УДК 517.9

Критерий топологической сопряженности 3-диффеоморфизмов с конечным числом орбит гетероклинического касания

© Т. М. Митрякова[1], О. В. Починка[2]

Аннотация. В настоящей работе рассматривается класс трёхмерных диффеоморфизмов, отличающихся от градиентно-подобных систем наличием конечного числа орбит гетероклинических касаний. Хорошо известно, что такие каскады не являются структурно устойчивыми, однако для них найдена полная система топологических инвариантов.

Ключевые слова: топологическая сопряжённость, гетероклинические касания, модули устойчивости

Дж. Палис [5] был первым, кто обнаружил, что нарушение условия трансверсальности пересечения инвариантных многообразий неподвижных точек приводит к тому, что в любой C^1-окрестности такой динамической системы существует континуум попарно не сопряженных систем. Про такие системы говорят, что они обладают модулями топологической сопряженности или модулями устойчивости. Несмотря на неустойчивость, для некоторого класса таких систем удается получить полную систему топологических инвариантов. Для дискретных систем на поверхностях такие результаты получены в работах [3], [4]. Настоящая статья является продолжением этих идей в размерность три.

Более детально, в настоящей работе необходимые и достаточные условия топологической сопряженности получены для диффеоморфизмов класса Ψ, заданных на гладких трёхмерных замкнутых ориентируемых многообразиях M^3 и таких, что любой диффеоморфизм $f \in \Psi$ обладает следующими свойствами:

1) неблуждающее множество Ω_f диффеоморфизма f состоит из конечного числа гиперболических точек;

2) для различных седловых точек $p, q \in \Omega_f$ пересечение $W^s_p \cap W^u_q$ не пусто только в случае, когда $\dim\, W^s_p = \dim\, W^u_q = 2$, при этом оно является трансверсальным всюду, кроме, возможно, конечного числа орбит невырожденного одностороннего касания[3];

3) седловые точки диффеоморфизма f обладают C^2-линеаризующими окрестностями (см. определение 1.3. ниже).

Чтобы сформулировать результат настоящей работы, введём следующие обозначения для диффеоморфизма $f \in \Psi$.

Для $i \in \{0,1,2,3\}$ обозначим через Ω_i подмножество Ω_f, состоящее из точек p таких, что $\dim\, W^u_p = i$. Положим $A_f = W^u_{\Omega_0 \cup \Omega_1}$, $R_f = W^s_{\Omega_2 \cup \Omega_3}$, $V_f = M^3 \setminus (A_f \cup R_f)$ и $\hat{V}_f = V_f / f$. Из [1] следует, что множества A_f, R_f, V_f и $\hat{V}_f$ являются связными, $\hat{V}_f$ является гладким замкнутым 3-многообразием и естественная проекция $p_{_f} : V_f \to \hat{V}_f$ является накрытием, индуцирующим эпиморфизм $\eta_{_f} : \pi_1(\hat{V}_f) \to \mathbb{Z}$, действующий следующим образом. Пусть $\hat{c}$ — петля в $\hat{V}_f$ такая, что $\hat{c}(0) = \hat{c}(1) = \hat{x}$. В силу теоремы о монодромии существует петля c в V_f с началом в точке x ($c(0) = x$), которая является поднятием пути $\hat{c}$, и

---

[1] Доцент кафедры теории функций ННГУ им. Н.И. Лобачевского; tatiana.mitryakova@yandex.ru

[2] Профессор кафедры фундаментальной математики НИУ ВШЭ-НН; olga-pochinka@yandex.ru

[3] Пусть N_1, N_2 — двумерные подмногообразия многообразия M^3. Точка $x \in N_1 \cap N_2$ называется точкой *невырожденного одностороннего касания*, если существует карта (U_x, φ_x) многообразия M^3, где $U_x \subset M^3$ — открытая окрестность точки x и $\varphi_x : U_x \to \mathbb{R}^3$ — C^2-диффеоморфизм такой, что $\varphi_x(x) = (0,0,0)$, $\varphi_x(N_1 \cap U_x) = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : z = 0\}$, $\varphi_x(N_2 \cap U_x) = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : z = x^2 + y^2\}$.

существует элемент $k \in \mathbb{Z}$ такой, что $c(1) = f^k(x)$. Тогда $\eta_f : \pi_1(\hat{V}_f) \to \mathbb{Z}$ — отображение, переводящее $[\hat{c}]$ в k.

Положим $\hat{\mathbb{W}}^s_f = \bigcup\limits_{p\in\Omega_1} \hat{W}^s_p$ и $\hat{\mathbb{W}}^u_f = \bigcup\limits_{p\in\Omega_2} \hat{W}^u_p$. Каждая компонента связности $\hat{W}^\delta_p, \delta \in \{s, u\}$ множества $\hat{\mathbb{W}}^\delta_f$ является η_f-существенным двумерным тором или η_f-существенной бутылкой Клейна на многообразии $\hat{V}_f$ в следующем смысле. Пусть $j : \hat{W}^\delta_p \to \hat{V}_f$ включение и $j_* : \pi_1(\hat{W}^\delta_p) \to \pi_1(\hat{V}_f)$ индуцированный гомоморфизм, тогда $\eta_f(j_*(\pi_1(\hat{W}^\delta_p))) \neq \{0\}$. Из свойства 2) класса Ψ следует, что компоненты связности $\hat{W}^s_p \subset \hat{\mathbb{W}}^s_f$ и $\hat{W}^u_p \subset \hat{\mathbb{W}}^u_f$ либо не пересекаются, либо пересекаются трансверсально по одномерным кривым, либо пересекаются нетрансверсально с нарушением условия трансверсальности пересечения в конечном числе точек, являющихся точками невырожденного одностороннего касания.

Пусть диффеоморфизм f принадлежит классу Ψ и σ — его седловая точка периода m_σ с двумерным устойчивым многообразием. Обозначим через $J_\sigma : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ линейный диффеоморфизм, определяемый жордановой формой линейной части диффеоморфизма f^{m_σ} в окрестности точки σ. Точка $O(0, 0, 0)$ является седловой точкой диффеоморфизма J_σ и имеет J_σ-инвариантную окрестность $\mathcal{U}_{J_\sigma}$ (см., например, [2]).

Определение 1.3. *f^{m_σ}-инвариантную окрестность $\mathcal{U}_\sigma$ седловой точки σ назовем C^2-линеаризующей, если существует C^2-диффеоморфизм $\psi_\sigma : \mathcal{U}_\sigma \to \mathcal{U}_{J_\sigma}$, сопрягающий диффеоморфизм $f^{m_\sigma}|_{\mathcal{U}_\sigma}$ с диффеоморфизмом $J_\sigma|_{\mathcal{U}_{J_\sigma}}$.*

Обозначим через $\mathcal{A}$ множество точек гетероклинического касания. Для любой точки $a \in \mathcal{A}$ обозначим через σ^s_a и σ^u_a седловые точки такие, что a принадлежит пересечению инвариантных многообразий $W^s_{\sigma^s_a}$ и $W^u_{\sigma^u_a}$. Обозначим через μ_a (λ_a) собственное значение точки σ^s_a (σ^u_a) по модулю большее (меньшее) единицы.

Обозначим через Ψ^* множество диффеоморфизмов $f \in \Psi$ таких, что отношение $\frac{ln|\lambda_a|}{ln|\mu_a|}$ является иррациональным числом для любой точки $a \in \mathcal{A}$.

Обозначим через U_a компоненту связности множества $U_{\sigma^s_a} \cap U_{\sigma^u_a}$, содержащую точку a. Для любой точки $p \in U_a$ положим $p^s = \psi_{\sigma^s_a}(p) = ([p]^s_x, [p]^s_y, [p]^s_z)$, $p^u = \psi_{\sigma^u_a}(p) = ([p]^u_x, [p]^u_y, [p]^u_z)$, $g_a = \psi_{\sigma^u_a} \circ \left(\psi_{\sigma^s_a}\Big|_{U_a}\right)^{-1} : \psi_{\sigma^s_a}(U_a) \to \psi_{\sigma^u_a}(U_a)$. Запишем отображение g_a в координатном виде

$$g_a(x, y, z) = (\xi_a(x, y, z), \eta_a(x, y, z), \zeta_a(x, y, z)).$$

Положим

$$\tau_a = \frac{\partial\zeta_a}{\partial x}(a^s).$$

Положим $H_a = \mathcal{A} \cap W^s_{\sigma^s_a} \cap W^u_{\sigma^u_a}$, $\hat{H}_a = p_f(H_a)$, $\lambda_{\hat{H}_a} = \lambda_a$ и $\mu_{\hat{H}_a} = \mu_a$ для $a \in \mathcal{A}$. Обозначим через $\hat{H}_f$ объединение всех множеств $\hat{H}_a$.

Положим $\hat{\mathcal{A}} = p_f(\mathcal{A})$. Обозначим через K_f связную фундаментальную область действия диффеоморфизма f на V_f, граница которой не содержит точек множества $\mathcal{A}$. Для произвольной гладкой кривой $\hat{\nu} \subset \hat{V}_f$, соединяющей точки $\hat{x}$ и $\hat{y}$, существует единственное поднятие $\nu \subset V_f$ с начальной точкой $x = p_f^{-1}(\hat{x}) \cap K_f$ и конечной точкой $f^{k_{\hat{\nu}}}(\hat{K}_f)$ для некоторого целого $k_{\hat{\nu}}$.

Пусть $\hat{a}_1, \hat{a}_2 \in \hat{H}_a \cap \hat{K}_f$. Обозначим через $\hat{\nu}_{\hat{a}_1,\hat{a}_2}$ гладкую кривую, соединяющую точки $\hat{a}_1$ и $\hat{a}_2$.

Для каждой точки $b \in (H_f \cap K_f)$ вычислим параметр τ_b и положим $\tau_{\hat{b}} = \tau_b$ для $\hat{b} = p_f(b)$. Для $\hat{H}_a$ из $\hat{H}_f$ положим

$$\tau_{\hat{H}_a} = \{\tau_{\hat{b}},\ \hat{b} \in \hat{H}_a\} \qquad \hat{C}_{\hat{H}_a} = \{\lambda_{\hat{H}_a},\ \mu_{\hat{H}_a}, \tau_{\hat{H}_a}\}.$$

Положим
$$\hat{C}_f = \{\hat{C}_{\hat{H}_a}, \hat{H}_a \subset \hat{H}_f\}.$$

Определение 1.4. *Набор* $S_f = (\hat{V}_f, \eta_f, \hat{\mathbb{W}}^s_f, \hat{\mathbb{W}}^u_f, \hat{C}_f)$ *назовем схемой диффеоморфизма* $f \in \Psi$.

Определение 1.5. *Схемы* S_f *и* $S_{f'}$ *диффеоморфизмов* $f, f' \in \Psi$ *назовем эквивалентными, если существует гомеоморфизм* $\hat{\varphi} : \hat{V}_f \to \hat{V}_{f'}$ *со следующими свойствами:*

1) $\eta_f = \eta_{f'}\hat{\varphi}_*$;

2) $\hat{\varphi}(\hat{\mathbb{W}}^s_f) = \hat{\mathbb{W}}^s_{f'}$ *и* $\hat{\varphi}(\hat{\mathbb{W}}^u_f) = \hat{\mathbb{W}}^u_{f'}$;

3) если $\hat{H}_{a'} = \hat{\varphi}(\hat{H}_a)$ *то* $\dfrac{ln|\lambda_{\hat{H}_a}|}{ln|\mu_{\hat{H}_a}|} = \dfrac{ln|\lambda_{\hat{H}_{a'}}|}{ln|\mu_{\hat{H}_{a'}}|}$;

4) если $\hat{H}_{a'} = \hat{\varphi}(\hat{H}_a)$ *для* $\hat{H}_a$ *из* $\hat{H}_f$, *то для любых точек* $\hat{a}_1,\ \hat{a}_2 \in \hat{H}_a$, *принадлежащих* $\hat{V}_f$ *выполняется равенство* $\left|\dfrac{\tau_{\hat{a}_2}}{\tau_{\hat{a}_1}}\right|^{\frac{1}{\ln|\mu_{\hat{H}_a}|}} = \left(\left|\dfrac{\lambda_{\hat{H}_{a'}}}{\mu_{\hat{H}_{a'}}}\right|^{k_{\hat{\varphi}(\hat{\nu}_{\hat{a}_1,\hat{a}_2})}} \cdot \left|\dfrac{\tau_{\hat{\varphi}(\hat{a}_2)}}{\tau_{\hat{\varphi}(\hat{a}_1)}}\right|\right)^{\frac{1}{\ln|\mu_{\hat{H}_{a'}}|}}$.

Основным результатом данной работы является следующая теорема.

Теорема 1.2.

1. Если схемы диффеоморфизмов $f, f' \in \Psi$ *эквивалентны, то диффеоморфизмы топологически сопряжены.*

2. Диффеоморфизмы $f, f' \in \Psi^*$ *топологически сопряжены тогда и только тогда, когда их схемы эквивалентны.*

Благодарности. Работа выполнена при финансовой поддержке Программы фундаментальных исследований НИУ ВШЭ в 2015 году (проект «Динамические системы и их приложения»), Российского фонда научных исследований (гранты № 13-01-12452 офи-м и 15-01-03689-а) и НИР согласно заданию 2014/134 на выполнение государственных работ в сфере научной деятельности в рамках базовой части государственного задания Минобрнауки России на 2014-2016 гг. (ННГУ).

Список литературы

1. В. З. Гринес, Е. В. Жужома, В. С. Медведев, О. В. Починка, “Глобальные аттрактор и репеллер диффеоморфизмов Морса–Смейла”, *Дифференциальные уравнения и топо-логия. II, Сборник статей. К 100-летию со дня рождения академика Льва Семеновича Понтрягина, Тр. МИАН*, **271** (2010), 111-–133.

2. Grines E., Pochinka O., “Necessary conditions of topological conjugacy for three-dimensional diffeomorphisms with heteroclinic tangencies”, *Динамические системы*, **3(31)** (2013), 185–200.

3. W. De Melo, S. J. Strien, “Diffeomorphisms on surfaces with a finite number of moduli”, *Ergod. Th. and Dynam. Sys.*, **7** (1987), 415–462.

4. Т. М. Митрякова, О. В. Починка, “К вопросу о классификации диффеоморфизмов поверхностей с конечным числом модулей топологической сопряженности”, *Труды МИАН*, **6(1)** (2010), 91–105.

5. J. Palis, "A differentiable invariant of topological conjugacies and moduli of stability", *Asterisque*, **51** (1978), 335–346.

The criteria of the topological conjugacy of 3-diffeomorphisms with a finite number orbits of heteroclinic tangency

© **T. M. Mitryakova**[4], **O. V. Pochinka**[5]

Abstract. In the present paper a class of 3-diffeomorphisms is considered, which differ from the gradient-like systems in the existence of the finite number of heteroclinic tangencies orbits. It is a well-known fact that such cascades are not structurally stable. However, the full system of topological invariants is found for them.

Key Words: topological conjugacy, heteroclinic contact, moduli of stability

[4] Docent of theory function chair of Nizhny Novgorod State University after N.I. Lobachevsky; tatiana.mitryakova@yandex.ru

[5] Professor of fundamental mathematics chair of National Research University Higher School of Economics; olga-pochinka@yandex.ru