УДК 519.626

Аппроксимация задач оптимального управления для полулинейных эллиптических уравнений конвекции-диффузии с разрывными коэффициентами и состояниями, с управлениями в коэффициентах операторов диффузионного и конвективного переноса

© Ф. В. Лубышев[1], А. Р. Манапова*[2], М. Э. Файрузов[3]

Аннотация. В данной работе изучается основной спектр проблем аппроксимации нелинейных задач оптимального управления, описываемых эллиптическими уравнениями конвекции-диффузии с разрывными коэффициентами и состояниями, с управлениями в коэффициентах операторов диффузионного и конвективного переноса. Рассматриваются вопросы построения дискретных аналогов оптимизационных задач, вопросы сходимости аппроксимаций по состоянию, функционалу, управлению, регуляризации аппроксимаций.

Ключевые слова: задача оптимального управления, полулинейные эллиптические уравнения, операторы диффузионного и конвективного переноса, разностный метод решения

1. Введение

При исследовании многих процессов в движущихся средах в качестве основных можно выделить диффузионный перенос той или иной субстанции и перенос, обусловленный движением среды, то есть конвективный перенос (см. [1]). Задачи конвекции-диффузии являются типичными для математических моделей механики жидкости и газа. Так, распределение тепла, примесей может происходить не только за счет диффузии, но и быть обусловленым движением среды. Принципиальные особенности физико-химических процессов в механике жидкости и газа могут быть порождены именно учетом движения сред под действием тех или иных сил. Конвективный-диффузионный процесс может играть определяющую роль при моделировании самых разнообразных процессов. В частности, важное значение приобретают экологические проблемы, связанные с описанием процессов распределения примесей в атмосфере и водоемах, с моделированием загрязнения грунтовых вод. В газо- и гидродинамике в качестве базовых моделей многих процессов выступают краевые задачи как для стационарных, так и нестационарных уравнений конвекции-диффузии – эллиптические или параболические уравнения второго порядка с младшими членами. В настоящее время в теории численных методов решения задач УМФ и задач оптимального управления наиболее глубокие результаты получены при рассмотрении процессов с самосопряженными операторами. Это относится как к методам, базирующимся на конечно-разностных аппроксимациях состояния, так и к методам на основе конечно-элементных аппроксимаций.

[1] Профессор кафедры информационных технологий и компьютерной математики, Башкирский государственный университет, г. Уфа; aygulrm@mail.ru.

[2] Доцент кафедры информационных технологий и компьютерной математики, Башкирский государственный университет, г. Уфа; aygulrm@mail.ru.,

* Работа второго автора выполнена при финансовой поддержке гранта Президента Российской Федерации для государственной поддержки молодых российских ученых - кандидатов наук (МК-4147.2015.1);

[3] Доцент кафедры информационных технологий и компьютерной математики, Башкирский государственный университет, г. Уфа; fairuzovme@mail.ru.

Данная работа посвящена исследованию численных методов решения наиболее важных для теории и практики задач оптимального управления для эллиптических уравнений второго порядка с несамосопряженными операторами – задач конвекции-диффузии. Процессы управления описываются полулинейными уравнениями конвекции-диффузии с разрывными коэффициентами и состояниями с управлениями в коэффициентах операторов диффузионного и конвективного переноса. Выделен класс задач для состояния процесса, который связан с использованием недивергентной формы записи оператора конвективного переноса (хотя возможно также выделить два других основных класса задач, которые связаны с использованием дивергентной, или же так называемой симметричной формы записи операторов конвективного переноса).

Настоящая работа примыкает по тематике к [2]-[4] (см. также цитируемую там литературу) и существенно обобщает результаты работы [5]. В работе изучается основной спектр проблем аппроксимации задач оптимального управления, описываемых уравнениями конвекции-диффузии (рассматриваются вопросы построения дискретных аналогов оптимизационных задач, вопросы сходимости аппроксимаций по состоянию, функционалу, управлению, регуляризации аппроксимаций).

2. Постановка задач и их корректность

Пусть $\Omega = \{r = (r_1, r_2) \in \mathbb{R}^2 : 0 < r_\alpha < l_\alpha, \alpha = 1,2\}$ – прямоугольник в $\mathbb{R}^2$ с границей $\partial\Omega = \Gamma$. Пусть область Ω разделена прямой $r_1 = \xi$, где $0 < \xi < l_1$ («внутренней контактной границей» $\overline{S} = \{r_1 = \xi, 0 \le r_2 \le l_2\}$, $0 < \xi < l_1$) на подобласти $\Omega_1 \equiv \Omega^- = \{0 < r_1 < \xi, 0 < r_2 < l_2\}$ и $\Omega_2 \equiv \Omega^+ = \{\xi < r_1 < l_1, 0 < r_2 < l_2\}$ (на левую и правую подобласти Ω_1 и Ω_2 соответственно) с границами $\partial\Omega_1 \equiv \partial\Omega^-$ и $\partial\Omega_2 \equiv \partial\Omega^+$. Так что область Ω есть объединение областей Ω_1 и Ω_2 и внутренних точек «контактной» границы $\overline{S}$ подобластей Ω_1 и Ω_2, а $\partial\Omega$ – внешняя граница области Ω. Далее, через $\overline{\Gamma}_k$ будем обозначать границы областей Ω_k без S, $k = 1,2$. Так что $\partial\Omega_k = \overline{\Gamma}_k \cup S$, где части Γ_k, $k = 1,2$, – открытые непустые подмножества в $\partial\Omega_k$, $k = 1,2$; $\overline{\Gamma}_1 \cup \overline{\Gamma}_2 = \partial\Omega = \Gamma$. Через n_α, $\alpha = 1,2$, будем обозначать внешнюю нормаль к границе $\partial\Omega_\alpha$ области Ω_α, $\alpha = 1,2$. Пусть, далее, $n = n(x)$ – единичная нормаль к S в какой-либо ее точке $x \in S$, ориентированная, например, таким образом, что нормаль n является внешней нормалью к S по отношению к области Ω_1, то есть нормаль n направлена внутрь области Ω_2. Ниже, при постановке краевых задач для состояний процессов управления, S – это прямая, вдоль которой будут разрывны коэффициенты и решения краевых задач, которые в областях Ω_1 и Ω_2 обладают некоторой гладкостью. Пусть условия управляемого физического процесса позволяют моделировать его в области $\Omega = \Omega_1 \cup \Omega_2 \cup S$, состоящей из двух частей (подобластей) Ω_1 и Ω_2, разбитой на части внутренней границей S, следующей задачей Дирихле для полулинейного уравнения эллиптического типа с разрывными коэффициентами и решениями:

Требуется найти функцию $u(r)$, определенную на $\overline{\Omega}$ вида $u(r) = u_1(r)$, $r \in \overline{\Omega}_1 \equiv \Omega^-$, $u(r) = u_2(r)$, $r \in \overline{\Omega}_2 = \Omega^+$, где компоненты $u_p(r)$, $p = 1,2$, удовлетворяют условиям:

1) функции $u_p(r)$, $p = 1,2$, определенные на $\overline{\Omega}_p = \Omega_p \cup \partial\Omega_p$, $p = 1,2$, удовлетворяют в Ω_p, $p = 1,2$, уравнениям

$$L_p\, u_p = -\sum_{\alpha=1}^{2} \frac{\partial}{\partial r_\alpha}\left(k_p(r)\frac{\partial u_p}{\partial r_\alpha}\right) + \sum_{\alpha=1}^{2} \vartheta_p^{(\alpha)}(r)\frac{\partial u_p}{\partial r_\alpha} + d_p(r) q_p(u_p) = f_p(r), \quad \text{в } \Omega_p,\ p = 1,2, \tag{2.1}$$

а на границах $\partial\Omega_1 \setminus S = \overline{\Gamma}_1$, $\partial\Omega_2 \setminus S = \overline{\Gamma}_2$ условиям

$$u_1(r) = 0, \quad r \in \overline{\Gamma}_1, \quad u_2(r) = 0, \quad r \in \overline{\Gamma}_2; \tag{2.2}$$

2) искомые функции $u_p(r)$, $p=1,2$, удовлетворяют еще дополнительным условиям на S – границе разрыва коэффициентов и решения, позволяющим «сшить» решения $u_1(r)$ и $u_2(r)$ вдоль контактной границы S областей Ω_1 и Ω_2 следующего вида:

$$G(x) = k_1(r)\frac{\partial u_1}{\partial r_1} = k_2(r)\frac{\partial u_2}{\partial r_1} = \theta(r_2)\left(u_2(r) - u_1(r)\right), \quad r \in S. \tag{2.3}$$

Если ввести функции вида

$$u(r) = \begin{cases} u_1(r), & r \in \Omega_1; \\ u_2(r), & r \in \Omega_2, \end{cases} \qquad q(\xi) = \begin{cases} q_1(\xi_1), & \xi_1 \in \mathbb{R}; \\ q_2(\xi_2), & \xi_2 \in \mathbb{R}, \end{cases} \tag{2.4}$$

$$k(r), d(r), f(r), \vartheta^{(\alpha)}(r) = \begin{cases} k_1(r), q_1(r), f_1(x), \vartheta_1^{(\alpha)}(r), & r \in \Omega_1; \\ k_2(r), q_2(r), f_2(r), \vartheta_2^{(\alpha)}(r), & r \in \Omega_2, \end{cases} \quad \alpha = 1,2. \tag{2.5}$$

то задачу (2.1)-(2.3) можно переписать в более компактном виде:

Требуется найти функцию $u(r)$, определенную на $\overline{\Omega}$, удовлетворяющую в каждой из областей Ω_1 и Ω_2 уравнению

$$Lu(r) = -\sum_{\alpha=1}^{2}\frac{\partial}{\partial r_\alpha}\left(k(r)\frac{\partial u}{\partial r_\alpha}\right) + \sum_{\alpha=1}^{2}\vartheta^{(\alpha)}\frac{\partial u}{\partial r_\alpha} + d(r)q(u) = f(r), \quad r = (r_1, r_2) \in \Omega_1 \cup \Omega_2, \tag{2.6}$$

и условиям

$$\begin{gathered} u(r) = 0, \quad r \in \partial\Omega = \overline{\Gamma}_1 \cup \overline{\Gamma}_2, \\ \left[k(r)\frac{\partial u}{\partial r_1}\right] = 0, \quad G(r) = \left(k_1(r)\frac{\partial u_1}{\partial r_1}\right) = \theta(r_2)[u], \quad x \in S. \end{gathered} \tag{2.7}$$

Здесь $[u] = u_2(r) - u_1(r) = u^+(r) - u^-(r)$ – скачок функции $u(r)$ на S, $d(r)$, $f(r)$ – известные функции, определяемые по разному в Ω_1 и Ω_2, претерпевающие разрыв первого рода на S, $\vartheta_2^{(p)}(r)$, $p=1,2$ – заданные функции, определенные в Ω_2, $q_\alpha(\xi_\alpha)$, $\alpha=1,2$, – заданные функции, определенные для $\xi_\alpha \in \mathbb{R}$, $\alpha = 1,2$, $\theta(r_2)$ – заданная функция на S,

$$g(r) = (g_1(r), g_2(r), g_3(r), g_4(r)) = \left(k_1(r), k_2(r), \vartheta_1^{(1)}(r), \vartheta_1^{(2)}(r)\right) \tag{2.8}$$

– управление. Относительно заданных функций будем предполагать: $d(r) \in L_\infty(\Omega_1) \times L_\infty(\Omega_2)$, $f(r) \in L_2(\Omega_1) \times L_2(\Omega_2)$, $\theta(r_2) \in L_\infty(S)$, $\vartheta_2^{(p)}(r) \in L_2(\Omega_2)$, $p=1,2$, $0 \le d_0 \le$ $\le d(r) \le \overline{d}_0$, $r \in \Omega_1 \cup \Omega_2$, $0 < \theta_0 \le \theta(r_2) \le \overline{\theta}_0$, $r_2 \in S$, $\zeta_{p+2} \le \vartheta_2^{(p)}(r) \le \overline{\zeta}_{p+2}$, $p = 1,2$, $r \in \Omega_2$, d_0, $\overline{d}_0$, θ_0, $\overline{\theta}_0$, ζ_{p+2}, $\overline{\zeta}_{p+2}$, – константы, функции $q_\alpha(\xi_\alpha)$, $\alpha=1,2$, определены на $\mathbb{R}$ со значениями в $\mathbb{R}$, причем $q_\alpha(0)=0$, $0 \le q_0 \le (q_\alpha(\xi_1) - q_\alpha(\xi_2))/(\xi_1 - \xi_2) \le L_q < \infty$ для всех $\xi_1, \xi_2 \in \mathbb{R}$, $\xi_1 \ne \xi_2$.

Введем множество допустимых управлений

$$U = \prod_{k=1}^{4} U_k \subset W_\infty^1(\Omega_1) \times W_\infty^1(\Omega_2) \times L_\infty(\Omega_1) \times L_\infty(\Omega_1) = B, \tag{2.9}$$

состоящее из $g(r)$, определенных в (2.8) таких, что

$$\begin{gathered} g_p(r) \in U_p = \Big\{ g_p(r) = k_p(r) \in W_\infty^1(\Omega_p) = B_p : 0 < \nu_p \le g_p(r) \le \overline{\nu}_p, \\ \left|\frac{\partial g_p(r)}{\partial r_1}\right| \le R_p^{(1)}, \left|\frac{\partial g_p(r)}{\partial r_2}\right| \le R_p^{(2)} \text{ п.в. на } \Omega_p \Big\}, \quad p = 1,2, \\ g_3(r) \in U_3 = \left\{ g_3(r) = \vartheta_1^{(1)}(r) \in L_\infty(\Omega_1) = B_3 : \zeta_1 \le g_3(r) \le \overline{\zeta}_1, \text{ п.в. на } \Omega_1 \right\}, \\ g_4(r) \in U_4 = \left\{ g_4(r) = \vartheta_1^{(2)}(r) \in L_\infty(\Omega_1) = B_4 : \zeta_2 \le g_4(r) \le \overline{\zeta}_2, \text{ п.в. на } \Omega_1 \right\}, \end{gathered} \tag{2.10}$$

где $B_p = W^1_\infty(\Omega_p)$, $p = 1, 2$, – пространства управлений $g_p(r) = k_p(r)$, $p = 1, 2$, заданных на Ω_1 и Ω_2, соответственно, а $B_p = L_\infty(\Omega_1)$, $p = 3, 4$, – пространства управлений $g_{p+2}(r) = \vartheta_1^{(p)}(r)$, $p = 1, 2$, заданных на Ω_1 и Ω_2 соответственно, ν_p, $\overline{\nu}_p$, $R_1^{(p)}$, $R_2^{(p)}$, ζ_p, $\overline{\zeta}_p$, $p = 1, 2$, – заданные числа. Предполагается выполнение следующих условий: $-m_1 \le \zeta_1 \le \overline{\zeta}_1 \le m_1$, $-p_1 \le \zeta_2 \le \overline{\zeta}_2 \le p_1$, $-m_2 \le \zeta_3 \le \overline{\zeta}_3 \le m_2$, $-p_2 \le \zeta_4 \le \overline{\zeta}_4 \le p_2$, $m_\alpha, p_\alpha = const > 0$, $\alpha = 1, 2$,

$$\delta_\alpha = \max_{\substack{\epsilon_1, \epsilon_2 > 0 \\ \epsilon_1 + \epsilon_2 \le \nu_\alpha}} \left\{ \frac{\nu_\alpha - (\epsilon_1 + \epsilon_2)}{C^2_{\Omega_\alpha}} + \lambda - \frac{m_\alpha^2}{4\epsilon_1} - \frac{p_\alpha^2}{4\epsilon_2} \right\} > 0, \ \alpha = 1, 2,$$
$$C^2_{\Omega_1} = \left(\frac{8}{\xi_1^2} + \frac{8}{l_2^2} \right)^{-1}, \ C^2_{\Omega_2} = \left(\frac{8}{(l_1 - \xi_1)^2} + \frac{8}{l_2^2} \right)^{-1}; \tag{2.11}$$

здесь λ любая из следующих констант: 1) $\lambda = q_0\, d_0, \quad d_0 \ge 0$; 2) $\lambda = d_0$ - любая константа, когда $q(u) = u$; 3) $\lambda = -L_q \zeta_0$, где $\zeta_0 = \max\left\{|d_0|, |\overline{d}_0|\right\}$.

Зададим функционал цели $J : U \to \mathbb{R}^1$ в виде

$$g \to J(g) = \int\limits_{\Omega_1} |u(r_1, r_2; g) - u_0^{(1)}(r)|^2 d\Omega_1 = I(u(r; g)), \tag{2.12}$$

где $u_0^{(1)}(r) \in W_2^1(\Omega_1)$ – заданная функция.

Задача оптимального управления состоит в том, чтобы найти такое управление $g_* \in U$, которое минимизирует на множестве $U \subset B$ функционал цели $g \to J(g)$, точнее, на решениях $u(r) = u(r; g)$ задачи (2.1)-(2.3), отвечающих всем допустимым управлениям $g(r) = \left(k_1(r), k_2(r), \vartheta_1^{(1)}(r), \vartheta_1^{(2)}(r)\right) \in U$, требуется минимизировать функционал цели (2.12).

Введем в рассмотрение пространство $V(\Omega^{(1,2)})$, $\Omega^{(1,2)} = \Omega_1 \cup \Omega_2$ пар функций $u(r) = (u_1(r), u_2(r))$:

$$V \equiv V(\Omega^{(1,2)}) = \left\{ u(r) = (u_1(r), u_2(r)) \in W_2^1(\Omega_1) \times W_2^1(\Omega_2) \right\}, \tag{2.13}$$

где $W_2^1(\Omega_k)$, $k = 1, 2$ – Соболевские пространства функций, заданных в подобластях Ω_k, $k = 1, 2$, с границами $\partial\Omega_k$, $k = 1, 2$ соответственно и нормами [6]

$$\|u_k\|^2_{W_2^1(\Omega_k)} = \int\limits_{\Omega_k} \left[\sum_{\alpha=1}^{2} \left(\frac{\partial u_k}{\partial r_\alpha} \right)^2 + u_k^2 \right] d\Omega_k, \quad k = 1, 2. \tag{2.14}$$

Снабженное скалярным произведением и нормой

$$(u, v)_V = \sum_{k=1}^{2} (u_k, v_k)_{W_2^1(\Omega_k)}, \qquad \|u\|_V^2 = \sum_{k=1}^{2} \|u_k\|^2_{W_2^1(\Omega_k)}, \tag{2.15}$$

$V = V(\Omega^{(1,2)})$ является гильбертовым пространством.

Можно показать, что в гильбертовом пространстве $V(\Omega^{(1,2)})$ можно ввести эквивалентную норму

$$\|u\|_*^2 = \sum_{k=1}^{2} \int\limits_{\Omega_k} \sum_{\alpha=1}^{2} \left(\frac{\partial u_k}{\partial r_\alpha} \right)^2 d\Omega_k + \sum_{k=1}^{2} \int\limits_{\Gamma_k} u_k^2\, d\Gamma_k + \int\limits_S [u]^2\, dS, \tag{2.16}$$

где $[u] = u_2(r) - u_1(r) = u^+(r) - u^-(r)$ – скачок функции $u(r) \in V(\Omega^{(1,2)})$ на S. Здесь $u_2(r) = u^+(r)$, $r \in S$ и $u_1(r) = u^-(r)$, $r \in S$ – следы функции $u(r)$ на S со стороны $\Omega_2 = \Omega^+$ и $\Omega_1 = \Omega^-$ соответственно. Понятно, что из условия $u(r) \in V(\Omega^{(1,2)})$ следует, что отображения пространств $W_2^1(\Omega_k)$, $k = 1, 2$, в пространства $L_2(\partial\Omega_k)$, $k = 1, 2$, ограничены, так как Ω_1 и Ω_2 – области с липшицевыми границами $\partial\Omega_1$ и $\partial\Omega_2$. В частности, из условия $u(r) \in V(\Omega^{(1,2)})$ следует, что $[u(r)] \in L_2(S)$, так как в данном случае теорема о следах [6]-[10] справедлива для каждой из сторон S^+, S^- границы контакта S (оператор сужения из $W_2^1(\Omega^\pm)$ в $L_2(S)$ непрерывен). Заметим также, что применение теоремы о следах к Ω_1 и Ω_2 позволяет определить для любой функции $u(r) \in V(\Omega^{(1,2)})$ два следа с помощью операторов сужения на $S^\pm$. С другой стороны, если элемент $u(r) \in V(\Omega^{(1,2)})$, то его следы на S с разных сторон (со стороны Ω_1 и со стороны Ω_2) в общем случае различны. Сужения функции $u(r)$ на области Ω_k, $k = 1, 2$: $u|_{\Omega_k}$, $k = 1, 2$, принадлежат пространствам $W_2^1(\Omega_k)$, $k = 1, 2$, соответственно, но пространству $W_2^1(\Omega)$ сама функция $u(r)$ не принадлежит, поскольку на множестве S (при переходе из Ω_1 в Ω_2) она имеет разрыв ($\delta(r) = u_2(r) - u_1(r) = u^+(r) - u^-(r)$, $r \in S$). Заметим также, что необходимым и достаточным условием для принадлежности функции $v(r) \in W_2^1(\Omega) = W_2^1(\Omega_1 \cup \Omega_2 \cup S)$, является условие склейки: $v(r) \in W_2^1(\Omega_k)$, $k = 1, 2$; $v_1(r)|_S = v_2(r)|_S$ (см. [10], [11]). Далее, так как Ω_k – области с границами Липшица $\partial\Omega_k$, $k = 1, 2$, а Γ_1 и Γ_2 – соответственно их (открытые) части (куски границ $\partial\Omega_1$ и $\partial\Omega_2$) с положительными мерами Лебега, $mes\Gamma_k > 0$, $k = 1, 2$, то [12] существуют некоторые постоянные C_1 и C_2, зависящие только от данных областей Ω_k, $k = 1, 2$ и от кусков Γ_1 и Γ_2 соответственно, такие, что для каждой функции $u_k(r) \in W_2^1(\Omega_k)$, $k = 1, 2$ имеют место соотношения:

$$\|u_k(r)\|^2_{W_2^1(\Omega_k)} \le C_k^2 \Bigg[\int\limits_{\Omega_k} \sum_{\alpha=1}^{2} \left(\frac{\partial u_k}{\partial x_\alpha} \right)^2 d\Omega_k + \int\limits_{\Gamma_k} u_k^2 d\Gamma_k \Bigg], \ k = 1, 2. \tag{2.17}$$

Так как для рассматриваемых областей Ω_k, $k = 1, 2$ отображения пространств $W_2^1(\Omega_k)$, $k = 1, 2$, в пространства $L_2(\partial\Omega_k)$, $k = 1, 2$, ограничены, то существуют такие постоянные C_3 и C_4 соответственно, не зависящие от функции $u_k(r)$, что для любых функций $u_k(r) \in W_2^1(\Omega_k)$ справедливы оценки [13],[14]:

$$\|u_k(r)\|^2_{L_2(\partial\Omega_k)} \le C_{k+2}^2 \|u_k(r)\|^2_{W_2^1(\Omega_k)}, \ k = 1, 2, \tag{2.18}$$

вытекающие из теорем вложения пространств $W_2^1(\Omega_k)$ в $L_2(\partial\Omega_k)$.

Пусть $\overset{\circ}{\Gamma}_k$ – часть $\partial\Omega_k$. Через $W_2^1\left(\Omega_k; \overset{\circ}{\Gamma}_k\right)$ обозначим замкнутое подпространство пространства $W_2^1(\Omega_k)$, плотным множеством в котором является множество всех функций из $C^1(\overline{\Omega}_k)$, равных нулю вблизи $\overset{\circ}{\Gamma}_k \subset \partial\Omega_k$, $k = 1, 2$, – какого-либо участка $\overset{\circ}{\Gamma}_k$ границы $\partial\Omega_k$, $k = 1, 2$. Под участками $\overset{\circ}{\Gamma}_k$ границы $\partial\Omega_k$ понимаются куски границы $\partial\Omega_k$, естественно, мы не рассматриваем случай, когда какой-либо из участков $\overset{\circ}{\Gamma}_k$ вырождается в точку, $W_2^1(\Omega_k; \overset{\circ}{\Gamma}_k)$ совпадает с $W_2^1(\Omega_k)$ при $\overset{\circ}{\Gamma}_k = \emptyset$; $W_2^1(\Omega_k; \overset{\circ}{\Gamma}_k) = \overset{0}{W}{}_2^1(\Omega_k)$ при $\overset{\circ}{\Gamma}_k = \partial\Omega_k$. Заметим, что для элементов $u_k(r) \in W_2^1(\Omega_k; \overset{\circ}{\Gamma}_k)$ справедливо неравенство [7]

$$\int\limits_{\Omega_k} u_k^2(r)\, d\Omega_k \le C_{k+4}(\Omega_k, \overset{\circ}{\Gamma}_k) \int\limits_{\Omega_k} \sum_{\alpha=1}^{2} \left(\frac{\partial u_k}{\partial r_\alpha} \right)^2 d\Omega_k, \quad k = 1, 2, \tag{2.19}$$

с постоянной $C_{k+4}(\Omega_k, \overset{\circ}{\Gamma}_k)$, зависящей только от Ω_k и $\overset{\circ}{\Gamma}_k$, при этом «площадь» куска $\overset{\circ}{\Gamma}_k$ поверхности $\partial\Omega_k$ должна быть положительной: $mes\ \overset{\circ}{\Gamma}_k > 0$.

Введем в рассмотрение нормированное пространство $\overset{\circ}{V}_{\Gamma_1,\Gamma_2}(\Omega^{(1,2)})$ пар функций $u(r)=(u_1(r),u_2(r))$:

$$\overset{\circ}{V}_{\Gamma_1,\Gamma_2}(\Omega^{(1,2)})=\left\{u(r)=(u_1(r),u_2(r))\in W_2^1(\Omega_1;\Gamma_1)\times W_2^1(\Omega_2;\Gamma_2)\right\}, \tag{2.20}$$

$$\|u\|^2_{\overset{\circ}{V}_{\Gamma_1,\Gamma_2}(\Omega^{(1,2)})}=\sum_{k=1}^{2}\int\limits_{\Omega_k}\sum_{\alpha=1}^{2}\left(\frac{\partial u_k}{\partial r_\alpha}\right)^2 d\Omega_k+\int\limits_S [u]^2 dS. \tag{2.21}$$

Под решением прямой задачи (2.1)-(2.3) при фиксированном управлении $g(r)=$ $=k(r)\in U$ понимается функция $u(r)\equiv u(r;g)\in\overset{\circ}{V}_{\Gamma_1,\Gamma_2}(\Omega^{(1,2)})$, удовлетворяющая для всех $v\in\overset{\circ}{V}_{\Gamma_1,\Gamma_2}(\Omega^{(1,2)})$ тождеству

$$\begin{gathered}Q(u,v)=\int\limits_{\Omega_1\cup\Omega_2}\left[\sum_{\alpha=1}^{2}\Big(k(r)\frac{\partial u}{\partial r_\alpha}\frac{\partial v}{\partial r_\alpha}+\sum_{\alpha=1}^{2}\vartheta^{(\alpha)}\frac{\partial u}{\partial r_\alpha}v+d(r)q(u)v\right]d\Omega_0+\\+\int\limits_S\theta(x)[u][v]\,dS=\int\limits_{\Omega_1\cup\Omega_2}f(r)v\,d\Omega_0=l(v).\end{gathered} \tag{2.22}$$

Разрешимость задачи (2.1)-(2.3) в смысле ее определения (2.22) гарантирует

Т е о р е м а 2.1. *При любом $g(r)\in U$ существует единственное обобщенное решение $u(r)=u(r;g)\in\overset{\circ}{V}_{\Gamma_1,\Gamma_2}(\Omega^{(1,2)})$ задачи* (2.1)-(2.3), *определяемое из интегрального тождества* (2.22), *причем*

$$\|u(r;g)\|_{\overset{\circ}{V}_{\Gamma_1,\Gamma_2}}\le C_7\sum_{k=1}^{2}\|f_k(r)\|_{L_2(\Omega_k)}=\overline{C}_7,, \tag{2.23}$$

где $C_7=const>0$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. 2.1. опирается на теорию монотонных операторов [8], [9], [12], [15], при этом существенно используются, введенные выше Гильбертовы пространства $V(\Omega^{(1,2)})$, $\overset{\circ}{V}_{\Gamma_1,\Gamma_2}(\Omega^{(1,2)})$ и введенные в них эквивалентные нормы, а также неравенства (2.16)-(2.18).

Д о к а з а т е л ь с т в о з а к о н ч е н о.

Рассмотрим теперь задачу оптимального управления (2.12), (2.1)-(2.10). Справедлива следующая теорема о разрешимости экстремальной задачи (2.12), (2.1)-(2.10).

Т е о р е м а 2.2. *Существует, по крайней мере, одно оптимальное управление $g_*\in U$ задачи* (2.12), (2.1)-(2.10), *т.е. $J_*=\inf\{J(g):g\in U\}>-\infty$, $U_*=\{g_*\in U: J(g_*)=J_*\}\ne\emptyset$. Множество точек минимума U_* функционала цели $J(g)$ в экстремальной задаче* (2.12), (2.1)-(2.10) *слабо компактно в $H=W_2^1(\Omega_1)\times W_2^1(\Omega_2)\times L_2(\Omega_1)\times L_2(\Omega_1)$. Любая минимизирующая последовательность $\left\{g^{(n)}\right\}_{n=1}^{\infty}\subset U$ функционала $J(g)$ слабо в H сходится к множеству U_*.*

3. Разностная аппроксимация задач управления. Корректность аппроксимаций

В связи с численным решением задач оптимального управления существенный интерес представляет вопрос об аппроксимации бесконечномерных задач оптимизации (2.12), (2.1)-(2.10) последовательностью конечномерных задач оптимального управления. Ниже построим и изучим аппроксимации задач на основе метода сеток (см. [16]-[19]) и исследуем сходимость этих аппроксимаций при неограниченном измельчении шага h сетки дискретизации. Для аппроксимации задач оптимизации (2.12), (2.1)-(2.10) нам понадобятся некоторые сетки на $[0, l_\alpha]$, $\alpha = 1, 2$ и в $\overline{\Omega}$. Введем в рассмотрение одномерные неравномерные сетки по x_1 и x_2: $\hat{\omega}_\alpha = \{x_\alpha^{(i_\alpha)} \in [0, l_\alpha] : i_\alpha = \overline{0, N_\alpha}, x_\alpha^{(0)} = 0, x_\alpha^{(N_\alpha)} = l_\alpha, h_{\alpha i_\alpha} = x_\alpha^{(i_\alpha)} - x_\alpha^{(i_\alpha - 1)}\}$, $\alpha = 1, 2$, а также введем неравномерную сетку по x_1 и x_2 в области $\overline{\Omega} = \overline{\Omega}_1 \cup \overline{\Omega}_2$: $\hat{\omega} = \hat{\omega}_1 \times \hat{\omega}_2$. Очевидно, всегда можно построить сетку $\hat{\omega}_1$ на $[0, l_1]$ так, чтобы точка $x_1 = \xi$ была ее узлом. При решении практических задач целесообразно выбирать в областях $\overline{\Omega}_1$ и $\overline{\Omega}_2$ равномерные шаги $h_1^{(1)}$ и $h_1^{(2)}$ соответственно, и, исходя из положения точки $x_1 = \xi$, число узлов находить из предположения $h_1^{(1)} \approx h_1^{(2)}$. Обоснования разностных схем на неравномерных сетках для данной экстремальной задачи (2.12), (2.1)-(2.10) не носят принципиального характера, и в дальнейшем для наглядности исследования во всей области $\overline{\Omega}$ сетку по x_1 и x_2 будем считать равномерной, полагая $x_1^{(i_1)} - x_1^{(i_1-1)} = h_1$, $i_1 = \overline{1, N_1}$ и $x_2^{(i_2)} - x_2^{(i_2-1)} = h_2$, $i_2 = \overline{1, N_2}$. Значение x_1 в точке $x_1 = \xi$ обозначим через x_ξ, а соответствующий номер узла обозначим через $N_{1\xi}$, $1 < N_{1\xi} < N_1 - 1$.

Введем сетки узлов: $\bar{\omega}_1^{(1)} = \{x_1^{(i_1)} = i_1 h_1 \in [0, \xi] : i_1 = \overline{0, N_{1\xi}}, N_{1\xi} h_1 = \xi\}$, $\bar{\omega}_1^{(2)} = \{x_1^{(i_1)} = i_1 h_1 \in [\xi, l_1] : i_1 = \overline{N_{1\xi, N_1}}, N_1 h_1 = l_1\}$, $\omega_1^{(1)} = \bar{\omega}_1^{(1)} \backslash \{x_1 = 0, x_1 = \xi\}$, $\omega_1^{(2)} = \bar{\omega}_1^{(2)} \backslash \{x_1 = \xi, x_1 = l_1\}$; $\bar{\omega}_2 = \{x_2^{(i_2)} = i_2 h_2 \in [0, l_2] : i_2 = \overline{0, N_2}, N_2 h_2 = l_2\}$, $\omega_2 = \bar{\omega}_2 \setminus \{x_2 = 0, x_2 = l_2\}$; $\bar{\omega}_1 = \bar{\omega}_1^{(1)} \cup \bar{\omega}_1^{(2)}$; $\omega_1 = \omega_1^{(1)} \cup \omega_1^{(2)}$; $\bar{\omega}^{(1)} = \bar{\omega}_1^{(1)} \times \bar{\omega}_2$; $\bar{\omega}^{(2)} = \bar{\omega}_1^{(2)} \times \bar{\omega}_2$; $\omega^{(1)} = \omega_1^{(1)} \times \omega_2$; $\omega^{(2)} = \omega_1^{(2)} \times \omega_2$; $\bar{\omega} \equiv \bar{\omega}^{(1,2)} = \bar{\omega}^{(1)} \cup \bar{\omega}^{(2)} = (\bar{\omega}_1^{(1)} \cup \bar{\omega}_1^{(2)}) \times \bar{\omega}_2 = \{x_1^{(i_1)} = i_1 h_1, i_1 = \overline{0, N_1}, N_{1/xi} h_1 = \xi, (N_1 - N_{1\xi}) h_1 = l_1 - \xi, 1 < N_{1\xi} < N_1 - 1\} \times \bar{\omega}_2$, $\omega \equiv \omega^{(1,2)} = \omega^{(1)} \cup \omega^{(2)}$; $\omega_1^{(1)+} = \bar{\omega}_1^{(1)} \cap (0, \xi]$, $\omega_1^{(1)-} = \bar{\omega}_1^{(1)} \cap [0, \xi)$, $\omega_1^{(2)-} = \bar{\omega}_1^{(2)} \cap [\xi, l_1)$, $\omega^{(1)+} = \omega_1^{(1)+} \times \bar{\omega}_2$; $\gamma_\xi = \{x_1 = \xi, x_2 = h_2, 2h_2, ..., (N_2 - 1) h_2\} = \{x_1 = \xi, x_2^{(i_2)} = i_2 h_2, i_2 = \overline{1, N_2 - 1}\}$; $\gamma^{(k)} = \partial\omega^{(k)} \backslash \gamma_S$; $\omega_1^{(1)+} \times \omega_2 = \omega^{(1)} \cup \gamma_S = \bar{\omega}^{(1)} \backslash \gamma^{(1)}$; $\partial\omega^{(k)} = \bar{\omega}^{(k)} \backslash \omega^{(k)}$ – множество граничных узлов сетки $\bar{\omega}^{(k)}$, $k = 1, 2$. При исследовании сходимости разностных аппроксимаций нам потребуются скалярные произведения, нормы и полунормы сеточных функций, заданных на различных сетках. Множество сеточных функций $y_k(x)$, $x \in \bar{\omega}^{(k)} \subset \bar{\Omega}_k$, $k = 1, 2$, снабженное скалярным произведением и нормой

$$(y_k, v_k)_{L_2(\bar{\omega}^{(k)})} = \sum_{\bar{\omega}^{(k)}} y_k(x) v_k(x) \hbar_1 \hbar_2, \quad \|y_k\|_{L_2(\bar{\omega}^{(k)}))} = (y_k, y_k)^{1/2}_{L_2(\bar{\omega}^{(k)})}, \tag{3.1}$$

обозначим через $L_2(\bar{\omega}^{(k)})$, $k = 1, 2$. Здесь $\hbar_1 = \hbar_1(x)$ – средний шаг сеток $\bar{\omega}_1^{(1)}$ и $\bar{\omega}_1^{(2)}$, $\hbar_2 = \hbar_2(x)$ – средний шаг сетки $\bar{\omega}_2$ [11]. Через $W_2^1(\bar{\omega}^{(1)})$ и $W_2^1(\bar{\omega}^{(2)})$ обозначим пространства сеточных функций, заданных на сетках $\bar{\omega}^{(1)}$ и $\bar{\omega}^{(2)}$ со скалярными произведениями и нормами:

$$(y_k, v_k)_{W_2^1(\bar{\omega}^{(k)})} = \sum_{\omega_1^{(k)+} \times \bar{\omega}_2} y_{k\bar{x}_1} v_{k\bar{x}_1} h_1 \hbar_2 + \sum_{\bar{\omega}_1^{(k)} \times \omega_2^+} y_{k\bar{x}_2} v_{k\bar{x}_2} \hbar_1 h_2 + (y_k, v_k)_{L_2(\bar{\omega}^{(k)})},$$

$$\|y\|^2_{W_2^1(\bar{\omega}^{(k)})} = \|\nabla y_k\|^2 + \|y_k\|^2_{L_2(\bar{\omega}^{(k)})}, \|\nabla y_k\|^2 = \sum_{\omega_1^{(k)+} \times \bar{\omega}_2} y_{k\bar{x}_1}^2 h_1 \hbar_2 + \sum_{\bar{\omega}_1^{(k)+} \times \bar{\omega}_2^+} y_{k\bar{x}_2}^2 \hbar_1 h_2, k = 1, 2. \tag{3.2}$$

Введем в рассмотрение пространство $V_h \equiv V_h(\bar{\omega}^{(1,2)})$ пар сеточных функций $y(x) = (y_1(x), y_2(x))$, определяемое соотношением $V_h \equiv V_h(\bar{\omega}^{(1,2)}) = \{y(x) = (y_1(x), y_2(x)) \in W_2^1(\bar{\omega}^{(1)}) \times W_2^1(\bar{\omega}^{(2)})\}$. Снабженное скалярным произведением и нормой

$$(y_k, v_k)_{V_h(\bar{\omega}^{(1,2)})} = \sum_{k=1}^{2} (y_k, v_k)_{W_2^1(\bar{\omega}^{(k)})}, \quad \|y_k\|_{V_h(\bar{\omega}^{(1,2)})} = \sum_{k=1}^{2} \|y_k\|^2_{W_2^1(\bar{\omega}^{(k)})}, \tag{3.3}$$

$V_h(\bar{\omega}^{(1,2)})$ является гильбертовым пространством.

Пусть $\gamma^{(k)} = \partial\omega^{(k)} \setminus \gamma_S$ – подмножество граничных узлов $\partial\omega^{(k)}$ сетки $\bar{\omega}^{(k)} \subset \bar{\Omega}_k$, $k = 1, 2$. Через $L_2(\bar{\omega}^{(k)}, \gamma^{(k)})$ обозначим подпространство пространства сеточных функций $L_2(\bar{\omega}^{(k)})$, обращающихся в нуль на $\gamma^{(k)}$, $k = 1, 2$, с нормами

$$\|y_k\|^2_{L_2(\bar{\omega}^{(k)};\gamma^{(k)})} = \sum_{x\in\omega^{(k)}} y_k^2(x)h_1h_2 + \frac{1}{2}\sum_{x\in\gamma_S} y_k^2(x)h_1h_2, k = 1, 2. \tag{3.4}$$

индуцированными скалярными произведениями

$$(y_k, v_k)_{L_2(\bar{\omega}^{(k)};\gamma^{(k)})} = \sum_{x\in\omega^{(k)}} y_k(x)v_k(x)h_1h_2 + \frac{1}{2}\sum_{x\in\gamma_S} y_k(x)v_k(x)h_1h_2, \quad k = 1, 2. \tag{3.5}$$

Через $W_2^1(\bar{\omega}^{(k)}, \gamma^{(k)})$ обозначим подпространство пространства сеточных функций $W_2^1(\bar{\omega}^{(k)})$, обращающихся в нуль на $\gamma^{(k)}$, $k = 1, 2$.

Введем в рассмотрение пространство $\overset{\circ}{H}_{\gamma^{(1)},\gamma^{(2)}}(\bar{\omega}^{(1,2)})$ и $\overset{\circ}{V}_{\gamma^{(1)},\gamma^{(2)}}(\bar{\omega}^{(1,2)})$ пар $y(x) = (y_1(x), y_2(x))$:

$$\overset{\circ}{H}_{\gamma^{(1)},\gamma^{(2)}}(\bar{\omega}^{(1,2)}) = \{y = (y_1(x), y_2(x)) \in L_2(\bar{\omega}^{(1)}, \gamma^{(1)}) \times L_2(\bar{\omega}^{(2)}, \gamma^{(2)})\}, \tag{3.6}$$

$$\overset{\circ}{V}_{\gamma^{(1)},\gamma^{(2)}}(\bar{\omega}^{(1,2)}) = \{y = (y_1(x), y_2(x)) \in W_2^1(\bar{\omega}^{(1)}, \gamma^{(1)}) \times W_2^1(\bar{\omega}^{(2)}, \gamma^{(2)})\}, \tag{3.7}$$

$$\|y\|^2_{\overset{\circ}{H}_{\gamma^{(1)},\gamma^{(2)}}} = \sum_{k=1}^{2} \|y_k\|^2_{L_2(\bar{\omega}^{(k)};\gamma^{(k)})}, \quad \|y\|^2_{\overset{\circ}{V}_{\gamma^{(1)},\gamma^{(2)}}} = \sum_{k=1}^{2} \|\nabla y_k\|^2 + \|[y]\|^2_{L_2(\gamma_S)}. \tag{3.8}$$

Задачам оптимального управления (2.12), (2.1)-(2.10) поставим в соответствие следующие разностные аппроксимации: минимизировать сеточный функционал

$$J_h(\Phi_h) = \sum_{x\in\bar{\omega}^{(1)}} |y(x;\Phi_h) - u_{0h}^{(1)}|^2 \hbar_1\hbar_2 = \|y(x;\Phi_h) - u_{0h}^{(1)}\|^2_{L_2(\bar{\omega}^{(1)})}, \tag{3.9}$$

при условиях, что сеточная функция $y(x) \equiv y(x, \Phi_h) = (y_1(x, \Phi_h), y_2(x, \Phi_h)) \in \overset{\circ}{V}_{\gamma^{(1)},\gamma^{(2)}}(\bar{\omega}^{(1,2)})$, называемая решением разностной краевой задачи (разностной схемой) для задачи (2.1)-(2.3), удовлетворяет для любой сеточной функции $v(x) = (v_1(x), v_2(x)) \in \overset{\circ}{V}_{\gamma^{(1)},\gamma^{(2)}}(\bar{\omega}^{(1,2)})$ сумматорному тождеству

$$\begin{gathered}
Q_h(y,v) = \Bigg\{\sum_{\omega_1^{(1)+}}\sum_{\omega_2} b_{1h}^{(1)}(\Phi_{1h}(x_1,x_2))y_{1\bar{x}_1}v_{1\bar{x}_1}h_1h_2 + \Bigg(\sum_{\omega_1^{(1)}}\sum_{\omega_2^+} \tilde{b}_{1h}^{(1)}(\Phi_{1h}(x_1,x_2))y_{1\bar{x}_1}v_{1\bar{x}_1}h_1h_2+ \\
+\frac{1}{2}\sum_{\omega_2^+} \tilde{b}_{1h}^{(1)}(\Phi_{1h}(\xi,x_2))y_{1\bar{x}_2}(\xi,x_2)v_{1\bar{x}_2}(\xi,x_2)h_1h_2\Bigg)\Bigg\} + \Bigg\{\sum_{\omega_1^{(2)+}}\sum_{\omega_2} b_{2h}^{(2)}(\Phi_{2h}(x_1,x_2))y_{2\bar{x}_1}v_{2\bar{x}_1}h_1h_2+ \\
+\Bigg(\sum_{\omega_1^{(2)}}\sum_{\omega_2^+} \tilde{b}_{2h}^{(2)}(\Phi_{2h}(x_1,x_2))y_{2\bar{x}_2}v_{2\bar{x}_2}h_1h_2 + \frac{1}{2}\sum_{\omega_2^+} \tilde{b}_{2h}^{(2)}(\Phi_{2h}(\xi,x_2))y_{2\bar{x}_2}(\xi,x_2)v_{2\bar{x}_2}(\xi,x_2)h_1h_2\Bigg)\Bigg\}+ \\
+\sum_{\omega^{(1)}}\sum_{\alpha=1}^{2} \Phi_{\alpha+2,h}(x)y_{1\overset{\circ}{x}_\alpha}(x)v_1(x)h_1h_2 + \frac{1}{2}\sum_{\omega_2}\sum_{\alpha=1}^{2} \Phi_{\alpha+2,h}(\xi,x_2)y_{1\overset{\circ}{x}_\alpha}(\xi,x_2)v_1(\xi,x_2)h_1h_2+ \\
+\sum_{\omega^{(2)}}\sum_{\alpha=1}^{2} \vartheta_{2h}^{(\alpha)}(x)y_{2\overset{\circ}{x}_\alpha}(x)v_2(x)h_1h_2 + \frac{1}{2}\sum_{\omega_2}\sum_{\alpha=1}^{2} \vartheta_{2h}^{(\alpha)}(\xi,x_2)y_{2\overset{\circ}{x}_\alpha}(\xi,x_2)v_2(\xi,x_2)h_1h_2+
\end{gathered} \tag{3.10}$$

$$+\Bigg\{\Bigg(\sum_{\omega^{(1)}} d_{1h}(x)q_1(y_1(x))v_1(x)h_1h_2+\frac{1}{2}\sum_{\omega_2} d_{1h}(\xi,x_2)q_1(y_1(\xi,x_2))v_1(\xi,x_2)h_1h_2\Bigg)+$$
$$+\Bigg(\sum_{\omega^{(2)}} d_{2h}(x)q_2(y_2(x))v_2(x)h_1h_2+\frac{1}{2}\sum_{\omega_2} d_{2h}(\xi,x_2)q_2(y_2(\xi,x_2))v_2(\xi,x_2)h_1h_2\Bigg)\Bigg\}+$$
$$+\sum_{\omega_2}\theta_h(x_2)[y(\xi,x_2)]\,[v(\xi,x_2)]\,h_2=\Bigg(\sum_{\omega^{(1)}} f_{1h}(x)v_1(x)h_1h_2+\frac{1}{2}\sum_{\omega_2} f_{1h}(\xi,x_2)v_1(\xi,x_2)h_1h_2\Bigg)+$$
$$+\Bigg(\sum_{\omega^{(2)}} f_{2h}(x)v_2(x)h_1h_2+\frac{1}{2}\sum_{\omega_2} f_{2h}(\xi,x_2)v_1(\xi,x_2)h_1h_2\Bigg)=l_h(v),$$

а сеточные управления $\Phi_h(x)$ принадлежат множеству допустимых сеточных управлений

$$U_h=\prod_{k=1}^{4}U_{kh}\subset W^1_\infty(\bar\omega^{(1)})\times W^1_\infty(\bar\omega^{(2)})\times L_\infty(\Omega_1)\times L_\infty(\Omega_1)=B_h \tag{3.11}$$

и состоят из четверок

$$\Phi_h(x)=\begin{cases}\Phi_{1h}(x), & x\in\bar\omega^{(1)};\\ \Phi_{2h}(x), & x\in\bar\omega^{(2)};\\ \Phi_{3h}(x), & x\in\bar\omega^{(1)};\\ \Phi_{4h}(x), & x\in\bar\omega^{(1)},\end{cases} \tag{3.12}$$

$$\begin{gathered}\Phi_{ph}(x)\in U_{ph}=\big\{\Phi_{ph}(x)\in W^1_\infty(\bar\omega^{(p)})=B_{ph}:0<\nu_p\le\Phi_{ph}(x)\le\bar\nu_p, x\in\bar\omega^{(p)},\\ |\Phi_{phx_1}(x)|\le R^{(1)}_p, x\in\omega_1^{(p)-}\times\bar\omega_2, |\Phi_{phx_2}(x)|\le R^{(2)}_p, x\in\omega_1^{(p)}\times\bar\omega_2^-\big\},\quad p=1,2,\\ \Phi_{ph}(x)\in U_{ph}=\big\{\Phi_{ph}(x)\in L_\infty(\bar\omega^{(1)})=B_{ph}:\zeta_{p-2}\le\Phi_{ph}(x)\le\bar\zeta_{p-2}, x\in\bar\omega^{(1)},\big\},\quad p=3,4,\end{gathered} \tag{3.13}$$

где $B_{1h}=W^1_\infty(\bar\omega^{(1)})$, $B_{2h}=W^1_\infty(\bar\omega^{(2)})$ – пространства сеточных управлений $\Phi_{1h}(x)$, $\Phi_{2h}(x)$, заданных на сетках $\bar\omega^{(1)}$, $\bar\omega^{(2)}$ с нормами

$$\begin{aligned}\|\Phi_{1h}(x)\|_{W^1_\infty(\bar\omega^{(1)})}&=\max_{\bar\omega^{(1)}}|\Phi_{1h}(x)|+\max_{\omega_1^{(1)-}\times\bar\omega_2}|\Phi_{1hx_1}(x)|+\max_{\bar\omega_1^{(1)}\times\omega_2^-}|\Phi_{1hx_2}(x)|,\\ \|\Phi_{2h}(x)\|_{W^1_\infty(\bar\omega^{(2)})}&=\max_{\bar\omega^{(2)}}|\Phi_{2h}(x)|+\max_{\omega_1^{(2)-}\times\bar\omega_2}|\Phi_{2hx_1}(x)|+\max_{\bar\omega_1^{(2)}\times\omega_2^-}|\Phi_{2hx_2}(x)|,\end{aligned} \tag{3.14}$$

соответственно. Здесь

$$\begin{aligned}b^{(1)}_{1h}(\Phi_{1h}(x_1,x_2))&=\frac{\Phi^{(-1_2)}_{1h}(x)+\Phi^{(-1_1,-1_2)}_{1h}(x)+\Phi^{(+1_2)}_{1h}(x)+\Phi^{(-1_1,+1_2)}_{1h}(x)}{4},\\ \tilde b^{(1)}_{1h}(\Phi_{1h}(x_1,x_2))&=\frac{\Phi_{1h}(x)+\Phi^{(-1_2)}_{1h}(x)}{2},\\ b^{(2)}_{2h}(\Phi_{2h}(x_1,x_2))&=\frac{\Phi^{(-1_2)}_{2h}(x)+\Phi^{(-1_1,-1_2)}_{2h}(x)+\Phi^{(+1_2)}_{2h}(x)+\Phi^{(-1_1,+1_2)}_{2h}(x)}{4},\\ \tilde b^{(2)}_{2h}(\Phi_{2h}(x_1,x_2))&=\frac{\Phi_{2h}(x)+\Phi^{(-1_2)}_{2h}(x)}{2},\end{aligned} \tag{3.15}$$

$\Phi^{(-1_1,-1_2)}_{1h}(x)=\Phi_{1h}(x_1-h_1,x_2-h_2)$, $\Phi^{(-1_2)}_{1h}(x)=\Phi_{1h}(x_1,x_2-h_2)$, $\Phi^{(-1_1,+1_2)}_{1h}(x)=\Phi_{1h}(x_1-h_1,x_2+h_2)$, $\Phi^{(+1_2)}_{1h}(x)=\Phi_{1h}(x_1,x_2+h_2)$, $\Phi^{(-1_1,-1_2)}_{2h}(x)=\Phi_{2h}(x_1-h_1,x_2-h_2)$, $\Phi^{(-1_2)}_{2h}(x)=\Phi_{2h}(x_1,x_2-h_2)$, $\Phi^{(-1_1,+1_2)}_{2h}(x)=\Phi_{2h}(x_1-h_1,x_2+h_2)$, $\Phi^{(+1_2)}_{2h}(x)=\Phi_{1h}(x_1,x_2+h_2)$, а $\vartheta^{(\alpha)}_{2h}(x)$, $d_{\alpha h}(x)$, $\alpha=1,2$, $\theta_h(x_2)$, $f_{\alpha h}(x)$, $\alpha=1,2$, $u^{(1)}_{0h}(x)$ – сеточные аппроксимации функций $\vartheta^{(\alpha)}(r)$, $d_\alpha(r)$, $\alpha=1,2$, $\theta(r_2)$, $f_\alpha(r)$, $\alpha=1,2$, $u^{(1)}_0(r)$, определяемые через усреднения по Стеклову:

$$
\begin{gathered}
\vartheta_{2h}^{(\alpha)}(x)=\frac{1}{h_1h_2}\iint\limits_{e_2(x)}\vartheta_2^{(\alpha)}(r_1,r_2)\,dr_1dr_2,\quad x\in\omega^{(2)};\\
\vartheta_{2h}^{(\alpha)}(\xi,x_2)=\frac{2}{h_1h_2}\int\limits_{\xi}^{\xi+0.5h_1}\int\limits_{e_2(x_2)}\vartheta_2^{(\alpha)}(r_1,r_2)\,dr_1dr_2, x_2\in\omega_2,\\
d_{\alpha h}(x)=\frac{1}{h_1h_2}\iint\limits_{e^{(\alpha)}(x)}d_\alpha(r_1,r_2)\,dr_1dr_2,\quad x\in\omega^{(\alpha)},\alpha=1,2;\\
d_{1h}(\xi,x_2)=\frac{2}{h_1h_2}\int\limits_{\xi-0.5h_1}^{\xi}\int\limits_{e_2(x_2)}d_1(r_1,r_2)\,dr_1dr_2, x_2\in\omega_2,\\
d_{2h}(\xi,x_2)=\frac{2}{h_1h_2}\int\limits_{\xi}^{\xi+0.5h_1}\int\limits_{e_2(x_2)}d_2(r_1,r_2)\,dr_1dr_2, x_2\in\omega_2,\\
f_{1h}(x)=\frac{1}{h_1h_2}\iint\limits_{e^{(1)}(x)}f_1(r_1,r_2)\,dr_1dr_2, x_2\in\omega_1^{(1)},\\
f_{1h}(\xi,x_2)=\frac{2}{h_1h_2}\int\limits_{\xi-0.5h_1}^{\xi}\int\limits_{e_2(x_2)}f_1(r_1,r_2)\,dr_1dr_2, x_2\in\omega_2;\\
f_{2h}(x)=\frac{1}{h_1h_2}\iint\limits_{e^{(2)}(x)}f_2(r_1,r_2)\,dr_1dr_2, x\in\omega^{(2)},\\
f_{2h}(\xi,x_2)=\frac{2}{h_1h_2}\int\limits_{\xi}^{\xi+0.5h_1}\int\limits_{e_2(x_2)}f_2(r_1,r_2)\,dr_1dr_2, x_2\in\omega_2;
\end{gathered}\tag{3.16}
$$

$$
\theta_h(x_2)=\frac{1}{h_2}\int\limits_{e_2(x_2)}\theta(r_2)\,dr_2, x_2\in\omega_2;\quad u_{0h}^{(1)}(x)=\frac{1}{\hbar_1\hbar_2}\iint\limits_{e^{(1)}(x)}u_0^{(1)}(r_1,r_2)\,dr_1dr_2, x\in\bar\omega^{(1)}.
$$

Здесь усреднения берутся по элементарным ячейкам [16].

Т е о р е м а 3.1. *Задача о нахождении решения разностной схемы* (3.10) *при любом фиксированном управлении* $\Phi_h\in U_h$ *однозначно разрешима, причем справедлива априорная оценка*

$$
\|y(x;\Phi_h)\|_{\overset{\circ}{V}_{\gamma^{(1)},\gamma^{(2)}}(\bar\omega^{(1,2)})}\le M\sum_{k=1}^{2}\|f_{kh}(x)\|_{L_2(\omega^{(k)})\cup\gamma_S}=\hat M,\forall\Phi_h\in U_h,\tag{3.17}
$$

где $M=const>0$.

Выпишем явный вид разностной схемы (3.10) в узлах сетки $\overline{\omega}=\overline{\omega}_1\cup\overline{\omega}_2=\overline{\omega}^{(1,2)}$. Требуется найти функцию $y=(y_1,y_2)$, определенную на $\overline{\omega}=\overline{\omega}_1\cup\overline{\omega}_2=\overline{\omega}^{(1,2)}$, $y(x)=y_1(x)$ для $x\in\overline{\omega}^{(1)}$, $y(x)=y_2(x)$ для $x\in\overline{\omega}^{(2)}$, где компоненты $y_1(x)$ и $y_2(x)$ удовлетворяют следующим условиям:

1) сеточная функция y_1 удовлетворяет в $\omega^{(1)}$ уравнению

$$
\begin{gathered}
L_{1h}y_1(x)=-\left(b_{1h}^{(1)}(\Phi_{1h}(x))y_{1\bar x_1}\right)_{x_1}-\left(\tilde b_{1h}^{(1)}(\Phi_{1h}(x))y_{1\bar x_2}\right)_{x_2}+\sum_{\alpha=1}^{2}\Phi_{\alpha+2,h}(x)y_{1\overset{0}{x}_\alpha}(x)+\\
+d_{1h}(x)q_1(y_1)=f_{1h}(x),\ x\in\omega^{(1)},
\end{gathered}\tag{3.18}
$$

а на границе $\gamma^{(1)} = \partial\omega^{(1)} \setminus \gamma_S$ условию $y_1(x) = 0\,,\ x \in \gamma^{(1)}\,;$

2) сеточная функция y_2 удовлетворяет в $\omega^{(2)}$ уравнению

$$L_{2h}y_2(x) = -\left(b_{2h}^{(2)}(\Phi_{2h}(x))y_{2\bar{x}_1}\right)_{x_1} - \left(\tilde{b}_{2h}^{(2)}(\Phi_{2h}(x))y_{2\bar{x}_2}\right)_{x_2} + \sum_{\alpha=1}^{2}\vartheta_{2h}^{(\alpha)}(x)y_{2\overset{0}{x}_\alpha}(x)+ \\ +d_{2h}(x)q_2(y_2) = f_{2h}(x),\ x \in \omega^{(2)}, \tag{3.19}$$

а на границе $\gamma^{(2)} = \partial\omega^{(2)} \setminus \gamma_S$ условию $y_2(x) = 0\,,\ x \in \gamma^{(2)}\,;$

3) искомые функции y_1 и y_2 связаны между собой дополнительными условиями на $\gamma_S = \{x_1 = \xi, x_2 \in \omega_2\}$:

$$\tilde{L}_{1h}y_1(x) = \frac{2}{h_1}\left[b_{1h}^{(1)}(\Phi_{1h}(\xi_1,x_2))y_{1\bar{x}_1}(\xi_1,x_2) + \theta_h(x_2)y_1(\xi,x_2)\right] + \sum_{\alpha=1}^{2}\Phi_{\alpha+2,h}(\xi,x_2)y_{1\overset{0}{x}_\alpha}(\xi,x_2)- \\ -\left(\tilde{b}_{1h}^{(1)}(\Phi_{1h}(\xi,x_2))y_{1\bar{x}_2}(\xi,x_2)\right)_{x_2} + d_{1h}(\xi,x_2)q_1(y_1(\xi,x_2)) = f_{1h}(\xi,x_2) + \frac{2}{h_1}\theta_h(x_2)y_2(\xi,x_2), \tag{3.20}$$

$$\tilde{L}_{2h}y_2(x) = -\frac{2}{h_1}\left[b_{2h}^{(2)}(\Phi_{2h}(\xi_1+h_1,x_2))y_{2x_1}(\xi,x_2) - \theta_h(x_2)y_2(\xi,x_2)\right] + \sum_{\alpha=1}^{2}\vartheta_{2h}^{(\alpha)}(\xi,x_2)y_{2\overset{0}{x}_\alpha}(\xi,x_2)- \\ -\left(\tilde{b}_{2h}^{(2)}(\Phi_{2h}(\xi,x_2))y_{2\bar{x}_2}(\xi,x_2)\right)_{x_2} + d_{2h}(\xi,x_2)q_2(y_2(\xi,x_2)) = f_{2h}(\xi,x_2) + \frac{2}{h_1}\theta_h(x_2)y_1(\xi,x_2), x \in \gamma_S. \tag{3.21}$$

Теорема 3.2. *Для каждого $h > 0$ существует по крайней мере одно оптимальное управление $\Phi_{h*} \in U_h$ в последовательности сеточных (разностных) экстремальных задач* (3.9)-(3.16), *т.е.* $J_{h*} = \inf\{J_h(\Phi_h) : \Phi_h \in U_h\} > -\infty\,,$ $U_{h*} = \{\Phi_{h*} \in U_h : J_h(\Phi_{h*}) = J_{h*}\} \neq \emptyset\,.$

4. Априорные оценки погрешности и скорости сходимости сеточных экстремальных задач по состоянию

Установим связь между $u(r,g)$ – решением прямой задачи (2.1)-(2.3) с разрывными коэффициентами и решением и $y(x,\Phi_h) = (y_1(x,\Phi_h), y_2(x,\Phi_h))$ – решением аппроксимирующей ее разностной задачи состояния (3.10) при $h \to 0$, для любых фиксированных управлений $g \in U$ и $\Phi_h \in U_h$, где U и U_h – множества допустимых управлений в задачах оптимального управления (2.12), (2.1)-(2.10) и (3.9)-(3.16) соответственно.

Справедлива следующая теорема о точности аппроксимаций по состоянию.

Теорема 4.1. *Пусть $g \in U$ и $\Phi_h \in U_h$ – произвольные управления, а $u(r,g)$ и $y(x,\Phi_h)$ – соответствующие им решения задач состояния в экстремальных задачах* (2.12), (2.1)-(2.10) *и* (3.9)-(3.16). *Тогда для любых $h > 0$ справедлива следующая оценка скорости сходимости метода сеток по состоянию для экстремальной задачи* (2.12), (2.1)-(2.10):

$$\|y(x,\Phi_h) - u(x;g)\|_{\overset{\circ}{V}_{\gamma^{(1)},\gamma^{(2)}}(\bar{\omega}^{(1,2)})} \le C\Bigg\{|h|\Bigg[\sum_{\alpha=1}^{2}\Bigg(\|k_\alpha\|_{L_\infty(\Omega_\alpha)} + L_{q_\alpha}\|d_\alpha\|_{L_\infty(\Omega_\alpha)}+ \\ +\|\vartheta_1^{(\alpha)}\|_{L_\infty(\Omega_\alpha)} + \|\vartheta_2^{(\alpha)}\|_{L_\infty(\Omega_\alpha)}\Bigg)\|u_\alpha\|_{W_2^2(\Omega_\alpha)} + \|\theta\|_{L_\infty(0,l_\alpha)}\sum_{\alpha=1}^{2}\|u_\alpha\|_{W_2^2(\Omega_\alpha)}\Bigg]+$$

$$
\begin{gathered}
+\sum_{\alpha=1}^{2}\Bigg(\Bigg\|b_{\alpha h}^{(\alpha)}(\Phi_{\alpha h}(x_1,x_2))-\frac{1}{h_2}\int\limits_{e_2(x_2)}k_\alpha(x_1-0.5h_1,r_2)\,dr_2\Bigg\|_{L_\infty(\omega_1^{(\alpha)+}\times\omega_2)}+\\
+\Bigg\|\tilde{b}_{\alpha h}^{(\alpha)}(\Phi_{\alpha h}(x_1,x_2))-\frac{1}{h_1}\int\limits_{e_1^{(\alpha)}(x_1)}k_\alpha(r_1,x_2-0.5h_2)\,dr_1\Bigg\|_{L_\infty(\omega_1^{(\alpha)}\times\omega_2^{+})}\Bigg)\|u_\alpha\|_{W_2^2(\Omega_\alpha)}+\\
+\Bigg\|\tilde{b}_{1h}^{(1)}(\Phi_{1h}(\xi,x_2))-\frac{2}{h_1}\int\limits_{\xi-0.5h_1}^{\xi}k_1(r_1,x_2-0.5h_2)\,dr_1\Bigg\|_{L_\infty(\omega_2^{+})}\|u_1\|_{W_2^2(\Omega_1)}+\\
+\Bigg\|\tilde{b}_{2h}^{(2)}(\Phi_{2h}(\xi,x_2))-\frac{2}{h_1}\int\limits_{\xi}^{\xi+0.5h_1}k_2(r_1,x_2-0.5h_2)\,dr_1\Bigg\|_{L_\infty(\omega_2^{+})}\|u_2\|_{W_2^2(\Omega_1)}+\\
+\sum_{\alpha=1}^{2}\Bigg(\Bigg\|\Phi_{\alpha+2,h}(r)-\frac{1}{h_1h_2}\int\limits_{e^1(x)}\vartheta_1^{(\alpha)}(r)\,dr\Bigg\|_{L_\infty(\omega^{(\alpha)})}+\\
+\Bigg\|\Phi_{\alpha+2,h}(\xi,r_2)-\frac{2}{h_1h_2}\int\limits_{\xi-0.5h_1}^{\xi}\int\limits_{e_2(x_2)}\vartheta_1^{(\alpha)}(r)\,dr\Bigg\|_{L_\infty(\omega_2)}\Bigg)\|u_\alpha\|_{W_2^2(\Omega_\alpha)}\Bigg\}.
\end{gathered}
\tag{4.1}
$$

5. Оценки погрешности сеточного функционала и скорости сходимости сеточных аппроксимаций по функционалу, сходимость по управлению. Регуляризация аппроксимаций

Для ответа на вопрос о сходимости сеточных задач оптимального управления (3.9)-(3.16) по функционалу и управлению необходимо, прежде всего, установить связь между функционалами $J_h(\Phi_h)$ и $J(g)$ эктремальных задач (3.9)-(3.16) и (2.12), (2.1)-(2.10), для любых фиксированных управлений $\Phi_h\in U_h$ и $g\in U$, и любых $h>0$.

Оценку погрешности функционала $J_h(\Phi_h)$ эктремальной задачи (3.9)-(3.16) устанавливает

Теорема 5.1. *Для любых управлений $g\in U$ и $\Phi_h\in U_h$ экстремальных задач* (2.12), (2.1)-(2.10) *и* (3.9)-(3.16) *соответственно и любых $h>0$ для погрешности сеточного функционала $J_h(\Phi_h)$ экстремальной задачи* (3.9)-(3.16) *справедлива оценка*

$$
\begin{gathered}
|J(g)-J_h(\Phi_h)|=|I(u(r;g))-I_h(y(x;\Phi_h))|\le\\
\le M\Bigg\{|h|+\sum_{\alpha=1}^{2}\Bigg[\Bigg\|\frac{1}{h_2}\int\limits_{e_2(x_2)}k_\alpha(x_1-0.5h_1,r_2)\,dr_2-b_{\alpha h}^{(\alpha)}(\Phi_{\alpha h}(x_1,x_2))\Bigg\|_{L_\infty(\omega_1^{(\alpha)+}\times\omega_2)}+\\
+\Bigg\|\frac{1}{h_2}\int\limits_{e_1^{(\alpha)}(x_1)}k_\alpha(r_1,x_2-0.5h_2)\,dr_1-\tilde{b}_{\alpha h}^{(\alpha)}(\Phi_{\alpha h}(x_1,x_2))\Bigg\|_{L_\infty(\omega_1^{(\alpha)}\times\omega_2^{+})}+\\
+\Bigg\|\Phi_{\alpha+2,h}(r)-\frac{1}{h_1h_2}\int\limits_{e^1(x)}\vartheta_1^{(\alpha)}(r)\,dr\Bigg\|_{L_\infty(\omega^{(\alpha)})}+\\
+\Bigg\|\Phi_{\alpha+2,h}(\xi,r_2)-\frac{2}{h_1h_2}\int\limits_{\xi-0.5h_1}^{\xi}\int\limits_{e_2(x_2)}\vartheta_1^{(\alpha)}(r)\,dr\Bigg\|_{L_\infty(\omega_2)}\Bigg]+
\end{gathered}
\tag{5.1}
$$

$$+\left\|\frac{2}{h_1}\int\limits_{\xi-0.5h_1}^{\xi} k_1(r_1,x_2-0.5h_2)\,dr_1-\tilde{b}_{1h}^{(1)}(\Phi_{1h}(\xi,x_2))\right\|_{L_\infty(\omega_2^+)}+$$
$$+\left\|\frac{2}{h_1}\int\limits_{\xi}^{\xi+0.5h_1} k_2(r_1,x_2-0.5h_2)\,dr_1-\tilde{b}_{2h}^{(2)}(\Phi_{2h}(\xi,x_2))\right\|_{L_\infty(\omega_2^+)}\Bigg\}.$$

где $M=const>0$ *, не зависящая от* h *,* y *,* u *,* Φ_h *,* g *.*

Для исследования сходимости разностных аппроксимаций задач оптимального управления (2.12), (2.1)-(2.10) по функционалу и управлению рассмотрим последовательность разностных задач минимизации (3.9)-(3.16), зависящих от шага $h=(h_1,h_2)$ сетки $\bar\omega=\bar\omega^{(1)}\cup\bar\omega^{(2)}=\bar\omega^{(1,2)}\subset\bar\Omega_1\cup\bar\Omega_2$ при $|h|\to 0$.

Т е о р е м а 5.2. *Пусть* J_* *и* J_{h*} *– нижние грани функционалов* $J(g)$ *и* $J_h(\Phi_h)$ *в задачах* (2.12), (2.1)-(2.10) *и* (3.9)-(3.16) *соответственно. Семейство сеточных задач* (3.9)-(3.16)*, зависящих от шага* $h=(h_1,h_2)$ *сетки* $\bar\omega^{(1,2)}=\bar\omega^{(1)}\cup\bar\omega^{(2)}\subset\bar\Omega_1\cup\bar\Omega_2$ *при* $|h|\to\to 0$ *аппроксимирует исходную экстремальную задачу* (2.12), (2.1)-(2.10) *по функционалу, т.е.* $\lim J_{h*}=J_*$ *при* $|h|\to 0$ *, и справедлива оценка скорости сходимости*

$$|J_{h*}-J_*|\le M|h|. \tag{5.2}$$

Предположим теперь, что при каждом $h=(h_1,h_2)$ и соответствующей сетке $\bar\omega=\bar\omega_h=\bar\omega^{(1)}\cup\bar\omega^{(2)}$ с помощью какого-либо метода минимизации получено приближенное значение $J_{h*}+\epsilon_h$ нижней грани J_{h*} функционала $J_h(\Phi_h)$ на U_h в задаче (3.9)-(3.16) и найдено сеточное управление $\Phi_{h\epsilon_h}(x)\in U_h$, дающее приближенное решение задачи (3.9)-(3.16) в следующем смысле:

$$J_{h*}\le J_h(\Phi_{h\epsilon_h})\le J_{h*}+\epsilon_h,\quad \Phi_{h\epsilon_h}\in U_h, \tag{5.3}$$

где последовательность $\{\epsilon_h\}$ такова, что $\epsilon_h\ge 0$ и $\epsilon_h\to 0$ при $|h|\to 0$.

Возникает вопрос, можно ли принять сеточное управление $\Phi_{h\epsilon_h}(x)\in U_h$ из (5.3) в качестве некоторого приближения оптимального управления задачи (2.12), (2.1)-(2.10).

Т е о р е м а 5.3. *Пусть последовательность сеточных управлений* $\{\Phi_{h\epsilon_h}(x)\subset\subset U_h\}$ *определена из условий* (5.3)*. Тогда последовательность управлений* $\{F_h\Phi_{h\epsilon_h}(r)\}==\left\{\left(F_{1h}\Phi_{1h\epsilon_h}(r),F_{2h}\Phi_{2h\epsilon_h}(r),F_{3h}\Phi_{3h\epsilon_h}(r),F_{4h}\Phi_{4h\epsilon_h}(r)\right)\right\}$ *, где* $F_h:H_h\to H$ *,* $F_{\alpha h}$ *,* $\alpha=1,2$ *, – кусочно-линейные восполнения сеточных управлений* $\Phi_{\alpha h\epsilon_h}(r)$ *,* $\alpha=1,2$ *, а* $F_{\beta h}$ *,* $\beta=3,4$ *, – кусочно-постоянные восполнения сеточных управлений* $\Phi_{\beta h\epsilon_h}(r)$ *,* $\beta=3,4$ *(см. детальное описание в работах* [5], [2]*, соответственно), является минимизирующей для функционала* $J(g)$ *исходной задачи* (2.12), (2.1)-(2.10)*, т.е.* $\lim J(F_h\Phi_{h\epsilon_h})=J_*$ *при* $|h|\to 0$ *и справедлива оценка скорости сходимости*

$$0\le J(F_h\Phi_{h\epsilon_h})-J_*\le C|h|+\epsilon_h. \tag{5.4}$$

Последовательность $\{F_h\Phi_{h\epsilon_h}(r)\}$ *слабо сходится в* H *к множеству* $U_*\neq\emptyset$ *оптимальных управлений исходной экстремальной задачи* (2.12), (2.1)-(2.10)*.*

Рассмотрим вопрос о сильной сходимости в H по аргументу (управлению) разностных аппроксимаций (3.9)-(3.16). Будем допускать, что вычисления сеточных функционалов $J_h(\Phi_h)$ ведутся приближенно, как в силу приближенной исходной информации, так и в силу того, что счет ведется с округлениями, так что вместо функционала $J_h(\Phi_h)$

фактически используется приближенный функционал $J_{h\delta_h}(\Phi_h)$, который связан с $J_h(\Phi_h)$ соотношениями

$$J_{h\delta_h}(\Phi_h) = J_h(\Phi_h) + \theta_{\delta_h}(\Phi_h), \quad |\theta_{\delta_h}(\Phi_h)| \le \delta_h, \forall \Phi_h \in U_h, \delta_h \to +0 \text{ при } |h| \to 0. \tag{5.5}$$

Для регуляризации семейства сеточных экстремальных задач (3.9)-(3.16) введем на U функционал-стабилизатор $\Omega(g) = \|g\|_H^2$, $g \in U$, и его сеточный аналог $\Omega(\Phi_h) = \|\Phi_h\|_{H_h}^2 = \|\Phi_h\|^2_{W_2^1(\bar{\omega}_1)\times W_2^1(\bar{\omega}_2)\times(L_2(\Omega_1))^2}$, $\Phi_h \in U_h$. При каждом $h = (h_1, h_2)$ рассмотрим на U_h сеточный функционал Тихонова задачи (3.9)-(3.16): $T_{h\delta_h\alpha_h}(\Phi_h) = J_{h\delta_h}(\Phi_h) + \alpha_h\Omega_h(\Phi_h)$, $\Phi_h \in U_h$, где $\{\alpha_h\}$ – произвольная последовательность положительных чисел, сходящаяся к нулю при $|h| \to 0$. Рассмотрим теперь задачу минимизации функционала $T_{h\delta_h\alpha_h}(\Phi_h)$ на U_h: при каждом $h = (h_1, h_2)$ определим сеточное управление $\hat{\Phi}_h = \Phi_{h\delta_h\alpha_h\nu_h}(x) \in U_h$, удовлетворяющее условиям

$$T_{h\delta_h\alpha_h *} = \inf\{T_{h\delta_h\alpha_h}(\Phi_h) : \Phi_h \in U_h\} \le T_{h\delta_h\alpha_h}(\hat{\Phi}_h) \le T_{h\delta_h\alpha_h *} + \nu_h, \tag{5.6}$$

где $\nu_h \ge 0$ и $\nu_h \to +0$ при $|h| \to 0$. Введем множество Ω-нормальных решений задачи оптимального управления (2.12), (2.1)-(2.10): $U_{**} = \{g_{**} \in U_* : \Omega(g_{**}) = \inf\{\Omega(g_*) : g_* \in U_*\} = \Omega_*\}$. Так как функционал $\Omega(g)$ является слабым стабилизатором в H задачи (2.12), (2.1)-(2.10) и функционалы $J(g)$ и $\Omega(g)$ – полунепрерывны снизу на U в слабой топологии пространства H, то $U_{**} \ne \emptyset$ [20].

Теорема 5.4. *Пусть последовательность сеточных управлений* $\{\hat{\Phi}_h\} \subset U_h$ *определена из условий* (5.6)*. Тогда последовательность управлений* $\{F_h\hat{\Phi}_h(r)\} \subset U_h$ *(см. определение выше) является минимизирующей для функционала* $J(g)$ *исходной экстремальной задачи* (2.12), (2.1)-(2.10)*, т.е.* $\lim J(F_h\hat{\Phi}_h) = J_*$ *при* $|h| \to 0$ *и справедлива оценка скорости сходимости*

$$0 \le J(F_h\hat{\Phi}_h) - J_* \le M[|h| + \nu_h + \delta_h + \alpha_h]. \tag{5.7}$$

Если, кроме того, параметры ν_h, δ_h, α_h *согласованы с* $|h|$ *так, что* $\nu_h, \delta_h, \alpha_h \to +0$ *при* $|h| \to 0$ *и* $(|h| + \nu_h + \delta_h)/\alpha_h \to 0$ *при* $|h| \to 0$*, то последовательность* $\{F_h\hat{\Phi}_h\}$ *сильно сходится в* H *к множеству* Ω*-нормальных (в смысле минимальной нормы) оптимальных управлений* U_{**} *задачи* (2.12), (2.1)-(2.10).

Доказательство теоремы проводится на основе методики из [20], [21] и опирается на полученные выше результаты.

Список литературы

1. Самарский А. А., Вабищевич П. Н., *Вычислительная теплопередача*, Книжный дом «ЛИБРОКОМ», М., 2009.

2. Лубышев Ф. В., Манапова А. Р., "О некоторых задачах оптимального управления и их разностных аппроксимациях и регуляризации для квазилинейных эллиптических уравнений с управлениями в коэффициентах", *Журнал вычисл. матем. и матем. физики*, **47**:3 (2007), 376–396.

3. Лубышев Ф. В., "О разностных аппроксимациях задач оптимального управления для полулинейных эллиптических уравнений с разрывными коэффициентами и решениями", *Журнал вычисл. матем. и матем. физики*, **52**:8 (2012), 1378–1399.

4. Лубышев Ф. В., Манапова А. Р., Файрузов М. Э., “Аппроксимации задач оптимального управления для полулинейных эллиптических уравнений с разрывными коэффициентами и решениями, с управлением в граничных условиях сопряжения”, *Журнал вычисл. матем. и матем. физики*, **54**:11 (2014), 1767–1792.

5. Лубышев Ф. В., Файрузов М. Э., “Аппроксимации задач оптимального управления для полулинейных эллиптических уравнений с разрывными коэффициентами и состояниями, с управлениями в коэффициентах при старших производных”, *Журнал вычисл. матем. и матем. физики*, **56**:7 (2016), 70–96.

6. Соболев С. Л., *Некоторые применения функционального анализа в математической физике*, СО АН СССР, Новосибирск, 1962.

7. Ладыженская О. А., *Краевые задачи математической физики*, Наука, М., 1973.

8. Гаевский Х., Грегер К., Захариас К., *Нелинейные операторные уравнения и операторные дифференциальные уравнения*, Мир, М., 1978.

9. Куфнер А., Фучик Ф., *Нелинейные дифференциальные уравнения*, Наука, М., 1988.

10. Гилбарг Д., Трудингер Н., *Эллиптические дифференциальные уравнения с частными производными второго порядка*, Наука, М., 1989.

11. Киндерлелер Д., Стампаккья Г., *Введение в вариационные неравенства и их приложения*, Мир, М., 1983.

12. Ректорис К., *Вариационные методы в математической физике и технике*, Мир, М., 1985.

13. Ладыженская О. А., *Краевые задачи математической физики*, Наука, М., 1973.

14. Гаевский Х., Грегер К., Захариас К., *Нелинейные операторные уравнения и операторные дифференциальные уравнения*, Мир, М., 1978.

15. Браудер Ф.Е., *Материалы к совместному советско-американскому симпозиуму по уравнениям с частными производными*, Новосибирск, 1963.

16. Лубышев Ф. В., *Разностные аппроксимации задач оптимального управления системами, описываемыми уравнениями в частных производных*, БашГУ, Уфа, 1999.

17. Самарский А. А., Андреев В. Б., *Разностные методы для эллиптических уравнений*, Наука, М., 1976.

18. Самарский А. А., *Теория разностных схем*, Наука, М., 1989.

19. Самарский А. А., Лазаров Р. Д., Макаров В. Л., *Разностные схемы для дифференциальных уравнений с обобщенными решениями*, Высшая школа, М., 1987.

20. Васильев Ф. П., *Методы оптимизации*, Факториал Пресс, М., 2002.

21. Тихонов А. Н., Арсенин В. Я., *Методы решения некорректных задач*, Наука, М., 1986.

Дата поступления 28.04.2016

Approximation of optimal control problems for semi-linear elliptic convection-diffusion equations with discontinuous coefficients and states, with controls involved in the coefficients of diffusion and convective transfer

© F. V. Lubyshev[4], A. R. Manapova[5], M. E. Fairuzov[6]

Abstract. In this paper we study main problems of approximation of nonlinear optimal control problems described by elliptic convection-diffusion equations with discontinuous coefficients and solutions, with controls involved in the coefficients of diffusion and convective transfer. Issues of discrete optimization problems construction, convergence of the approximations with respect to state, functional and control, and regularization of approximations are considered.

Key Words: the problem of optimal control, semi-linear elliptic equations, convective and diffusion transfer, difference method

[4] Full professor of Bashkir State University, Department of IT and Computer Mathematics; aygulrm@mail.ru.

[5] Associate professor of Bashkir State University, Department of IT and Computer Mathematics; aygulrm@mail.ru.

[6] Associate professor of Bashkir State University, Department of IT and Computer Mathematics; fairuzovme@mail.ru.