1) - \psi_n(t,\varepsilon_2) = \left[\frac{\mu_n^2(\varepsilon_1)\phi_{1n} + \phi_{3n}}{\mu_n^2(\varepsilon_1) + \mu_n^4(\varepsilon_1)} - \frac{\mu_n^2(\varepsilon_2)\phi_{1n} + \phi_{3n}}{\mu_n^2(\varepsilon_2) + \mu_n^4(\varepsilon_2)}\right]\exp\left\{-\mu_n^2(\varepsilon_2)t\right\} +$$
$$+\frac{\mu_n^2(\varepsilon_1)\phi_{1n} + \phi_{3n}}{\mu_n^2(\varepsilon_1) + \mu_n^4(\varepsilon_1)}\left[\exp\left\{-\mu_n^2(\varepsilon_1)t\right\} - \exp\left\{-\mu_n^2(\varepsilon_2)t\right\}\right] +$$
$$+\left[\frac{\mu_n^4(\varepsilon_1)\phi_{1n} - \phi_{3n}}{\mu_n^2(\varepsilon_1) + \mu_n^4(\varepsilon_1)} - \frac{\mu_n^4(\varepsilon_2)\phi_{1n} - \phi_{3n}}{\mu_n^2(\varepsilon_2) + \mu_n^4(\varepsilon_2)}\right]\cos\mu_n(\varepsilon_2)t+$$
$$+\frac{\mu_n^4(\varepsilon_1)\phi_{1n} - \phi_{3n}}{\mu_n^2(\varepsilon_1) + \mu_n^4(\varepsilon_1)}\left[\cos\mu_n(\varepsilon_1)t - \cos\mu_n(\varepsilon_2)t\right] +$$
$$+\left[\frac{\mu_n^2(\varepsilon_1)\phi_{1n} + (1+\mu_n^2(\varepsilon_1))\phi_{2n} + \phi_{3n}}{\mu_n^3(\varepsilon_1) + \mu_n^5(\varepsilon_1)} - \frac{\mu_n^2(\varepsilon_2)\phi_{1n} + (1+\mu_n^2(\varepsilon_2))\phi_{2n} + \phi_{3n}}{\mu_n^3(\varepsilon_2) + \mu_n^5(\varepsilon_2)}\right]\sin\mu_n(\varepsilon_2)t+$$
$$+\frac{\mu_n^2(\varepsilon_1)\phi_{1n} + (1+\mu_n^2(\varepsilon_1))\phi_{2n} + \phi_{3n}}{\mu_n^3(\varepsilon_1) + \mu_n^5(\varepsilon_1)}\left[\sin\mu_n(\varepsilon_1)t - \sin\mu_n(\varepsilon_2)t\right]; \tag{3.2}$$

$$G_n(t,s,\varepsilon_1) - G_n(t,s,\varepsilon_2) = \exp\left\{-\mu_n^2(\varepsilon_1)(t-s)\right\} - \exp\left\{-\mu_n^2(\varepsilon_2)(t-s)\right\} +$$
$$+\left[\mu_n(\varepsilon_1) - \mu_n(\varepsilon_2)\right]\sin\mu_n(\varepsilon_2)(t-s) + \mu_n(\varepsilon_1)\left[\sin\mu_n(\varepsilon_1)(t-s) - \sin\mu_n(\varepsilon_2)(t-s)\right] -$$
$$-\left[\cos\mu_n(\varepsilon_1)(t-s) - \cos\mu_n(\varepsilon_2)(t-s)\right]. \tag{3.3}$$

Для оценки по норме этой разности (3.1) используем следующие оценки:

$$|\mu_n(\varepsilon)| = \left|\frac{\lambda_n^2}{\sqrt{1+\lambda_n^2\varepsilon}}\right| \leq \lambda_n^2;\ \left|\frac{1}{\omega_n(\varepsilon)}\right| \leq \lambda_n^{-8}; \tag{3.4}$$

$$\left|\frac{\mu_n^2(\varepsilon)\phi_{1n} + \phi_{3n}}{\mu_n^2(\varepsilon) + \mu_n^4(\varepsilon)}\right| \leq \left|\frac{\phi_{1n}}{1+\mu_n^2(\varepsilon)}\right| + \left|\frac{\phi_{3n}}{\mu_n^2(\varepsilon)\Big(1+\mu_n^2(\varepsilon)\Big)}\right| \leq |\phi_{1n}| + \frac{1+\lambda_n^2}{\lambda_n^4}|\phi_{3n}|;$$

$$\left|\frac{\mu_n^4(\varepsilon)\phi_{1n}-\phi_{3n}}{\mu_n^2(\varepsilon)+\mu_n^4(\varepsilon)}\right| \le |\phi_{1n}|+\frac{1+\lambda_n^2}{\lambda_n^4}|\phi_{3n}|;$$

$$\left|\frac{\mu_n^2(\varepsilon)\phi_{1n}+(1+\mu_n^2(\varepsilon))\phi_{2n}+\phi_{3n}}{\mu_n^3(\varepsilon)+\mu_n^5(\varepsilon)}\right| \le |\phi_{1n}|+|\phi_{2n}|+|\phi_{3n}|;$$

$$|\mu_n(\varepsilon_1)-\mu_n(\varepsilon_2)| \le \lambda_n^{-4}|\varepsilon_1-\varepsilon_2|; \ \left|\frac{1}{\omega_n(\varepsilon_1)}-\frac{1}{\omega_n(\varepsilon_2)}\right| \le \lambda_n^{-2}|\varepsilon_1-\varepsilon_2|; \tag{3.5}$$

$$|\sin\mu_n(\varepsilon_1)t-\sin\mu_n(\varepsilon_2)t| \le \lambda_n^{-4}T|\varepsilon_1-\varepsilon_2|;$$

$$|\cos\mu_n(\varepsilon_1)t-\cos\mu_n(\varepsilon_2)t| \le \lambda_n^{-4}T|\varepsilon_1-\varepsilon_2|;$$

$$\left|\exp\Big[-\mu_n^2(\varepsilon_1)t\Big]-\exp\Big[-\mu_n^2(\varepsilon_2)t\Big]\right| \le \lambda_n^{-2}|\varepsilon_1-\varepsilon_2|;$$

$$\left|\frac{\mu_n^2(\varepsilon_1)\phi_{1n}+\phi_{3n}}{\mu_n^2(\varepsilon_1)+\mu_n^4(\varepsilon_1)}-\frac{\mu_n^2(\varepsilon_2)\phi_{1n}+\phi_{3n}}{\mu_n^2(\varepsilon_2)+\mu_n^4(\varepsilon_2)}\right| \le \lambda_n^{-4}\Big[|\phi_{1n}|+|\phi_{3n}|\Big]|\varepsilon_1-\varepsilon_2|;$$

$$\left|\frac{\mu_n^4(\varepsilon_1)\phi_{1n}-\phi_{3n}}{\mu_n^2(\varepsilon_1)+\mu_n^4(\varepsilon_1)}-\frac{\mu_n^4(\varepsilon_2)\phi_{1n}-\phi_{3n}}{\mu_n^2(\varepsilon_2)+\mu_n^4(\varepsilon_2)}\right| \le \lambda_n^{-4}\Big[|\phi_{1n}|+|\phi_{3n}|\Big]|\varepsilon_1-\varepsilon_2|;$$

$$\left|\frac{\mu_n^2(\varepsilon_1)\phi_{1n}+(1+\mu_n^2(\varepsilon_1))\phi_{2n}+\phi_{3n}}{\mu_n^3(\varepsilon_1)+\mu_n^5(\varepsilon_1)}-\frac{\mu_n^2(\varepsilon_2)\phi_{1n}+(1+\mu_n^2(\varepsilon_2))\phi_{2n}+\phi_{3n}}{\mu_n^3(\varepsilon_2)+\mu_n^5(\varepsilon_2)}\right| \le$$

$$\le \lambda_n^{-4}\Big[|\phi_{1n}|+\phi_{2n}|+|\phi_{3n}|\Big]|\varepsilon_1-\varepsilon_2|.$$

Тогда для разностей (3.3) и (3.2) получаем оценки

$$|G_n(t,s,\varepsilon_1)-G_n(t,s,\varepsilon_2)| \le \Big(\lambda_n^{-2}+(1+T)\lambda_n^{-4}+\lambda_n^{-6}T\Big)|\varepsilon_1-\varepsilon_2|; \tag{3.6}$$

$$|\psi_n(t,\varepsilon_1)-\psi_n(t,\varepsilon_2)| \le \Big[\lambda_n^{-2}\Big(1+(3+T)\lambda_n^{-2}\Big)|\phi_{1n}|+\lambda_n^{-4}(1+T)|\phi_{2n}|+$$

$$+(1+T)\Big(1+\lambda_n^{-2}+\lambda_n^{-4}\Big)|\phi_{3n}|\Big]|\varepsilon_1-\varepsilon_2|. \tag{3.7}$$

В силу условий теоремы, с учетом оценок (3.4)–(3.7) из (3.1) имеем

$$\big\|a(t,\varepsilon_1)-a(t,\varepsilon_2)\big\|_{B_2(T)} \le A_0|\varepsilon_1-\varepsilon_2|+$$

$$+K_0\int\limits_0^t \|L(s,x)\|_{L_2(D_l)}\big\|a(s,\varepsilon_1)-a(s,\varepsilon_2)\big\|_{B_2(t)}ds, \tag{3.8}$$

где

$$A_0=\Big\|\lambda^{-2}\Big(1+(3+T)\lambda^{-2}\Big)\Big\|_{\ell_2}\big\|\phi_1\big\|_{\ell_2}+(1+T)\Big\|\lambda^{-4}\Big\|_{\ell_2}\big\|\phi_2\big\|_{\ell_2}+$$

$$+(1+T)\Big\|1+\lambda^{-2}+\lambda^{-4}\Big\|_{\ell_2}\big\|\phi_3\big\|_{\ell_2}+$$

$$+\Big[\Big\|\lambda^{-2}\Big\|_{\ell_2}+\Big\|\lambda^{-4}\Big(1+\lambda^{-2}+\lambda^{-4}\Big)\Big\|_{\ell_2}\Big\|\lambda^{-2}+(1+T)\lambda^{-4}+T\lambda^{-6}\Big\|_{\ell_2}\Big]\times$$

$$\times M_1M_2\sqrt{l}\max_{t\in D_T}\int\limits_0^t\left\|f\left(s,x,\sum_{i=1}^{\infty}a_i(s,\varepsilon_1)b_i(x)\right)\right\|_{L_2(D_l)}ds, \tag{3.9}$$

$$K_0 = \left\|\lambda^{-8}\right\|_{\ell_2} M_1^2 M_2 \sqrt{l},\ M_1 = \sqrt{\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\left(\omega_n(\varepsilon)\right)^2}},\ M_2 = \left\|G(t,s)\right\|_{B_2(T)}. \tag{3.10}$$

Применяя к (3.8) неравенства Гроноулла-Беллмана, получим

$$\left\|a(t,\varepsilon_1) - a(t,\varepsilon_2)\right\|_{B_2(T)} \le A_1|\varepsilon_1 - \varepsilon_2|, \tag{3.11}$$

где $A_1 = A_0 \exp\left\{K_0 \max_{t\in D_T} \int\limits_0^t \|L(s,x)\|_{L_2(D_l)} ds\right\}$.

Из (3.11) с учетом (2.4) получаем, что

$$\left|u(t,x,\varepsilon_1) - u(t,x,\varepsilon_2)\right| \le \sum_{n=1}^{\infty} \left|a_n(t,\varepsilon_1) - a_n(t,\varepsilon_2)\right| \cdot \left|b_n(x)\right| \le M_3 A_1 |\varepsilon_1 - \varepsilon_2|,$$

где $M_3 = \left\|b(x)\right\|_{B_2(l)}$.

Если положим $M_3 A_1 = A$ в последнем неравенстве, то отсюда следует утверждение теоремы.

Д о к а з а т е л ь с т в о з а к о н ч е н о.

С л е д с т в и е 3.1. *Пусть выполняются условия теоремы 3.1. Тогда для* $\varepsilon \in [0;\alpha]$, $\varepsilon + h \in (0;\alpha)$, $0 < \alpha, h = const$ *справедлива оценка:*

$$\left|\frac{u(t,x,\varepsilon+h) - u(t,x,\varepsilon)}{h}\right| \le A.$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Действительно, в силу теоремы 3.1. имеем

$$\left|\frac{u(t,x,\varepsilon+h) - u(t,x,\varepsilon)}{h}\right| \le \sum_{n=1}^{\infty} \left|\frac{a_n(t,\varepsilon+h) - a_n(t,\varepsilon)}{h}\right| \cdot \left|b_n(x)\right| \le$$

$$\le M_3 \left\|\frac{a(t,\varepsilon+h) - a(t,\varepsilon)}{h}\right\|_{B_2(T)} \le A_1 M_3 \frac{|\varepsilon+h-\varepsilon|}{h} = A.$$

Д о к а з а т е л ь с т в о з а к о н ч е н о.

4. Дифференцируемость решения смешанной задачи по малому параметру

Т е о р е м а 4.1. *Пусть выполняются условия теоремы 3.1. Если*

$$\int\limits_0^T \left\|\frac{\partial f(t,x,u)}{\partial u}\right\|_{L_2(D_l)} dt < \infty,$$

то решение смешанной задачи (2.1)–(2.3) дифференцируемо по малому параметру ε.

Доказательство. Так как $\frac{\partial u(t,x,\varepsilon)}{\partial\varepsilon} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\partial a_n(t,\varepsilon)}{\partial\varepsilon} \cdot b_n(x)$, то формально дифференцируем ССНИУ (2.5) по параметру ε

$$\frac{\partial a_n(t,\varepsilon)}{\partial\varepsilon} = B_n(t,\varepsilon) +$$

$$+\frac{1}{\omega_n(\varepsilon)} \int_0^t \int_0^l \frac{\partial f(s,y,u)}{\partial u} \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\partial a_i(s,\varepsilon)}{\partial\varepsilon} b_i(y) b_n(y) G_n(t,s,\varepsilon) dyds, \tag{4.1}$$

где

$$B_n(t,\varepsilon) = \frac{\partial\psi_n(t,\varepsilon)}{\partial\varepsilon} + \left(\frac{1}{\omega_n(\varepsilon)}\right)'_{\varepsilon} \int_0^t \int_0^l f\left(s,y,\sum_{i=1}^{\infty} a_i(s,\varepsilon) b_i(y)\right) b_n(y) G_n(t,s,\varepsilon) dyds +$$

$$+\frac{1}{\omega_n(\varepsilon)} \int_0^t \int_0^l f\left(s,y,\sum_{i=1}^{\infty} a_i(s,\varepsilon) b_i(y)\right) b_n(y) \left(G_n(t,s,\varepsilon)\right)'_{\varepsilon} dyds, \tag{4.2}$$

$$\frac{\partial\psi_n(t,\varepsilon)}{\partial\varepsilon} = \frac{\partial}{\partial\,\varepsilon}\left(\frac{\mu_n^2(\varepsilon)\phi_{1n} + \phi_{3n}}{\mu_n^2(\varepsilon) + \mu_n^4(\varepsilon)}\right) \exp\left\{-\mu_n^2(\varepsilon)t\right\} +$$

$$+\frac{\mu_n^2(\varepsilon)\phi_{1n} + \phi_{3n}}{\mu_n^2(\varepsilon) + \mu_n^4(\varepsilon)} \left(-\mu_n^2(\varepsilon)t\right)'_{\varepsilon} \exp\left\{-\mu_n^2(\varepsilon)t\right\} + \frac{\partial}{\partial\,\varepsilon}\left(\frac{\mu_n^4(\varepsilon)\phi_{1n} - \phi_{3n}}{\mu_n^2(\varepsilon) + \mu_n^4(\varepsilon)}\right) \cos\mu_n(\varepsilon)t -$$

$$-\frac{\mu_n^4(\varepsilon)\phi_{1n} - \phi_{3n}}{\mu_n^2(\varepsilon) + \mu_n^4(\varepsilon)} \left(\mu_n(\varepsilon)t\right)'_{\varepsilon} \sin\mu_n(\varepsilon)t +$$

$$+\frac{\partial}{\partial\,\varepsilon}\left(\frac{\mu_n^2(\varepsilon)\phi_{1n} + (1+\mu_n^2(\varepsilon))\phi_{2n} + \phi_{3n}}{\mu_n^3(\varepsilon) + \mu_n^5(\varepsilon)}\right) \sin\mu_n(\varepsilon)t +$$

$$+\frac{\mu_n^2(\varepsilon)\phi_{1n} + (1+\mu_n^2(\varepsilon))\phi_{2n} + \phi_{3n}}{\mu_n^3(\varepsilon) + \mu_n^5(\varepsilon)} \left(\mu_n(\varepsilon)t\right)'_{\varepsilon} \cos\mu_n(\varepsilon)t,$$

$$\left(G_n(t,s,\varepsilon)\right)'_{\varepsilon} = \exp\left\{-\mu_n^2(\varepsilon)(t-s)\right\} \left(-\mu_n^2(\varepsilon)(t-s)\right)'_{\varepsilon} +$$

$$+\left(\mu_n(\varepsilon)\right)'_{\varepsilon} \sin\mu_n(\varepsilon)(t-s) + \mu_n(\varepsilon)\left(\mu_n(\varepsilon)(t-s)\right)'_{\varepsilon} \cos\mu_n(\varepsilon)(t-s) +$$

$$+\left(\mu_n(\varepsilon)(t-s)\right)'_{\varepsilon} \sin\mu_n(\varepsilon)(t-s).$$

В силу условий теоремы из (4.2) имеем

$$\|B(t,\varepsilon)\|_{B_2(T)} \le \sum_{n=1}^{\infty} \|B_n(t,\varepsilon)\|_{C(D_T)} \le A_0, \tag{4.3}$$

где A_0 определяется из (3.9).

Тогда из (4.1) следует

$$\left\|\frac{\partial a(t,\varepsilon)}{\partial\varepsilon}\right\|_{B_2(T)} \le \|B(t,\varepsilon)\|_{B_2(T)} + K_0 \int_0^t \left\|\frac{\partial f(s,x,u)}{\partial u}\right\|_{L_2(D_l)} \left\|\frac{\partial a(s,\varepsilon)}{\partial\varepsilon}\right\|_{B_2(t)} ds, \tag{4.4}$$

где K_0 определяется из (3.10).

Применяя к (4.4) неравенства Гронуолла-Беллмана, с учетом (4.3) получаем

$$\frac{\partial a(t,\varepsilon)}{\partial\varepsilon}\in B_2(T).$$

Рассмотрим следующий итерационный процесс:

$$\frac{\partial a_n^0(t,\varepsilon)}{\partial\varepsilon}=B_n(t,\varepsilon),\ \frac{\partial a_n^{k+1}(t,\varepsilon)}{\partial\varepsilon}=B_n(t,\varepsilon)+\frac{1}{\omega_n(\varepsilon)}\int\limits_0^t\int\limits_0^l\frac{\partial f(s,y,u)}{\partial u}\times$$

$$\times\left(\sum_{i=1}^{\infty}\frac{\partial a_i^k(s,\varepsilon)}{\partial\varepsilon}b_i(y)\right)b_n(y)G_n(t,s,\varepsilon)dyds,k=0,1,2,\ldots.$$

Тогда из справедливости оценок

$$\left\|\frac{\partial a^1(t,\varepsilon)}{\partial\varepsilon}-\frac{\partial a^0(t,\varepsilon)}{\partial\varepsilon}\right\|_{B_2(T)}\le$$

$$\le K_0\int\limits_0^t\left\|\frac{\partial f(s,x,u)}{\partial u}\right\|_{L_2(D_l)}\left\|\frac{\partial a^0(s,\varepsilon)}{\partial\varepsilon}\right\|_{B_2(t)}ds\le K_0\left\|B(t,\varepsilon)\right\|_{B_2(T)}\int\limits_0^t\left\|\frac{\partial f(s,x,u)}{\partial u}\right\|_{L_2(D_l)}ds,$$

$$\left\|\frac{\partial a^{k+1}(t,\varepsilon)}{\partial\varepsilon}-\frac{\partial a^k(t,\varepsilon)}{\partial\varepsilon}\right\|_{B_2(T)}\le$$

$$\le K_0\int\limits_0^t\left\|\frac{\partial f(s,x,u)}{\partial u}\right\|_{L_2(D_l)}\left\|\frac{\partial a^k(s,\varepsilon)}{\partial\varepsilon}-\frac{\partial a^{k-1}(s,\varepsilon)}{\partial\varepsilon}\right\|_{B_2(t)}ds\le$$

$$\le(K_0)^{k+1}\left\|B(t,\varepsilon)\right\|_{B_2(T)}\frac{\left[\int\limits_0^t\left\|\frac{\partial f(s,x,u)}{\partial u}\right\|_{L_2(D_l)}ds\right]^{k+1}}{(k+1)!}$$

следует существование решения счетной системы (4.1) в пространстве $B_2(T)$. Теперь предположим, что система (4.1) имеет два решения $\frac{\partial a(t,\varepsilon)}{\partial\varepsilon}$ и $\frac{\partial\vartheta(t,\varepsilon)}{\partial\varepsilon}$. Тогда для их разности справедлива оценка

$$\left\|\frac{\partial a(t,\varepsilon)}{\partial\varepsilon}-\frac{\partial\vartheta(t,\varepsilon)}{\partial\varepsilon}\right\|_{B_2(T)}\le$$

$$\le K_0\int\limits_0^t\left\|\frac{\partial f(s,x,u)}{\partial u}\right\|_{L_2(D_l)}\left\|\frac{\partial a(s,\varepsilon)}{\partial\varepsilon}-\frac{\partial\vartheta(s,\varepsilon)}{\partial\varepsilon}\right\|_{B_2(t)}ds. \tag{4.5}$$

Применение к (4.5) неравенства Гронуолла-Беллмана дает единственность этого решения.

Рассмотрим следующее соотношение

$$\frac{a_n(t,\varepsilon+h)-a_n(t,\varepsilon)}{h}=\frac{\psi_n(t,\varepsilon+h)-\psi_n(t,\varepsilon)}{h}+$$

$$+\frac{1}{h}\left(\frac{1}{\omega_n(\varepsilon+h)}-\frac{1}{\omega_n(\varepsilon)}\right)\int\limits_0^t\int\limits_0^l f\Big(s,y,\sum_{i=1}^{\infty}a_i(s,\varepsilon+h)b_i(y)\Big)b_n(y)G_n(t,s,\varepsilon+h)dyds+$$

$$+\frac{1}{\omega_n(\varepsilon)}\int\limits_0^t\int\limits_0^l\frac{1}{h}\left(f\left(s,y,\sum_{i=1}^{\infty}a_i(s,\varepsilon+h)b_i(y)\right)-f\left(s,y,\sum_{i=1}^{\infty}a_i(s,\varepsilon)b_i(y)\right)\right)\times$$
$$\times b_n(y)G_n(t,s,\varepsilon)dyds+$$
$$+\frac{1}{\omega_n(\varepsilon)}\int\limits_0^t\int\limits_0^l f\left(s,y,\sum_{i=1}^{\infty}a_i(s,\varepsilon+h)b_i(y)\right)b_n(y)\frac{G_n(t,s,\varepsilon+h)-G_n(t,s,\varepsilon)}{h}dyds, \tag{4.6}$$

где

$$\frac{\psi_n(t,\varepsilon+h)-\psi_n(t,\varepsilon)}{h}=$$
$$=\frac{1}{h}\left[\frac{\mu_n^2(\varepsilon+h)\phi_{1n}+\phi_{3n}}{\mu_n^2(\varepsilon+h)+\mu_n^4(\varepsilon+h)}-\frac{\mu_n^2(\varepsilon)\phi_{1n}+\phi_{3n}}{\mu_n^2(\varepsilon)+\mu_n^4(\varepsilon)}\right]\exp\left\{-\mu_n^2(\varepsilon)t\right\}+$$
$$+\frac{\mu_n^2(\varepsilon+h)\phi_{1n}+\phi_{3n}}{\mu_n^2(\varepsilon+h)+\mu_n^4(\varepsilon+h)}\cdot\frac{\exp\left\{-\mu_n^2(\varepsilon+h)t\right\}-\exp\left\{-\mu_n^2(\varepsilon)t\right\}}{h}+$$
$$+\frac{1}{h}\left[\frac{\mu_n^4(\varepsilon+h)\phi_{1n}-\phi_{3n}}{\mu_n^2(\varepsilon+h)+\mu_n^4(\varepsilon+h)}-\frac{\mu_n^4(\varepsilon)\phi_{1n}-\phi_{3n}}{\mu_n^2(\varepsilon)+\mu_n^4(\varepsilon)}\right]\cos\mu_n(\varepsilon)t+$$
$$+\frac{\mu_n^4(\varepsilon+h)\phi_{1n}-\phi_{3n}}{\mu_n^2(\varepsilon+h)+\mu_n^4(\varepsilon+h)}\cdot\frac{\cos\mu_n(\varepsilon+h)t-\cos\mu_n(\varepsilon)t}{h}+\sin\mu_n(\varepsilon)t\times$$
$$\times\frac{1}{h}\left[\frac{\mu_n^2(\varepsilon+h)\phi_{1n}+(1+\mu_n^2(\varepsilon+h))\phi_{2n}+\phi_{3n}}{\mu_n^3(\varepsilon+h)+\mu_n^5(\varepsilon+h)}-\frac{\mu_n^2(\varepsilon)\phi_{1n}+(1+\mu_n^2(\varepsilon))\phi_{2n}+\phi_{3n}}{\mu_n^3(\varepsilon)+\mu_n^5(\varepsilon)}\right]+$$
$$+\frac{\mu_n^2(\varepsilon+h)\phi_{1n}+(1+\mu_n^2(\varepsilon+h))\phi_{2n}+\phi_{3n}}{\mu_n^3(\varepsilon+h)+\mu_n^5(\varepsilon+h)}\cdot\frac{\sin\mu_n(\varepsilon+h)t-\sin\mu_n(\varepsilon)t}{h};$$

$$\frac{G_n(t,s,\varepsilon+h)-G_n(t,s,\varepsilon)}{h}=\frac{\exp\left\{-\mu_n^2(\varepsilon+h)(t-s)\right\}-\exp\left\{-\mu_n^2(\varepsilon)(t-s)\right\}}{h}+$$
$$+\frac{\mu_n(\varepsilon+h)-\mu_n(\varepsilon)}{h}\sin\mu_n(\varepsilon)(t-s)+\mu_n(\varepsilon+h)\frac{\sin\mu_n(\varepsilon+h)(t-s)-\sin\mu_n(\varepsilon)(t-s)}{h}-$$
$$-\frac{\cos\mu_n(\varepsilon+h)(t-s)-\cos\mu_n(\varepsilon)(t-s)}{h}.$$

Переходя к пределу при $h\to 0$ в (4.6), получаем (4.1). Следовательно, из того, что

$$\left|\frac{u(t,x,\varepsilon+h)-u(t,x,\varepsilon)}{h}-\frac{\partial u(t,x,\varepsilon)}{\partial\varepsilon}\right|\le M_3\left\|\frac{a(t,\varepsilon+h)-a(t,\varepsilon)}{h}-\frac{\partial a(t,\varepsilon)}{\partial\varepsilon}\right\|_{B_2(T)}$$

следует утверждение теоремы.
Доказательство закончено.

Список литературы

1. Алгазин С. Д., Кийко И. А., *Флаттер пластин и оболочек*, Наука, М., 2006, 248 с.

2. Замышляева А. А., "Математические модели соболевского типа высокого порядка", *Вестник Южно-УралГУ. Серия: Матем. моделир. и программирование*, **7**:2 (2014), 5 – 28.

3. Benney D. J., "Interactions of permanent waves of finite amplitude", *Journ. Math. Phys.*, **43** (1964), 309 – 313.

4. Абзалимов Р. Р., Саляхова Е. В., "Разностно-аналитический метод вычисления собственных значений для уравнений четвертого порядка с разделенными краевыми условиями", *Изв. вузов. Математика*, 2008, № 11, 3 – 11.

5. Ахтямов А. М., Аюпова А. Р., "О решении задачи диагностирования дефектов в виде малой полости в стержне", *Журн. СВМО*, **12**:3 (2010), 37 – 42.

6. Джураев Т. Д., Логинов Б. В., Малюгина И. А., "Вычисления собственных значений и собственных функций некоторых дифференциальных операторов третьего и четвертого порядков", *Дифференц. уравнения мат. физики и их приложения*, 1989, 24 – 36.

7. Турбин М. В., "Исследование начально-краевой задачи для модели движения жидкости Гершель-Балкли", *Вестник ВоронежГУ. Серия: Физика. Математика*, 2013, № 2, 246 – 257.

8. Шабров С. А., "Об одной математической модели малых деформаций стержневой системы с внутренними особенностями", *Вестник ВоронежГУ. Серия: Физика. Математика*, 2013, № 1, 232 – 250.

9. Шабров С. А., "Об оценках функции влияния одной математической модели четвертого порядка", *Вестник ВоронежГУ. Серия: Физика. Математика*, 2015, № 2, 168 – 179.

10. Корпусов М. О., *Разрушение в параболических и псевдопараболических уравнениях с двойными нелинейностями*, URSS, М., 2012, 184 с.

11. Мукминов Ф. Х., Биккулов И. М., "О стабилизации нормы решения одной смешанной задачи для параболических уравнений 4-го и 6-го порядков в неограниченной области", *Мат. Сборник*, **195**:3 (2004), 115 – 142.

12. Юлдашев Т. К., "О смешанной задаче для нелинейного уравнения в частных производных четвертого порядка с отражающим отклонением", *Вестник Южно-УралГУ. Серия: Математика. Механика. Физика*, 2011, № 10 (227), 40 – 48.

13. Юлдашев Т. К., "О смешанной задаче для нелинейного дифференциального уравнения, содержащего квадрат гиперболического оператора и нелинейное отражающее отклонение", *Вестник ТомГУ. Математика и Механика*, **14**:2 (2011), 59 – 69.

14. Юлдашев Т. К., "Смешанная задача для нелинейного дифференциального уравнения четвертого порядка с малым параметром при параболическом операторе", *Журнал вычисл. математики и мат. физики*, **51**:9 (2011), 1703 – 1711.

15. Юлдашев Т. К., "Смешанная задача для нелинейного интегро-дифференциального уравнения, содержащего куб параболического оператора", *Вестник СибГАУ*, **35**:2 (2011), 96 – 100.

16. Юлдашев Т. К., "О смешанной задаче для одного нелинейного интегро-дифференциального уравнения в частных производных четвертого порядка", *Журн. СВМО*, **14**:2 (2012), 137 – 142.

17. Юлдашев Т. К., “Об устойчивости по малым параметрам решения смешанной задачи для нелинейного псевдогиперболического уравнения”, *Журн. СВМО*, **15**:1 (2013), 134 – 142.

18. Юлдашев Т. К., “Об одной обратной задаче для линейного интегро-дифференциального уравнения Фредгольма в частных производных четвертого порядка”, *Вестник ВоронежГУ. Серия: Физика. Математика*, 2015, № 2, 180 – 189.

19. Кошелев А. И., Челкак С. И., “О регулярности решений систем высших порядков”, *Докл. АН СССР*, **272**:2 (1983), 297 – 300.

20. Похожаев С. И., “О квазилинейных эллиптических уравнениях высокого порядка”, *Дифференц. уравнения*, **17**:1 (1981), 115 – 128.

21. Скрыпник И. В., *Нелинейные эллиптические уравнения высшего порядка*, Наукова думка, Киев, 1973, 219 с.

22. Тодоров Т. Г., “О непрерывности ограниченных обобщенных решений квазилинейных эллиптических уравнений высокого порядка”, *Вестник ЛГУ*, **19** (1975), 56 – 63.

23. Юлдашев Т. К., “Смешанная задача для нелинейного интегро-дифференциального уравнения с параболическим оператором высокой степени”, *Журнал вычисл. математики и мат. физики*, **52**:1 (2012), 112 – 123.

24. Юлдашев Т. К., “Смешанная задача для нелинейного уравнения с псевдопараболическим оператором высокой степени”, *Вестник ВоронежГУ. Серия: Физика. Математика*, 2013, № 2, 277 – 295.

25. Юлдашев Т. К., *Нелинейные уравнения в частных производных высоких порядков*, СибГАУ, Красноярск, 2014, 187 с.

26. Юлдашев Т. К., “Обратная задача для одного нелинейного уравнения в частных производных восьмого порядка”, *Вестник СамГТУ. Серия: Физ.-мат. науки*, **19**:1 (2015), 136 – 154.

Дата поступления 16.04.2016

Stability and differentiability with respect to small parameter of mixed value problem for a nonlinear partial differential equation of eighth order

© **T. K. Yuldashev**[2]

Abstract. Paper deals with continuous dependence and differentiability with respect to small parameter of generalized solution of mixed value problem for nonlinear partial differential equation of the eighth order, left-hand side of which is superposition of two operators of fourth order. By the aid of Fourier method the mixed problem is reduced to the study of countable system of nonlinear Volterra integral equations of the second kind with small parameter. We proved the continuous dependence of generalized solution of considered mixed value problem with respect to small positive parameter. Also we proved the differentiability of the solution with respect to small positive parameter. While proofing the existence of derivative of countable system of nonlinear Volterra integral equations of the second kind the method of successive approximations is used. The results obtained in this paper play important role in construction of the asymptotic expansions with respect to small parameter of solution of mixed value problem for considered nonlinear partial differential equation of the eighth order.

Key Words: mixed value problem, equation of eighth order, superposition of differential operators, stability of solution with respect to small parameter, differentiability of solution with respect to small parameter

[2] Associate professor of Higher Mathematics Chair, M. F. Reshetnev Siberian State Aerospace University, Krasnoyarsk, tursun.k.yuldashev@gmail.com