УДК 519.624

О некотором методе регуляризации монотонных уравнений в гильбертовом пространстве

© И. П. Рязанцева[1]

Аннотация. В статье изучаются уравнения с монотонными операторами в гильбертовом пространстве с возмущенными данными. Для этой некорректной задачи строится неявный метод итеративной регуляризации на основе непрерывного аналога метода Ньютона. По сравнению с классическим операторным методом регуляризации мы вводим в правую часть регуляризованного уравнения дополнительные слагаемые. С учетом априорной информации об искомом решении выбираем начальное приближение в этом итеративном методе. Получены достаточные условия сильной сходимости предложенного метода.

Ключевые слова: монотонный оператор, возмущённые данные, итеративный метод, регуляризация, сходимость

Пусть H – вещественное гильбертово пространство, $A : H \to H$ - монотонный хеминепрерывный оператор (см. [1], сс. 22, 23), $D(A) = H$.

Рассмотрим в H уравнение
$$Ax = f. \tag{1.1}$$

Пусть (1.1) имеет непустое множество решений N, которое является выпуклым и замкнутым множеством (см. [2], сс. 29, 31). В наших предположениях установить непрерывную зависимость решения (1.1) от возмущений A и f не удаётся, поэтому задачу (1.1) отнесём к классу некорректных и для её решения применим некоторый метод регуляризации.

Пусть данные задачи (1.1) известны приближённо, а именно, вместо оператора $A : H \to H$ и элемента f известны последовательности $\{A_n\}$ и $\{f_n\}$, при всех $n \geq 1$ обладающие следующими свойствами :

(i) $A_n : H \to H$ - монотонный хеминепрерывный оператор,
$$\|A_n x - Ax\| \leq h_n g(\|x\|) \quad \forall x \in H, \tag{1.2}$$

(ii) $f_n \in H$,
$$\|f_n - f\| \leq \delta_n, \tag{1.3}$$
где $\{\delta_n\}$ и $\{h_n\}$ – бесконечно малые при $n \to \infty$, $g(s)$ - функция, переводящая ограниченное множество в ограниченное, $s \geq 0$.

Базовым методом регуляризации для уравнения (1.1) является операторный метод регуляризации, определяемый уравнением вида
$$A_n \tilde{x}_{\alpha_n} + \alpha_n \tilde{x}_{\alpha_n} = f_n, \tag{1.4}$$
здесь $\{\alpha_n\}$ – убывающая последовательность положительных чисел, причём
$$\lim_{n\to\infty} \alpha_n = 0, \tag{1.5}$$
$$\lim_{n\to\infty} \frac{\delta_n}{\alpha_n} = 0, \tag{1.6}$$

[1] Профессор кафедры прикладной математики, Нижегородский государственный технический университет им. Р.Е. Алексеева, Нижний Новгород; lryazantseva@applmath.ru

$$\lim_{n\to\infty}\frac{h_n}{\alpha_n}=0. \tag{1.7}$$

В наших условиях

$$\lim_{n\to\infty}\|\tilde{x}_{\alpha_n}-x^*\|=0, \tag{1.8}$$

где x^* – нормальное решение (1.1), т.е. элемент из N с минимальной нормой ([2], с.118).

В работе [3] для метода Ньютона [4]

$$v_{n+1}=v_n-[A'(v_n)]^{-1}(Av_n-f),\quad v_0\in H, \tag{1.9}$$

построен непрерывный аналог вида

$$\frac{dv(t)}{dt}=-[A'(v(t))]^{-1}(Av(t)-f),\quad v(t_0)=v_0\in H. \tag{1.10}$$

В [5] предложен регуляризованный непрерывный аналог метода Ньютона следующего вида

$$(A(t)u(t)+\alpha(t)u(t)-f(t))'_t+\gamma(t)[A(t)u(t)+\alpha(t)u(t)-f(t)]=0, \tag{1.11}$$

$$u(t_0)=u_0\in H, \tag{1.12}$$

где $A(t)$ и $f(t)$ – некоторые приближения A и f соответственно, $t\geq t_0$, $\alpha(t)$ – положительная непрерывно дифференцируемая функция, существование $(A(t)u)'_t$, $f'_t(t)$ при $t\geq t_0$ предполагается.

На основе метода (1.11), (1.12) можно строить различные итеративные методы регуляризации, заменяя производные некоторыми разделёнными разностями. Заменив в (1.10) только производную $dv(t)/dt$ разделённой разностью $(v_{n+1}-v_n)/\Delta t$ с $\Delta t=1$ и оставив производную $A'(z)$, придем к методу Ньютона (1.9).

В данной заметке мы производную по t в (1.11) заменим разделённой разностью и придём к неявному итерационному процессу следующего вида:

$$\frac{A_nw_n+\alpha_nw_n-f_n-(A_{n-1}w_{n-1}+\alpha_{n-1}w_{n-1}-f_{n-1})}{\tau_n}+\gamma_n(A_nw_n+\alpha_nw_n-f_n)=0, \tag{1.13}$$

где $n=1,2,\ \dots\ ,$ элемент $w_0\in H$ задаётся произвольно, $\{\alpha_n\}$, $\{\gamma_n\}$, $\{\tau_n\}$ – последовательности положительных чисел, для которых справедливы свойства (1.5) – (1.7).

Установим однозначную разрешимость (1.13) относительно w_n при известном элементе w_{n-1}. Для этого перепишем (1.13) в следующей форме

$$A_nw_n+\alpha_nw_n-f_n=\frac{1}{1+\gamma_n\tau_n}\left(A_{n-1}w_{n-1}+\alpha_{n-1}w_{n-1}-f_{n-1}\right). \tag{1.14}$$

Теперь, используя результаты [1], [2], [6], делаем вывод об однозначной разрешимости уравнения (1.13). Исследуем поведение последовательности $\{w_n\}$ при $n\to\infty$.

Пусть в (1.1) оператор A невозмущён (т.е. $A_n=A$ и $h_n=0$ при всех n), а правая часть f возмущена, т.е. вместо (1.13) имеем

$$\frac{Av_n+\alpha_nv_n-f_n-(Av_{n-1}+\alpha_{n-1}v_{n-1}-f_{n-1})}{\tau_n}+\gamma_n(Av_n+\alpha_nv_n-f_n)=0. \tag{1.15}$$

Введем обозначение

$$u_n=Av_n+\alpha_nv_n-f_n \tag{1.16}$$

и от (1.15) придем к равенству

$$u_n(1+\gamma_n\tau_n) = u_{n-1},$$

т.е.

$$u_n = (1-\beta_n)u_{n-1}, \quad \beta_n = \frac{\gamma_n\tau_n}{1+\gamma_n\tau_n}.$$

Следовательно,

$$\|u_n\| = (1-\beta_n)\|u_{n-1}\| \quad \forall n \geq 1.$$

Отсюда получаем оценку

$$\|u_n\| \leq \|u_0\| \exp\left(-\sum_{i=1}^{n}\beta_i\right), \tag{1.17}$$

где $u_0 = Av_0 + \alpha_0 v_0 - f_0$.

Запишем уравнение (1.4) с точными данными

$$Ax_{\alpha_n} + \alpha_n x_{\alpha_n} = f. \tag{1.18}$$

В силу (1.8)

$$\lim_{n\to\infty} \|x_{\alpha_n} - x^*\| = 0. \tag{1.19}$$

На основании (1.16) и (1.18), приняв во внимание монотонность оператора A и условие (1.3), запишем соотношения

$$\alpha_n\|v_n - x_{\alpha_n}\|^2 \leq (Av_n + \alpha_n v_n - Ax_{\alpha_n} - \alpha_n x_{\alpha_n}, v_n - x_{\alpha_n}) =$$

$$= (u_n + f_n - f, v_n - x_{\alpha_n}) \leq (\|u_n\| + \delta_n)\|v_n - x_{\alpha_n}\|.$$

Отсюда имеем неравенство

$$\|v_n - x_{\alpha_n}\| \leq \frac{\|u_n\|}{\alpha_n} + \frac{\delta_n}{\alpha_n}.$$

Теперь, учитывая установленную оценку (1.17), получаем неравенство вида

$$\|v_n - x_{\alpha_n}\| \leq \|u_0\| \frac{\exp(-\sum_{i=1}^{n}\beta_i)}{\alpha_n} + \frac{\delta_n}{\alpha_n}. \tag{1.20}$$

Следовательно, установлено утверждение.

Т е о р е м а 1.1. *Пусть H – вещественное гильбертово пространство, $A : H \to \to H$ – монотонный хеминепрерывный оператор, $f \in H$, уравнение (1.1) имеет непустое множество решений, выполнены условия (1.3), (1.5), (1.6), и*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\exp(-\sum_{i=1}^{n}\beta_i)}{\alpha_n} = 0, \quad \beta_n = \frac{\gamma_n\tau_n}{1+\gamma_n\tau_n}. \tag{1.21}$$

Тогда последовательность $\{v_n\}$, определяемая равенством (1.15), при $n \to \infty$ сильно сходится к нормальному решению уравнения (1.1) при любом начальном элементе $v_0 \in H$.

Пусть теперь и оператор A задан с ошибкой, тогда при

$$\tilde{u}_n = A_n w_n + \alpha_n w_n - f_n$$

с учетом предположения (1.2) и монотонности операторов A_n имеем

$$\alpha_n \|w_n - x_{\alpha_n}\|^2 \le (A_n w_n + \alpha_n w_n - A_n x_{\alpha_n} - \alpha_n x_{\alpha_n}, w_n - x_{\alpha_n}) =$$

$$= (\tilde{u}_n + f_n - f + A x_{\alpha_n} - A_n x_{\alpha_n}, w_n - x_{\alpha_n}) \le$$
$$\le \left[\|\tilde{u}_n\| + \delta_n + h_n g(\|x_{\alpha_n}\|)\right] \|w_n - x_{\alpha_n}\|.$$

Кроме того, оценка вида (1.17) остаётся справедливой и для членов последовательности $\{\tilde{u}_n\}$, т.е.

$$\|\tilde{u}_n\| \le \|\tilde{u}_0\| \exp\left(-\sum_{i=1}^{n} \beta_i\right), \quad \tilde{u}_0 = A_0 w_0 + \alpha_0 w_0 - f_0. \tag{1.22}$$

Теперь ограниченность $\{x_{\alpha_n}\}$ (см. (1.19)) приводит к оценке

$$\|w_n - x_{\alpha_n}\| \le a_0 \left(\frac{\exp(-\sum_{i=1}^{n} \beta_i)}{\alpha_n} + \frac{\delta_n + h_n}{\alpha_n} \right), \ \ a_0 > 0.$$

Таким образом, доказано утверждение.

Теорема 1.2. *Если в условиях теоремы 1 оператор A задан приближенно, имеет место предельное равенство (1.7), то $w_n \to x^*$ при $n \to \infty$, где элементы последовательности $\{w_n\}$ определяются из уравнения (1.13), x^* – нормальное решение уравнения (1.1).*

Из равенства (1.14) следует, что ошибка правой части его не накапливается. Если $\gamma_n \ge \gamma$, $\tau_n \ge \tau$ при всех n, то имеем сходимость к нулю невязки регуляризованного уравнения со скоростью геометрической прогрессии, $q = 1/(1+\gamma\tau)$. В общем случае близость невязки к нулю определяется оценкой (1.22). Заметим, что из предельного равенства в (1.21) в силу (1.5) следует, что

$$\sum_{n=1}^{\infty} \beta_n = +\infty.$$

Отметим, что уравнения (1.13) и (1.4) отличаются правыми частями, а именно, по сравнению с (1.4) в уравнении (1.13) в правую часть вводится дополнительное возмущение

$$\frac{1}{1+\gamma_n \tau_n}(A_{n-1} w_{n-1} + \alpha_{n-1} w_{n-1} - f_{n-1}),$$

что позволяет при задании элемента w_0 учесть априорную информацию об искомом решении уравнения (1.1). Наличие такой информации необходимо для нахождения решения некорректной задачи (1.1) (см. [7], [8]).

Список литературы

1. Вайнберг М.М., *Вариационный метод и метод монотонных операторов в теории нелинейных уравнений*, Наука, Москва, 1972.

2. Alber Ya., Ryazantseva I., *Nonlinear ill-posed problems of monotone type*, Springer, Dordrecht, 2006.

3. Гаврурин М.К., "Нелинейные функциональные уравнения и непрерывные аналоги итеративных методов", *Известия вузов. Математика*, 1958, № 5(6), 18–31.

4. Треногин В.А., *Функциональный анализ*, Наука, Москва, 1980.

5. Рязанцева И.П., "О некоторых методах непрерывной регуляризации для монотонных уравнений", *Журнал вычислительной математики и математической физики*, **34**:1 (1994), 3–11.

6. Рязанцева И.П., *Избранные главы теории операторов монотонного типа*, НГТУ, Нижний Новгород, 2008.

7. Тихонов А.Н., Гончарский А.В., Степанов В.В., Ягола А.Г., *Регуляризованные алгоритмы и априорная информация*, Наука, Москва, 1983.

8. Тихонов А.Н., Гончарский А.В., Степанов В.В., Ягола А.Г., *Численные методы решения некорректных задач*, Наука, Москва, 1990.

Дата поступления 29.02.2016

On some method of regularization for monotone equations in Hilbert space

© **I. P. Ryazantseva**[2]

Abstract. We study equations with monotone operators in Hilbert space with perturbed data. We construct for this ill-posed problem implicit iterative regularized method using continuous analogue of Newton method. In comparison with classical operator regularized method we introduce supplementary terms in right-hand side of regularized equation. By using a priori information of desired solution we choose initial approximation in this iterative method. We obtain sufficient conditions of strong convergence for propose method.

Key Words: monotone operator, approximate data, iterative method, regularization, convergence

[2] Professor of Applied Mathematics Chair, Nizhny Novgorod State Tehnical University named after R.E. Alekseev, Nizhny Novgorod; lryazantseva@applmath.ru