УДК 517.988.67

О ветвлении периодических решений линейных неоднородных дифференциальных уравнений с вырожденным или тождественным оператором при производной и возмущением в виде малого линейного слагаемого

© **А. А. Кяшкин** [1], **Б. В. Логинов** [2], **П. А. Шаманаев** [3]

Аннотация. В банаховом пространстве методами теории ветвления доказано существование и единственность периодических решений линейных неоднородных дифференциальных уравнений с вырожденным или тождественным оператором при производной и возмущением в виде малого линейного слагаемого. В статье показано, что периодическое решение имеет полюс в точке $\varepsilon = 0$, а при значении $\varepsilon = 0$ переходит в $2n$-параметрическое семейство периодических решений. Результат получен с помощью применения теории обобщенных жордановых наборов, сводящий исходную задачу к исследованию разрешающей системы Ляпунова-Шмидта в корневом подпространстве. При этом разрешающая система распадается на две неоднородные системы линейных алгебраических уравнений, которые при $\varepsilon \neq 0$ имеют единственные решения, а при $\varepsilon = 0$ – n-параметрические семейства решений, соответственно.

Ключевые слова: ветвление периодических решений, дифференциальные уравнения в банаховых пространствах, обобщенные жордановы наборы, разрешающая система Ляпунова-Шмидта в корневом подпространстве

1. Постановка задачи

В банаховых пространствах E_1, E_2 рассматривается дифференциальное уравнение

$$A\frac{dx}{dt} = (B_0 - \varepsilon B_1)\,x - f(t), \tag{1.1}$$

где A и B_0 - плотно заданные линейные фредгольмовы операторы, $f(t+\omega) = f(t)$, $\omega > 0$. Предполагается, что операторы A и B_0 не имеют общих нуль-элементов, а также условия: $D_B \subset D_A$ и A подчинен B_0, т. е. $\|Ax\| \leqslant \|B_0x\| + \|x\|$ на D_{B_0} или $D_A \subset D_{B_0}$ и B_0 подчинен A, т. е. $\|B_0x\| \leqslant \|Ax\| + \|x\|$ на D_A, что позволяет свести обсуждение к ограниченным операторам [1], [3], [4].

Пусть числа $\pm i\alpha_\sigma$ ($\alpha_\sigma = m_\sigma\alpha$, $\alpha = \frac{2\pi}{\omega}$, $m_\sigma \in \mathbb{N}$, $\sigma = \overline{1,r}$) являются A-собственными значениями оператора B_0, причем каждому числу из пары $\pm i\alpha_\sigma$ отвечает n_σ групп решений уравнения

$$A\frac{dy}{dt} = B_0 y. \tag{1.2}$$

Тогда уравнение (1.2) имеет $2n$ ($n = n_1 + ... + n_r$) ω-периодических решений $\varphi_k^{(1)}$, $\bar{\varphi}_k^{(1)}$ ($k = \overline{1,n}$).

[1] Аспирант кафедры прикладной математики, дифференциальных уравнений и теоретической механики, Мордовский государственный университет им. Н. П. Огарёва, г. Саранск; andrej_kjashkin@list.ru.

[2] Профессор кафедры "Высшая математика" , Ульяновский государственный технический университет, г. Ульяновск; loginov@ulstu.ru

[3] Доцент кафедры прикладной математики, дифференциальных уравнений и теоретической механики, Мордовский государственный университет им. Н. П. Огарёва, г. Саранск; korspa@yandex.ru.

Ставится задача [1] об отыскании при достаточно малых вещественных ε ω – периодических решений $x(t,\varepsilon)$ уравнения (1.1), удовлетворяющих условию $x(t,0)=z(t)$, где $z(t)$ — ω – периодические решения уравнения

$$A\frac{dz}{dt}=B_0z-f(t). \tag{1.3}$$

2. Построение разрешающей системы Ляпунова-Шмидта в корневом подпространстве

Для решения поставленной задачи представим уравнение (1.1) в виде

$$\mathcal{B}_0x=f(t)+\varepsilon B_1x, \quad \mathcal{B}_0x\equiv B_0x(t)-A\frac{dx}{dt}, \tag{2.1}$$

и применим методы теории ветвления построения обобщенных жордановых наборов, приводящие к исследованию разрешающих систем Ляпунова-Шмидта в корневом подпространстве [2], [5]-[11].

Обозначим $\mathcal{N}(\mathcal{B}_0)=span\{\varphi_k^{(1)},\ \ \bar\varphi_k^{(1)}\}_{k=1}^n$.

Определение 2.1. [1] *Будем говорить, что элемент* $\varphi_k^{(1)}$ $(\psi_k^{(1)})$ *имеет* B_1 - (B_1^*)*-жорданову цепочку длины* p_k, *если существует* p_k *элементов* $\varphi_k^{(1)},...,\varphi_k^{(p_k)}$ ($\psi_k^{(1)},...,\psi_k^{(p_k)}$), *удовлетворяющих соотношениям*

$$\mathcal{B}_0\varphi_k^{(1)}=0,\ \ \mathcal{B}_0\varphi_k^{(j)}=B_1\varphi_k^{(j-1)}, \quad (\mathcal{B}_0^*\psi_k^{(1)}=0,\ \mathcal{B}_0^*\psi_k^{(j)}=B_1^*\psi_k^{(j-1)}), \quad j=\overline{2,p_k}, \quad k=\overline{1,n},$$

где для $\varphi_k^{(j)}$, $\psi_k^{(j)}$ *выполняются условия биортогональности*

$$\begin{aligned}&\ll\varphi_k^{(j)},\gamma_s^{(l)}\gg=\delta_{ks}\delta_{jl}, \ll z_k^{(j)},\psi_s^{(l)}\gg=\delta_{ks}\delta_{jl},\\ &\gamma_s^{(l)}=B_1^*\psi_s^{(p_s+1-l)}, z_k^{(j)}=B_1\varphi_k^{(p_k+1-j)}, \quad j=\overline{1,p_k},\ \ l=\overline{1,p_s},\ \ k,s=\overline{1,n}.\end{aligned} \tag{2.2}$$

Здесь,

$$\ll x,h\gg=\frac{1}{\omega}\int_0^\omega\langle x(t),h(t)\rangle dt, \quad \langle x(t),h(t)\rangle=x(t)\cdot\bar h(t),$$

$(\cdot)$ – скалярное произведение.

Вводя регуляризатор Шмидта $\widetilde{\mathcal{B}}_0=\mathcal{B}_0+\sum\limits_{k=1}^n\ll\cdot,\gamma_k^{(1)}\gg z_k^{(1)}+\sum\limits_{k=1}^n\ll\cdot,\bar\gamma_k^{(1)}\gg\bar z_k^{(1)}$, запишем уравнение (2.1) в виде системы

$$\begin{cases}\widetilde{\mathcal{B}}_0x=\varepsilon B_1x+\sum\limits_{k=1}^n(\xi_{k1}z_k^{(1)}+\bar\xi_{k1}\bar z_k^{(1)})+f(t),\\ \xi_{sl}=\ll x,\gamma_s^{(l)}\gg,\ \ \bar\xi_{sl}=\ll x,\bar\gamma_s^{(l)}\gg,\ \ l=\overline{1,p_s},\ s=\overline{1,n}.\end{cases} \tag{2.3}$$

Решение системы (2.3) будем искать в виде [3]-[4]

$$x=w+v, \quad v=\xi\cdot\varphi+\bar\xi\cdot\bar\varphi\in E_1^{2K}, \tag{2.4}$$

где $K=p_1+...+p_k$,

$$\varphi=(\varphi_1^{(1)},\ldots,\varphi_1^{(p_1)},\ldots\varphi_n^{(1)},\ldots,\varphi_n^{(p_n)}), \quad \xi=(\xi_{11},\ldots,\xi_{1p_1},\ldots\xi_{n1},\ldots,\xi_{np_n}),$$

Подставляя выражение (2.4) в первое уравнение системы (2.3), получим

$$\widetilde{\mathcal{B}}_0 w + \widetilde{\mathcal{B}}_0 v = \varepsilon B_1 w + \varepsilon B_1 v + \sum_{k=1}^{n}(\xi_{k1} z_k^{(1)} + \bar{\xi}_{k1}\bar{z}_k^{(1)}) + f(t).$$

Обозначим $\Gamma_0 = \widetilde{\mathcal{B}}_0^{-1}$, и учитывая, что $\Gamma_0 z_k^{(1)} = \varphi_k^{(1)}$, $\Gamma_0 \bar{z}_k^{(1)} = \bar{\varphi}_k^{(1)}$, находим

$$[I - \varepsilon\Gamma_0 B_1]w = -[I - \varepsilon\Gamma_0 B_1]v + \sum_{k=1}^{n}(\xi_{k1}\varphi_k^{(1)} + \bar{\xi}_{k1}\bar{\varphi}_k^{(1)}) + \Gamma_0 f(t).$$

Пусть для ε выполняется условия $|\varepsilon| \le \rho_0 < ||\Gamma_0 B_1||^{-1}$, тогда оператор $[I - \varepsilon\Gamma_0 B_1]^{-1}$ существует и

$$w = -v + [I - \varepsilon\Gamma_0 B_1]^{-1}\sum_{k=1}^{n}(\xi_{k1}\varphi_k^{(1)} + \bar{\xi}_{k1}\bar{\varphi}_k^{(1)}) + [I - \varepsilon\Gamma_0 B_1]^{-1}\Gamma_0 f(t). \tag{2.5}$$

Учитывая равенство $[I - \varepsilon\Gamma_0 B_1]^{-1} = I + \varepsilon\Gamma_0 B_1[I - \varepsilon\Gamma_0 B_1]^{-1}$, получим

$$\begin{aligned} w = \ & -v + \sum_{k=1}^{n}(\xi_{k1}\varphi_k^{(1)} + \bar{\xi}_{k1}\bar{\varphi}_k^{(1)}) + \varepsilon\Gamma_0 B_1[I - \varepsilon\Gamma_0 B_1]^{-1}\sum_{k=1}^{n}(\xi_{k1}\varphi_k^{(1)} + \bar{\xi}_{k1}\bar{\varphi}_k^{(1)}) + \\ & + [I - \varepsilon\Gamma_0 B_1]^{-1}\Gamma_0 f(t). \end{aligned}$$

С учетом $[I - \varepsilon\Gamma_0 B_1]^{-1}\Gamma_0 = \Gamma_0[I - \varepsilon B_1\Gamma_0]^{-1}$, находим

$$\begin{aligned} w = \ & -\sum_{k=1}^{n}\sum_{j=2}^{p_k}(\xi_{kj}\varphi_k^{(j)} + \bar{\xi}_{kj}\bar{\varphi}_k^{(j)}) + \varepsilon\Gamma_0 B_1[I - \varepsilon\Gamma_0 B_1]^{-1}\sum_{k=1}^{n}(\xi_{k1}\varphi_k^{(1)} + \bar{\xi}_{k1}\bar{\varphi}_k^{(1)}) + \\ & + \Gamma_0[I - \varepsilon B_1\Gamma_0]^{-1} f(t). \end{aligned} \tag{2.6}$$

Учитывая равенства $(\Gamma_0 B_1)^j \varphi_k^{(1)} = \varphi_k^{(r_k+1)}$, $(\Gamma_0 B_1)^j \bar{\varphi}_k^{(1)} = \bar{\varphi}_k^{(r_k+1)}$, где r_k – остаток от деления j на p_k, получим

$$\varepsilon\Gamma_0 B_1[I - \varepsilon\Gamma_0 B_1]^{-1}\varphi_k^{(1)} = \frac{1}{1-\varepsilon^{p_k}}(\varepsilon\varphi_k^{(2)} + \varepsilon^2\varphi_k^{(3)} + \ldots + \varepsilon^{p_k-1}\varphi_k^{(p_k)} + \varepsilon^{p_k}\varphi_k^{(1)}), \tag{2.7}$$

$$\varepsilon\Gamma_0 B_1[I - \varepsilon\Gamma_0 B_1]^{-1}\bar{\varphi}_k^{(1)} = \frac{1}{1-\varepsilon^{p_k}}(\varepsilon\bar{\varphi}_k^{(2)} + \varepsilon^2\bar{\varphi}_k^{(3)} + \ldots + \varepsilon^{p_k-1}\bar{\varphi}_k^{(p_k)} + \varepsilon^{p_k}\bar{\varphi}_k^{(1)}). \tag{2.8}$$

Подставляя выражение (2.4) во второе и третье уравнение системы (2.3) и учитывая условия биортогональности (2.2), получим разрешающую систему следующего вида:

$$\begin{cases} -\ll w, \gamma_s^{(l)} \gg = 0, \ l = \overline{1,p_s}, \\ -\ll w, \bar{\gamma}_s^{(l)} \gg = 0, \ s = \overline{1,n}. \end{cases} \qquad \text{или} \qquad \begin{cases} -\ll w, \gamma_s^{(1)} \gg = 0, \\ -\ll w, \gamma_s^{(l)} \gg = 0, \quad l = \overline{2,p_s}, \\ -\ll w, \bar{\gamma}_s^{(1)} \gg = 0, \\ -\ll w, \bar{\gamma}_s^{(l)} \gg = 0, \quad l = \overline{2,p_s}, \\ s = \overline{1,n}. \end{cases} \tag{2.9}$$

Подставляя выражение (2.6) для w в разрешающую систему (2.9), получим

$$\begin{aligned} & \sum_{k=1}^{n}\sum_{j=2}^{p_k}\Big[\xi_{kj} \ll \varphi_k^{(j)}, \gamma_s^{(l)} \gg + \bar{\xi}_{kj} \ll \bar{\varphi}_k^{(j)}, \gamma_s^{(l)} \gg\Big] - \\ & - \sum_{k=1}^{n}\xi_{k1} \ll \varepsilon\Gamma_0 B_1[I - \varepsilon\Gamma_0 B_1]^{-1}\varphi_k^{(1)}, \gamma_s^{(l)} \gg - \sum_{k=1}^{n}\bar{\xi}_{k1} \ll \varepsilon\Gamma_0 B_1[I - \varepsilon\Gamma_0 B_1]^{-1}\bar{\varphi}_k^{(1)}, \gamma_s^{(l)} \gg = \\ & = \ll \Gamma_0[I - \varepsilon\Gamma_0 B_1]^{-1} f(t), \gamma_s^{(l)} \gg, \quad l = \overline{1,p_s}, s = \overline{1,n}, \end{aligned} \tag{2.10}$$

$$\sum_{k=1}^{n}\sum_{j=2}^{p_k}\Big[\xi_{kj} \ll \varphi_k^{(j)}, \bar\gamma_s^{(l)} \gg +\bar\xi_{kj} \ll \bar\varphi_k^{(j)}, \bar\gamma_s^{(l)} \gg \Big]-$$
$$-\sum_{k=1}^{n}\xi_{k1} \ll \varepsilon\Gamma_0 B_1[I-\varepsilon\Gamma_0 B_1]^{-1}\varphi_k^{(1)}, \bar\gamma_s^{(l)} \gg - \sum_{k=1}^{n}\bar\xi_{k1} \ll \varepsilon\Gamma_0 B_1[I-\varepsilon\Gamma_0 B_1]^{-1}\bar\varphi_k^{(1)}, \bar\gamma_s^{(l)} \gg=$$
$$=\ll \Gamma_0[I-\varepsilon\Gamma_0 B_1]^{-1}f(t), \bar\gamma_s^{(l)} \gg, \quad l=\overline{1,p_s}, s=\overline{1,n}. \tag{2.11}$$

Учитывая выражения (2.7), (2.8), и условия биортогональности (2.2), вычислим при $l=1$

$$\begin{aligned}&\ll \varepsilon\Gamma_0 B_1[I-\varepsilon\Gamma_0 B_1]^{-1}\varphi_k^{(1)}, \gamma_s^{(1)} \gg= \frac{\varepsilon^{p_k}}{1-\varepsilon^{p_k}}\delta_{ks},\\ &\ll \varepsilon\Gamma_0 B_1[I-\varepsilon\Gamma_0 B_1]^{-1}\bar\varphi_k^{(1)}, \bar\gamma_s^{(1)} \gg= \frac{\varepsilon^{p_k}}{1-\varepsilon^{p_k}}\delta_{ks},\end{aligned} \tag{2.12}$$

при $l=\overline{2,p_s}$

$$\begin{aligned}&\ll \varepsilon\Gamma_0 B_1[I-\varepsilon\Gamma_0 B_1]^{-1}\varphi_k^{(1)}, \gamma_s^{(l)} \gg= \frac{\varepsilon^{l}}{1-\varepsilon^{p_k}}\delta_{ks},\\ &\ll \varepsilon\Gamma_0 B_1[I-\varepsilon\Gamma_0 B_1]^{-1}\bar\varphi_k^{(1)}, \bar\gamma_s^{(l)} \gg= \frac{\varepsilon^{l}}{1-\varepsilon^{p_k}}\delta_{ks}.\end{aligned} \tag{2.13}$$

Здесь, $|\varepsilon|\le\rho_1<1$. Аналогично, находим

$$\ll \varepsilon\Gamma_0 B_1[I-\varepsilon\Gamma_0 B_1]^{-1}\bar\varphi_k^{(1)}, \gamma_s^{(l)} \gg=0, \quad \ll \varepsilon\Gamma_0 B_1[I-\varepsilon\Gamma_0 B_1]^{-1}\varphi_k^{(1)}, \bar\gamma_s^{(l)} \gg=0.$$

С учетом равенств $\Gamma_0^*\gamma_s^{(1)}=\psi_s^{(1)}$, $\Gamma_0^*\bar\gamma_s^{(1)}=\bar\psi_s^{(1)}$, $\Gamma_0^*\gamma_s^{(l)}=\psi_s^{(p_s+2-l)}$, $\Gamma_0^*\bar\gamma_s^{(l)}=\bar\psi_s^{(p_s+2-l)}$ $(l=\overline{2,p_s})$, представим правую часть разрешающей системы (2.9) в виде

$$\begin{aligned}&\ll \Gamma_0[I-\varepsilon\Gamma_0 B_1]^{-1}f(t), \gamma_s^{(1)} \gg=\ll f(t), [I-\varepsilon\Gamma_0^* B_1^*]^{-1}\psi_s^{(1)} \gg,\\ &\ll \Gamma_0[I-\varepsilon\Gamma_0 B_1]^{-1}f(t), \gamma_s^{(l)} \gg=\ll f(t), [I-\varepsilon\Gamma_0^* B_1^*]^{-1}\psi_s^{(p_s+2-l)} \gg,\\ &\ll \Gamma_0[I-\varepsilon\Gamma_0 B_1]^{-1}f(t), \bar\gamma_s^{(1)} \gg=\ll f(t), [I-\varepsilon\Gamma_0^* B_1^*]^{-1}\bar\psi_s^{(1)} \gg,\\ &\ll \Gamma_0[I-\varepsilon\Gamma_0 B_1]^{-1}f(t), \bar\gamma_s^{(l)} \gg=\ll f(t), [I-\varepsilon\Gamma_0^* B_1^*]^{-1}\bar\psi_s^{(p_s+2-l)} \gg.\end{aligned} \tag{2.14}$$

Учитывая равенства $(\Gamma_0^* B_1^*)^l\psi_s^{(1)}=\psi_s^{(g_s+1)}$, $(\Gamma_0^* B_1^*)^l\bar\psi_s^{(1)}=\bar\psi_s^{(g_s+1)}$, где g_s – остаток от деления l на p_s, получим

$$\begin{aligned}&h_{s1}\equiv[I-\varepsilon\Gamma_0^* B_1^*]^{-1}\psi_s^{(1)}=\frac{1}{1-\varepsilon^{p_s}}(\psi_s^{(1)}+\varepsilon\psi_s^{(2)}+...+\varepsilon^{p_s-1}\psi_s^{(p_s)}),\\ &h_{sl}\equiv[I-\varepsilon\Gamma_0^* B_1^*]^{-1}\psi_s^{(p_s+2-l)}=\frac{1}{1-\varepsilon^{p_s}}(\psi_s^{(p_s+2-l)}+\varepsilon\psi_s^{(p_s+3-l)}+...\\ &...+\varepsilon^{l-2}\psi_s^{(p_s)}+\varepsilon^{l-1}\psi_s^{(1)}+...+\varepsilon^{p_s-1}\psi_s^{(p_s+1-l)}), \quad l=\overline{2,p_s},\ s=\overline{1,n}.\end{aligned} \tag{2.15}$$

$$\begin{aligned}&\bar h_{s1}\equiv[I-\varepsilon\Gamma_0^* B_1^*]^{-1}\bar\psi_s^{(1)}=\frac{1}{1-\varepsilon^{p_s}}(\bar\psi_s^{(1)}+\varepsilon\bar\psi_s^{(2)}+...+\varepsilon^{p_s-1}\bar\psi_s^{(p_s)}),\\ &\bar h_{sl}\equiv[I-\varepsilon\Gamma_0^* B_1^*]^{-1}\bar\psi_s^{(p_s+2-l)}=\frac{1}{1-\varepsilon^{p_s}}(\bar\psi_s^{(p_s+2-l)}+\varepsilon\bar\psi_s^{(p_s+3-l)}+...\\ &...+\varepsilon^{l-2}\bar\psi_s^{(p_s)}+\varepsilon^{l-1}\bar\psi_s^{(1)}+...+\varepsilon^{p_s-1}\bar\psi_s^{(p_s+1-l)}), \quad l=\overline{2,p_s},\ s=\overline{1,n}.\end{aligned} \tag{2.16}$$

Тогда, с учетом (2.12), (2.13), (2.15) и (2.16), разрешающая система (2.10)-(2.11) примет вид

$$\begin{cases} -\dfrac{\varepsilon^{p_s}}{1-\varepsilon^{p_s}}\xi_{s1} = \ll f, h_{s1} \gg, \quad l=1, \\ \xi_{sl} - \dfrac{\varepsilon^{l-1}}{1-\varepsilon^{p_s}}\xi_{s1} = \ll f, h_{sl} \gg, \quad l=\overline{2,p_s}, \\ -\dfrac{\varepsilon^{p_s}}{1-\varepsilon^{p_s}}\bar{\xi}_{s1} = \ll f, \bar{h}_{s1} \gg, \quad l=1, \\ \bar{\xi}_{sl} - \dfrac{\varepsilon^{l-1}}{1-\varepsilon^{p_s}}\bar{\xi}_{s1} = \ll f, \bar{h}_{sl} \gg, \quad l=\overline{2,p_s}, \\ s=\overline{1,n}. \end{cases} \tag{2.17}$$

Выделим вещественные и мнимые части коэффициентов ξ_{sl} и $\bar{\xi}_{sl}$

$$\xi_{sl} = \xi_{sl}^{(1)} + i\xi_{sl}^{(2)}, \quad \bar{\xi}_{sl} = \xi_{sl}^{(1)} - i\xi_{sl}^{(2)},$$

и подставим их в систему (2.17). Получим

$$\begin{cases} -\dfrac{\varepsilon^{p_s}}{1-\varepsilon^{p_s}}\xi_{s1}^{(1)} - i\dfrac{\varepsilon^{p_s}}{1-\varepsilon^{p_s}}\xi_{s1}^{(2)} = \ll f, h_{s1} \gg, \quad l=1, \\ \xi_{sl}^{(1)} + i\xi_{sl}^{(2)} - \dfrac{\varepsilon^{l-1}}{1-\varepsilon^{p_s}}\xi_{s1}^{(1)} - i\dfrac{\varepsilon^{l-1}}{1-\varepsilon^{p_s}}\xi_{s1}^{(2)} = \ll f, h_{sl} \gg, \quad l=\overline{2,p_s}, \\ -\dfrac{\varepsilon^{p_s}}{1-\varepsilon^{p_s}}\xi_{s1}^{(1)} + i\dfrac{\varepsilon^{p_s}}{1-\varepsilon^{p_s}}\xi_{s1}^{(2)} = \ll f, \bar{h}_{s1} \gg, \quad l=1, \\ \xi_{sl}^{(1)} - i\xi_{sl}^{(2)} - \dfrac{\varepsilon^{l-1}}{1-\varepsilon^{p_s}}\xi_{s1}^{(1)} + i\dfrac{\varepsilon^{l-1}}{1-\varepsilon^{p_s}}\xi_{s1}^{(2)} = \ll f, \bar{h}_{sl} \gg, \quad l=\overline{2,p_s}, \\ s=\overline{1,n}. \end{cases} \tag{2.18}$$

При фиксированных s и l сложим первое и третье, второе и четвертое уравнения системы (2.18) соответственно, и возьмем получившиеся уравнения в качестве первой системы. Аналогично, при фиксированных s и l вычтем из первого уравнения третье, а из второго — четвертое уравнение системы (2.18), и возьмем получившиеся уравнения в качестве второй системы. Тогда, учитывая, что $\frac{1}{2}(h_{sl}+\bar{h}_{sl}) = Re\, h_{sl}$, $\frac{1}{2i}(h_{sl}-\bar{h}_{sl}) = Im\, h_{sl}$, система распадется на две системы линейных алгебраических уравнений с вещественными коэффициентами

$$\begin{cases} -\dfrac{\varepsilon^{p_s}}{1-\varepsilon^{p_s}}\xi_{s1}^{(1)} &= \ll f, Re\, h_{s1} \gg, \\ \xi_{sl}^{(1)} - \dfrac{\varepsilon^{l-1}}{1-\varepsilon^{p_s}}\xi_{s1}^{(1)} &= \ll f, Re\, h_{sl} \gg, \quad l=\overline{2,p_s},\ s=\overline{1,n}, \end{cases} \tag{2.19}$$

$$\begin{cases} -\dfrac{\varepsilon^{p_s}}{1-\varepsilon^{p_s}}\xi_{s1}^{(2)} &= \ll f, Im\, h_{s1} \gg, \\ \xi_{sl}^{(2)} - \dfrac{\varepsilon^{l-1}}{1-\varepsilon^{p_s}}\xi_{s1}^{(2)} &= \ll f, Im\, h_{sl} \gg, \quad l=\overline{2,p_s},\ s=\overline{1,n}. \end{cases} \tag{2.20}$$

Системы (2.19) и (2.20) могут быть записаны в матричной форме

$$D\xi^{(1)} = Re\, g, \tag{2.21}$$

$$D\xi^{(2)} = Im\, g, \tag{2.22}$$

здесь $D \equiv [d_{sl,kj}]$ - $(K \times K)$-матрица ($l = \overline{1,p_s}$, $s = \overline{1,n}$; $j = \overline{1,p_k}$, $k = \overline{1,n}$), $K = p_1 + p_2 + ... + p_n$,

$$\xi^{(1)} = colon(\xi^{(1)}_{11}, \xi^{(1)}_{12}, ..., \xi^{(1)}_{1p_1}, ..., \xi^{(1)}_{n1}, \xi^{(1)}_{n2}, ..., \xi^{(1)}_{np_n}),$$
$$\xi^{(2)} = colon(\xi^{(2)}_{11}, \xi^{(2)}_{12}, ..., \xi^{(2)}_{1p_1}, ..., \xi^{(2)}_{n1}, \xi^{(2)}_{n2}, ..., \xi^{(2)}_{np_n}),$$
$$g = colon(g_{11}, g_{12}, ..., g_{1p_1}, ..., g_{n1}, g_{n2}, ..., g_{np_n}),$$
$$g_{sl} = \ll f, h_{sl} \gg, \quad l = \overline{1,p_s}, \; s = \overline{1,n}.$$

Матрица D имеет блочно-диагональную структуру

$$D = \begin{pmatrix} D_1 & 0 & ... & 0 \\ 0 & D_2 & ... & 0 \\ ... & ... & ... & ... \\ 0 & 0 & ... & D_n \end{pmatrix}, \quad D_s = \begin{pmatrix} -\dfrac{\varepsilon^{p_s}}{1-\varepsilon^{p_s}} & 0 & 0 & ... & 0 \\ -\dfrac{\varepsilon}{1-\varepsilon^{p_s}} & 1 & 0 & ... & 0 \\ -\dfrac{\varepsilon^2}{1-\varepsilon^{p_s}} & 0 & 1 & ... & 0 \\ ... & ... & ... & ... & ... \\ -\dfrac{\varepsilon^{p_s-1}}{1-\varepsilon^{p_s}} & 0 & 0 & ... & 1 \end{pmatrix}, \quad s = \overline{1,n}. \tag{2.23}$$

3. Решения разрешающей системы и ветвление периодических решений

Найдем условия, при которых решения разрешающей системы существуют. При $\varepsilon = 0$ ранг матрицы D равен $K - n$. Тогда для существования решения систем (2.21) и (2.22) необходимо и достаточно, чтобы ранг расширенных матриц $(D|Re\, g)$ и $(D|Im\, g)$ также был равен $K - n$. Это условие выполняется только в том случае, когда при всех $s = \overline{1,n}$ выполняется условие

$$g_{s1} \equiv \ll f, h_{s1} \gg = 0. \tag{3.1}$$

Покажем справедливость условия (3.1). Так как при $\varepsilon = 0$ $h_{s1} = \psi^{(1)}_s$ и $\ll f, \psi^{(1)}_s \gg = 0$ (в силу разрешимости уравнения (1.3)), то условие (3.1) верно при всех $s = \overline{1,n}$.

Тогда из систем (2.21) и (2.22) находим $\xi^{(1)}_{k1} = c^{(1)}_k$, $\xi^{(2)}_{k1} = c^{(2)}_k$, где $c^{(1)}_k$, $c^{(2)}_k$ – произвольные вещественные числа. Учитывая, что при $\varepsilon = 0$ уравнения (1.1) и (1.3) совпадают, а следовательно, и их решения также совпадают, находим, что их ω – периодические решения представимы в виде

$$x(t,0) = z(t) \equiv \sum_{k=1}^{n} [c^{(1)}_k \varphi^{(1)}_k + c^{(2)}_k \bar{\varphi}^{(1)}_k] + \Gamma_0 f(t). \tag{3.2}$$

При $\varepsilon \neq 0$ определитель матрицы D отличен от нуля и, следовательно, каждая из систем (2.21) и (2.22) имеет единственное решение. Учитывая (2.15), из систем (2.19) и

(2.20) соответственно находим

$$
\begin{aligned}
\xi_{k1}^{(1)} &= -\frac{1-\varepsilon^{p_k}}{\varepsilon^{p_k}} \ll f, Re\, h_{k1} \gg = \\
&= -\frac{1}{\varepsilon^{p_k}}(c_{k1}^{(1)} + c_{k2}^{(1)}\varepsilon + c_{k3}^{(1)}\varepsilon^2 + \ldots + c_{kj}^{(1)}\varepsilon^{j-1} + \ldots + c_{k,p_k}^{(1)}\varepsilon^{p_k-1}), \\
\xi_{k1}^{(2)} &= -\frac{1-\varepsilon^{p_k}}{\varepsilon^{p_k}} \ll f, Im\, h_{k1} \gg = \\
&= -\frac{1}{\varepsilon^{p_k}}(c_{k1}^{(2)} + c_{k2}^{(2)}\varepsilon + c_{k3}^{(2)}\varepsilon^2 + \ldots + c_{kj}^{(2)}\varepsilon^{j-1} + \ldots + c_{k,p_k}^{(2)}\varepsilon^{p_k-1}), \\
& c_{kj}^{(1)} = \ll f, Re\,\psi_k^{(j)} \gg, \quad c_{kj}^{(2)} = \ll f, Im\,\psi_k^{(j)} \gg, \quad j=\overline{1,p_k},\ k=\overline{1,n}.
\end{aligned}
\tag{3.3}
$$

Здесь, в силу разрешимости уравнения (1.3), выполняется $\ll f, \psi_s^{(1)} \gg = 0$, и, следовательно,

$$c_{k1}^{(1)} \equiv \ll f, Re\,\psi_k^{(1)} \gg = 0, \quad c_{k1}^{(2)} = \ll f, Im\,\psi_k^{(1)} \gg = 0.$$

Таким образом, учитывая (2.4), (2.6)–(2.8), получим, что ω–периодическое решение уравнения (1.1) представимо в виде

$$
\begin{aligned}
x(t,\varepsilon) &= \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{1-\varepsilon^{p_k}} \left[\, \xi_{k1}\varphi_k^{(1)} + \bar{\xi}_{k1}\bar{\varphi}_k^{(1)} \,\right] + [I - \varepsilon\Gamma_0 B_1]^{-1}\Gamma_0 f(t) + \\
&+ \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{1-\varepsilon^{p_k}} \left[\, \varepsilon\left(\xi_{k1}\varphi_k^{(2)} + \bar{\xi}_{k1}\bar{\varphi}_k^{(2)}\right) + \ldots + \varepsilon^{p_k-1}\left(\xi_{k1}\varphi_k^{(p_k)} + \bar{\xi}_{k1}\bar{\varphi}_k^{(p_k)}\right) \,\right],
\end{aligned}
\tag{3.4}
$$

где вещественные и мнимые части ξ_{k1} , $\bar{\xi}_{k1}$ вычисляются по формулам (3.3) и справедлива следующая

Теорема 3.1. *Пусть существует B_1–жорданов набор из нулей оператора $\mathcal{B}_0$, принадлежащих подпространству $\mathcal{N}(\mathcal{B}_0)$, и B_1–присоединенных к ним элементов. Тогда при всех $\varepsilon \in O_\varepsilon$, где*

$$O_\varepsilon = \{\varepsilon \ :\ 0 < |\,\varepsilon\,| \le min(\rho_0, \rho_1)\}, \tag{3.5}$$

существует единственное ω–периодическое решение $x(t,\varepsilon)$, аналитическое по ε, вида (3.4) уравнения (1.1), при этом $x(t,0)$ представляет собой $2n$–параметрическое семейство ω–периодических решений вида (3.2) уравнения (1.3).

Пусть $q_k = \min\{j : c_{kj}^{(1)} \ne 0, c_{kj}^{(2)} \ne 0, j = \overline{2,p_k}\}$ и $q_k = +\infty$, если все $c_{kj}^{(1)} = 0$, $c_{kj}^{(2)} = 0$. Тогда, если существует $q_k < +\infty$, то решение $x(t,\varepsilon)$ уравнения (1.1) в точке $\varepsilon = 0$ имеет полюс порядка $p = \max\limits_{k=\overline{1,n}}\{p_k - q_k + 1\}$. Если же все $q_k = +\infty$, то уравнение (1.1) в точке $\varepsilon = 0$ имеет также аналитическое по ε ω–периодическое решение $x(t,\varepsilon) = [I - \varepsilon\Gamma_0 B_1]^{-1}\Gamma_0 f(t)$.

Работа выполнена в рамках государственного задания № 2014/232 Минобрнауки России и при поддержке гранта РФФИ № 15-01-08599.

Список литературы

1. Вайнберг М. М., Треногин В. А., *Теория ветвления решений нелинейных уравнений*, "Наука", М., 1964, 524 с., Engl. transl. Wolter Noordorf, Leyden, 1974

2. Треногин В. А., "Периодические решения и решения типа перехода абстрактных уравнений реакции-диффузии. Вопросы качественной теории дифференциальных уравнений.", *СОАН СССР*, "Наука", Новосибирск, 1988, 133-140.

3. Кяшкин А. А., Логинов Б. В., Шаманаев П. А., "Комментарии к задачам о возмущениях линейного уравнения малым линейным слагаемым и спектральных характеристик фредгольмова оператора", *Журнал Средневолжского математического общества*, **15**:3 (2013), 100-107.

4. Кяшкин А. А., Логинов Б. В., Шаманаев П. А., "Комментарии к задаче о ветвлении периодических решений при бифуркации Андронова-Хопфа в дифференциальных уравнениях с вырожденным оператором при производной", *Журнал Средневолжского математического общества*, **16**:4 (2014), 33-40.

5. Логинов Б. В., Русак Ю. Б., "Обобщенная жорданова структура в теории ветвления", *"Прямые и обратные задачи для дифференциальных уравнений с частными производными"*, сб. н. работ, ред. М. С. Салахитдинов, Изд-во "Фан"АН Узб.ССР, Ташкент, 1978, 133-148.

6. Русак Ю. Б., *Обобщенная жорданова структура в теории ветвления*, кандидатская диссертация, Инст. математики им. В. М. Романовского АН Узб.ССР. Ташкент, 1979, 126 с.

7. Русак Ю. Б., "Обобщенная жорданова структура аналитической оператор-функции и сопряженной к ней", *Известия Акад. Наук Узб.ССР, физ-мат.*, 1978, №2, 15-19.

8. Loginov B. V., Rousak Yu. B., "Generalized Jordan structure in the problem of the stability of bifurcating solutions", *Nonlinear Analysis: TMA*, **17**:3 (1991), 219-232.

9. Loginov B. V., "Determination of the branching equation by its group symmetry - Andronov-Hopf bifurcation", *Nonlinear Analysis: TMA*, **28**:12 (1997), 2035-2047.

10. Loginov B. V., Kim-Tyan L. R., Rousak Yu.B., "On the stability of periodic solutions for differential equations with a Fredholm operator at the highest derivative", *Nonlinear analysis*, **67**:5 (2007), 1570-1585.

11. Коноплева И.В., Логинов Б.В., Русак Ю.Б., "Симметрия и потенциальность уравнений разветвления в корневых подпространствах в неявно заданных стационарных и динамических бифуркационных задачах", *Известия высших учебных заведений. Северо-Кавказский регион. Серия: Естественные науки.*, 2009, 115-124.

Дата поступления 01.05.2016

The branching of periodic solutions of inhomogeneous linear differential equations with degenerate or identity operator in the derivative and the disturbance in the form of small linear term

© A. A. Kyashkin[4], B. V. Loginov[5], P. A. Shamanaev[6]

Abstract. In a Banach space existence and uniqueness of periodic solutions of inhomogeneous linear differential equations with degenerate or identity operator in the derivative and a disturbance in the form of small linear term proved by branching theory methods. The article shows that the periodic solution has a pole at the point $\varepsilon = 0$, and if $\varepsilon = 0$ the solution goes to $2n$ –parameter set of periodic solutions. The result is obtained by applying the theory of generalized Jordan sets, reducing the original problem to the investigation of the Lyapunov-Schmidt resolution system in the root subspace. In this resolution the system is divided into two non-homogeneous systems of linear algebraic equations. These systems have the only solution when $\varepsilon \neq 0$; when $\varepsilon = 0$ they have n -parameter set of solutions, respectively.

Key Words: differential equations in Banach spaces , generalized Jordan sets, Lyapunov-Schmidt resolution system in the root subspace

[4] Graduate student of Applied Mathematics,, Differential Equations and Theoretical Mechanics Chair, Mordovian State University after N. P. Ogarev, Saransk; andrej_kjashkin@list.ru.

[5] Professor of the Chair "Higher Mathematics" , Ulyanovsk State Technical University, Ulyanovsk; loginov@ulstu.ru

[6] Associate Professor of Applied Mathematics, Differential Equations and Theoretical Mechanics Chair, Mordovian State University after N. P. Ogarev, Saransk; korspa@yandex.ru.