УДК 517.956.2

Точная оценка разрывов топологической энтропии для отображений лоренцевского типа

© **М. И. Малкин**[1], **К. А. Сафонов**[2]

Аннотация. Для одномерных отображений лоренцевского типа изучается вопрос о поведении топологической энтропии как функции отображения. С помощью техники символической динамики (техники нидинг-инвариантов), а также с использованием ренормализационного подхода, показано, что топологическая энтропия может иметь разрыв (скачок) только в окрестности отображения с нулевой энтропией, причем такой разрыв имеет место тогда и только тогда, когда оба нидинг-инварианта отображения периодичны с одним и тем же периодом. Дана точная оценка скачка энтропии в указанном случае.

Ключевые слова: топологические марковские цепи, топологическая энтропия, отображения лоренцевского типа

1. Введение

Одномерные разрывные отображения с двумя интервалами монотонного возрастания (лоренцевские отображения) и их надстройки моделируют отображения Пуанкаре для потоков со сложным поведением предельных траекторий, имеющих странные аттракторы типа аттрактора Лоренца (см. [4]). В работе М.И. Малкина [1] рассматривался вопрос о непрерывности топологической энтропии $h_{top}(f)$ как функции отображения f для класса кусочно-непрерывных монотонных отображений отрезка с одной точкой разрыва. При условии плотности прообразов точки разрыва была доказана теорема о непрерывности энтропии на пространстве лоренцевских отображений с C^0 –топологией. Можно показать, что этот результат справедлив, если условие плотности прообразов разрыва заменить на условие положительности топологической энтропии отображения, в окрестности которого рассматривается функция $h_{top}(f)$. Если же рассматривать функцию $h_{top}(f)$ в окрестности отображения f_0 с нулевой энтропией, то, как показано в данной статье, $h_{top}(f)$ может иметь разрыв (скачок энтропии), причем такой разрыв имеет место тогда и только тогда, когда оба нидинг-инварианта отображения периодичны с одним и тем же периодом.

Подобный вопрос о возможных скачках топологической энтропии изучался ранее для класса непрерывных кусочно-монотонных отображений. В работе М. Мизюревича [2] было получено значение максимально возможного скачка энтропии для этого класса и установлено, что величина скачка зависит от количества критических точек, входящих в периодические орбиты.

В данной работе мы установим точное значение максимально возможного разрыва энтропии в классе лоренцевских отображений и покажем, что, по аналогии с результатом Мизюревича, величина скачка энтропии определяется (общим) периодом орбит, проходящих через точку разрыва лоренцевского отображения f_0 с нулевой энтропией.

Точнее, будет доказано, что функция $h_{top}(f)$ в классе лоренцевских отображений, рассматриваемых в C^0 —топологии, является разрывной в окрестности отображения f_0 тогда

[1] Доцент кафедры дифференциальных уравнений и математического анализа, Нижегородский государственный университет им. Н.И. Лобачевского, Нижний Новгород; malkin@mm.unn.ru

[2] Студент института информационных технологий, математики и механики, Нижегородский государственный университет им. Н.И. Лобачевского, Нижний Новгород; malkin@mm.unn.ru

и только тогда, когда $h_{top}(f_0) = 0$ и нидинг-инварианты $K^+_{f_0}, K^-_{f_0}$ отображения f_0 периодичны с одним и тем же периодом; величина скачка энтропии в этом случае равна $\frac{1}{p}\log 2$, где p — общий период нидинг-инвариантов.

2. Предварительные сведения и основные результаты

Рассмотрим семейство $\mathcal{F}$ лоренцевских отображений $f : I \to I$, где $I = [-1, 1]$ и f удовлетворяет условиям:

1. f — непрерывная, строго монотонно возрастающая функция на каждом из полуинтервалов $[-1; 0)$ и $(0; 1]$.
2. $\lim_{x\to 0-} f(x) = 1$, $\lim_{x\to 0+} f(x) = -1$, $f(0) = 0$.

Отметим, что второе условие является, фактически, удобным условием нормировки (интересная динамика отображения, удовлетворяющая лишь первому условию, имеет место лишь на отрезке $f(0+), f(0-)$).

Пусть Π — пространство последовательностей $\alpha = (\alpha_0, \alpha_1, ...)$ из символов $\{-1, 1\}$ с топологией прямого (тихоновского) произведения. Будем считать, что топология задана метрикой

$$dist(\alpha, \beta) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{|\alpha_i - \beta_i|}{2^i}$$

и что на Π установлен лексикографический порядок. На этом простанстве определим отображение $\sigma : \Pi \to \Pi$ - отображение левого сдвига: $\sigma(\omega_0\omega_1\omega_2\ldots) = (\omega_1\omega_2\ldots)$.

Множество прообразов точки разрыва 0 отображения f обозначим $D = \cup_{n=0}^{\infty} D_n$, где $D_0 = \{0\}$, $D_n = \{x \in I | f^n(x) = 0, f^{n-1}(x) \neq 0\}$. Введем необходимые определения.

Определение 2.1. *Нидинг-последовательностью точки $x \in I \backslash D$ называется последовательность $\omega(x) = \omega_0\,\omega_1\,\omega_2\ldots$, где $\omega_i = sign\,(f^i(x))$. Формальный степенной ряд $\widetilde{\omega} = \sum_{i=0}^{\infty} \omega_i\, t^i$ переменного t будем называть нидинг-рядом точки x.*

Для каждой точки $x \in D$ определим пару нидинг-последовательностей по формуле:

$$K^+(x) \stackrel{def}{=} \lim_{y\to x+0} \omega(y), \quad K^-(x) \stackrel{def}{=} \lim_{y\to x-0} \omega(y), \quad y \in I\backslash D$$

Определение 2.2. *Нидинг-инвариантами отображения $f \in \mathcal{F}$ называется пара последовательностей $(K^+_f(0), K^-_f(0))$.*

Пара нидинг-инвариантов $(\alpha, \beta) == (K^+_f(0), K^-_f(0))$ является символическим описанием отображения f, а в случае плотности D прообразов разрыва, эта пара является полной системой инвариантов топологической сопряженности. В частности, данная пара определяет множество $\Sigma_f = \Sigma_{(\alpha,\beta)}$ всех допустимых нидинг-последовательностей (см. [4]), а именно, имеет место следующее утверждение.

Предложение 2.1. *Последовательность ω принадлежит Σ_f тогда и только тогда, когда выполняются условия:*

$$\text{либо } \sigma^n(\omega) \geq \alpha, \ \text{либо } \sigma^n(\omega) \leq \beta, \forall\, n \in \boldsymbol{N} \tag{2.1}$$

$$\sigma(\alpha) \leq \omega \leq \sigma(\beta). \tag{2.2}$$

Если каждая из последовательностей α и β удовлетворяет (в качестве ω) условию (2.1), то пара (α,β) будет называться *допустимой парой.* Для допустимой пары (α,β) обозначим через $\Sigma_{(\alpha,\beta)}$ множество последовательностей ω, удовлетворяющих (2.1).

Множество W допустимых пар без изолированной точки $(111\ldots,-1-1-1\ldots)$ является компактным подмножеством Π, и для допустимых пар выполняются следующие соотношения (см. [1]):

Предложение 2.2. *Пусть* (α,β) *и* (α',β') *— допустимые пары и* $\alpha'\le\alpha$, $\beta'\le\beta$, *тогда:*

1. $\alpha\in\Sigma_{(\alpha',\beta')}$ *и* $\beta\in\Sigma_{(\alpha',\beta')}$
2. $\widetilde{\alpha}-\widetilde{\beta}=\left(\widetilde{\alpha'}-\widetilde{\beta'}\right)L_{\alpha,\beta}(\alpha',\beta')$, *где* $L_{\alpha,\beta}(\alpha',\beta')=\sum_{n=0}^{\infty}l_nt^n$, *а коэффициенты* $l_n=l_n(\alpha,\beta)$ *определяются как уменьшенное на единицу число допустимых* n*-блоков в* $\Sigma_{(\alpha',\beta')}$, *находящихся между* α *и* β.

Согласно [3], топологическую энтропию разрывного отображения $f\in\mathcal{F}$ можно определить как

$$h_{top}(f)=h_{top}(\sigma|\Sigma_f)=\lim_{n\to\infty}\frac{\log l'_n}{n}=\lim_{n\to\infty}\frac{\log l_n}{n},$$

где l'_n —число допустимых n-блоков в Σ_f, а $l_n=cardD_n$.

Пусть $r(f)$ — радиус сходимости ряда $\widetilde{L}_f=\sum_{n=0}^{\infty}l_nt^n$, а $r'(f)=\min(r(f),1)$. Из формулы Коши-Адамара для радиуса сходимости имеем

$$h_{top}(f)=-\log r'(f)$$

Так ряд $\widetilde{L}_f$ определяется заданием пары нидинг-инвариантов, то отображение $h_{top}:\mathcal{F}\to[0;\log 2]$ [3] можно представить как композицию трех отображений

$$\left(K^+,K^-\right):\mathcal{F}\to W,\ r':W\to\left[\frac{1}{2},1\right]\ \text{и}\ h(f)=-\log r'.$$

Последнее отображение, очевидно, явяется непрервным. В [1] было показано, что второе отображение также является непрерывным. Перейдем к рассмотрению первого отображения.

Если оба нидинг-инварианта отображения f непериодические, то (K^+,K^-) непрерывно в точке f, и, следовательно, топологическая энтропия также является непрерывной.

В случае, когда ровно один из нидинг-инвариантов периодический, то есть имеет вид $\omega=PPP\ldots$, где $P=\omega_1\omega_2\ldots\omega_{p-1}$, отображение (K^+,K^-) терпит разрыв в точке f, но, как показано в [1], второе отображение склеивает этот разрыв, и поэтому копозиция $h_{top}(f)$ остается непрерывной.

Рассмотрим последний, самый интересный случай, когда оба нидинг-инварианта периодические. В этом случае динамика отображения f определяется конечной топологической марковской цепью (т.м.ц.), порожденной разбиением отрезка I орбитами крайних точек: $\{f^i(-1)\}\cup\{f^j(1)\}$ (см. [1]). При этом граф G, соответствующий т.м.ц., имеет два пересекающихся цикла длины p и q, где p,q — периоды нидинг-инвариантов. Если данные циклы не совпадают, то $h_{top}(f)>0$ и топологическая энтропия непрерывна для отображения f. Если же циклы совпадают, то $h_{top}()=0$ и энтропия имеет разрыв в f. Наша задача выяснить величину максимально возможного разрыва для энтропии в этом случае.

Итак, будем рассматривать отображение $f\in\mathcal{F}$, для которого выполняются условия:

[3] Так как $0<l_n\le 2l_{n-1}$, то $0<h_{top}\le\log 2$

1. Нидинг-инварианты отображения f периодичны и имеют одинаковый период p (при этом выполняется $f^{p-1}(1) = f^{p-1}(-1) = 0$).

2. Пусть $S = \{f^i(-1)\} \cup \{f^j(1)\}$, $i, j = 0, 1, ..., p-1$ и Ω — совокупность максимальных связных интералов множества $I \backslash S$, тогда существуют интервалы $J_0, J_1, \ldots, J_{p-1} \in \Omega$, для которых $f(J_i) = J_{i+1}$, $i = 0, 1, \ldots, p-2$ и $f(J_{p-1}) = J_0$, причем указанные интервалы отображаются гомеоморфно.

Так как прообразами точки разрыва являются только точки множества S, то $h_{top}(f) = 0$.

Пусть нидинг-инварианты имеют вид $\alpha = PPP\ldots$, $\beta = QQQ\ldots$. Для любой последовательности $f_n \to f$ (в C^0-топологии) рассмотрим соответствующую последовательность нидинг-инвариантов (α_n, β_n). Для последней последовательности в силу компактности W множество предельных точек непусто и они имеют вид

$$\alpha_n = PP_1P_2\ldots, \beta_n = QQ_1Q_2\ldots; P_i, Q_i \text{ являются блоками } P \text{ или } Q. \tag{2.3}$$

Рассмотрим ряд $\Theta_{(\alpha,\beta)} = \tilde{\alpha} - \tilde{\beta}$. Если $r(\alpha, \beta) \le 1$, то r совпадает с наименьшим положительным корнем функции $\Theta_{(\alpha,\beta)}(t)$ [1], при этом для допустимых пар $\alpha' \le \alpha$ и $\beta' \ge \beta$ выполняется $r(\alpha, \beta) \ge r(\alpha', \beta')$. Таким образом, среди всех допустимых пар вида (2.3) наименьшим радиусом сходимости (следовательно, наибольшей энтропией) обладает пара вида

$$\alpha* = PQQ\ldots, \beta* = QPP\ldots.$$

Так как $\alpha* = \widetilde{P} + t^p\frac{\widetilde{Q}}{(1-t^q)}$ и $\beta* = \widetilde{Q} + t^q\frac{\widetilde{P}}{(1-t^p)}$, то выполняется тождество

$$\Theta_{(\alpha*,\beta*)}(t) = (1 - t^p - t^q)\Theta_{(\alpha,\beta)}(t),$$

где p и q — периоды нидинг-инвариантов. При $p = q$ равенство принимает вид

$$\Theta_{(\alpha*,\beta*)}(t) = (1 - 2t^p)\Theta_{(\alpha,\beta)}(t).$$

Поскольку $h_{top}(f) = 0$, наименьший положительный корень $\Theta_{(\alpha*,\beta*)}(t)$ совпадает с положительным корнем $1 - 2t^p$, то есть равен $\sqrt[p]{\frac{1}{2}}$. Таким образом, максимально возможный скачок энтропии равен $-\log\sqrt[p]{\frac{1}{2}} = \frac{1}{p}\log 2$. Докажем, что данная оценка достигается.

Итак, для f имеем непересекающиеся интервалы $J_0, J_1, \ldots, J_{p-1}$, которые под действием f циклически и гомеоморфно переходят друг в друга, а границами данных интервалов являются точки множества S. Пусть c_1 и c_2 — точки из S, ближайшие к 0 справа и слева, соответственно. Тогда интервалы $(c_1, 0)$ и $(0, c_2)$ входят в $\{J_i\}$, обзначим их K и L. Для произвольного $\varepsilon > 0$ рассмотрим интервалы $K_0 = (-\varepsilon, 0)$, $L_0 = (0, \varepsilon)$. Определим линейное отображение f_ε на K_0 с наклоном $\sqrt[p]{2}$, удовлетворяющее условию $f_\varepsilon(0-) = 1 - 0$. Аналогично определим отображение на L_0. Соответствующие образы обозначим K_1 и L_1. Далее, на остальных интервалах разбиения, отображение f_ε действует так: на $K_i = (a, b)$ оно линейно с наклоном $\sqrt[p]{2}$ и условием $f_\varepsilon(b - 0) = f(b) - 0$, для $L_i = (c, d)$ последнее условие заменяется на $f_\varepsilon(c + 0) = f(c) - 0$. При достаточно малом ε интервалы K_i, L_i попарно не пересекаются, и f_ε корректно определено.

Пусть $T = K_i \cup L_i$. Для каждого $K_i = (a, b)$ определим интервалы

$$K_i' = (\min(a, f^{-1}f_\varepsilon(a), b),\ L_i = (a, b)$$

и аналогично, $L_i' = (c, \max(d, f^{-1}f_\varepsilon(d))$. Выберем $\mathcal{A}$ — открытое покрытие множества $T' = K_i' \cup L_i'$, такое, что элементы покрытия попарно не пересекаются и для любого

$A_m \in \mathcal{A}$ существует интервал J_r, содержащий A_m, но не совпадающий с ним. При малом ε элементы покрытия можно выбрать также малой длины, а их количество равным $2p$.

На подмножестве $I \backslash \mathcal{A}$ (заметим, что это множество содержит S) определим отображение $f_\varepsilon(x) = f(x)$ и доопределим f линейно и непрерывно на оставшемся подможестве $\mathcal{A} \backslash T$.

Полученное отображение непрерывно и, в силу выбора покрытия $\mathcal{A}$, является строго монотонным. Для отображение f_ε имеем инвариантное подмножество T, при действии f^p на интервалах K_0 и L_0 их длина увеличивается в два раза, следовательно, $f^p(K_0) = f^p(L_0) = K_0 \cup L_0$) и $h_{top}(f_\varepsilon|T) = \frac{1}{p}\log 2$. Кроме того, в силу монотонности f, имеем $|f - f_\varepsilon| < \max \mathbf{V}_{Ai} f$ (максимум берется по всем элементам покрытия), т.е. расстояние стремится к 0 при $\varepsilon \to 0$.

Таким образом, доказана теорема.

Т е о р е м а 2.1. *Функция $f \to h_{top}(f)$ в классе лоренцевских отображений, рассматриваемых в C^0 —топологии, является разрывной в окрестности отображения f_0 тогда и только тогда, когда $h_{top}(f_0) = 0$ и нидинг-инварианты $K^+_{f_0}, K^-_{f_0}$ отображения f_0 периодичны с одним и тем же периодом; величина скачка энтропии в этом случае равна $\frac{1}{p}\log 2$, где p — общий период нидинг-инвариантов.*

Отметим, что в случае непрерывных кусочно-монотонных отображений отрезка, согласно результату Мизюревича [2], наибольший возможный скачок энтропии равен $max\frac{a}{b}\log 2$, где a - количество критических точек (точнее, turning points – точек возврата) в периодической орбите длины b, и максимум считается по всем периодическим орбитам. В случае лоренцевских отображений аналогом критической точки можно считать точку разрыва. Тогда единственными периодическими орбитами, содержащими эту точку, являются т очки вида $f^i(-1)$ и $f^i(+1)$ (перидоичность этих точек следует понимать как $f^p(1-0) = 1-0$ и $f^p(-1+0) = -1+0$). Таким образом, доказанную нами в теореме оценку скачка энтропии $\frac{1}{p}\log 2$ можно рассматривать как аналог результата Мизюревича для класса лоренцевских отображений.

Список литературы

1. M. Malkin. *On continuity of entropy of discontinuous mappings of the interval*, Selecta Mathematica Sovietica, (1989), 131–139.

2. M. Misiurewicz. *Jumps of entropy in one dimension*, Fundamenta Mathematicae, (1989), v. 132, 215-226.

3. Lai Sang Young. *On the prevalence of horseshoes*, Trans. Amer. Math. Soc. (1981), v. 263, no. 1, 75-88.

4. Afraimovich V., Sze-Bi Hsu. *Lecture on chaotic dynamical systems*, AMS/IP, Studies in Advanced Mathematics, (2002), v.28.

Accurate assessment of the topological entropy for breaks maps of Lorenz type

© M. Malkin[4], K. Saphonov[5]

Abstract. For one-dimensional maps of Lorenz type, the problem on behavior of the topological entropy as the function of a map is studied. Using the technique of symbolic dynamics (the kneading technique) and by renormalization arguments we show that the topological entropy can have jumps only in a neighbourhood of a map with zero entropy, and moreover, such a jump appear if and only if two kneadind invariants are repiodic with the same period. An exact estimate on the value of the jump for this case is given.

Key Words: topological Markov chains, topological entropy, Lorenz type maps

[4] Associate Professor of Department of differential equations and mathematical Analysis, Nizhny Novgorod State University. N. I. Lobachevsky; malkin@mm.unn.ru

[5] Student of Institute of Information Technology, Mathematics and Mechanics, Nizhny Novgorod State University. N.I. Lobachevsky, Nizhny Novgorod; malkin@mm.unn.ru