УДК 517.9+519.8

О полусопряженности эндоморфизма Вильямса и неособого эндоморфизма окружности

© Н. В. Исаенкова[1], Е. В. Жужома[2], Г. В. Осипов[3]

Аннотация. В статье доказывается, что эндоморфизм Вильямса одномерного ветвленного многообразия с двумя точками ветвления полусопряжен с неособым эндоморфизмом окружности степени три. В качестве следствия получаем, что неблуждающее множество эндоморфизма Вильямса содержит канторово множество.

Ключевые слова: полусопряженность, одномерное ветвленное многообразие, неблуждающее множество, неособый эндоморфизм

1. Введение

Первый пример гиперболического одномерного растягивающегося аттрактора был построен С. Смейлом на полнотории. Построение аттрактора Смейла основывалось на примере линейного растягивающего отображения окружности. Эта конструкция была обобщена Вильямсом [10], [11], который показал, что любой одномерный растягивающийся аттрактор можно построить, стартуя с равномерно растягивающего неособого эндоморфизма ветвленного одномерного многообразия (что позволило Вильямсу получить классификацию ограничений диффеоморфизмов на растягивающихся одномерных аттракторах). Отметим, что в рамках конструкции Смейла-Вильямса были также построены интересные одномерные и многомерные примеры растягивающихся аттракторов в работах [3], [5], [6], [8]. В статье [4] были введены диффеоморфизмы Смейла-Виеториса, включающие в себя пример Смейла. Примеры диффеоморфизмов Смейла-Виеториса основывались на неособых эндоморфизмов окружности, которые включают в себя линейные растягивающие отображения окружности и не обязательно являются растягивающими.

В работе [10] Вильямс привел пример неособого эндоморфизма (этот эндоморфизм в статье мы называем эндоморфизмом Вильяиса) одномерного ветвленного многообразия с двумя точками ветвления (это минимально возможное число точек ветвления). На основе эндоморфизма Вильямса можно построить пример диффеоморфизма полнокренделя (то есть, трехмерного шара с двумя ручками), который можно продолжить на некоторое трехмерное многообразие до диффеоморфизма f, удовлетворяющего аксиоме А. Если эндоморфизм Вильямса является растягивающим, то f имеет одномерный растягивающийся гиперболический аттрактор, который совпадает с неблуждающим множеством диффеоморфизма в полнокренделе. Если эндоморфизм Вильямса не является растягивающим, то неблуждающее множество диффеоморфизма f представляет собой семейство нескольких базисных множеств различной топологической структуры. Для описания базисных множеств необходима информация о неблуждающем множестве эндоморфизма Вильямса.

В работе [2] было получено описание неблуждающего множества неособого эндоморфизма окружности. Ключевым результатом, который использовался в [2], было то, что

[1] Старший преподаватель кафедры математики, информатики и информационных технологий, Нижегородская академия МВД России; math-ngaa@yandex.ru, nisaenkova@mail.ru

[2] Профессор кафедры фундаментальной математики, Национальный исследовательский университет «Высшая школа экономики»; zhuzhoma@mail.ru.

[3] Профессор кафедры теории управления и динамики машин, Нижегородский государственный университет им. Н.И.Лобачевского; grosipov@gmail.ru

любой неособый эндоморфизм окружности полусопряжен с линейным растягивающим эндоморфизмом окружности. В настоящей работе доказывается, что (неособый) эндоморфизм Вильямса одномерного ветвленного многообразия с двумя точками ветвления полусопряжен с неособым эндоморфизмом окружности степени три. Это позволяет получить частичное описание неблуждающего множества эндоморфизма Вильямса. В частности, из основного результата вытекает, что неблуждающее множество эндоморфизма Вильямса, не являющегося равномерно растягивающей иммерсией, содержит инвариантное канторово множество.

Благодарности. Авторы благодарят РФФИ, гранты 13-01-12452 офи-м, 15-01-03687, 13-01-00589, и РНФ, грант 14-41-00044, за финансовую поддержку. Исследование осуществлено в рамках Программы фундаментальных исследований НИУ ВШЭ (проект 138) в 2015 году.

2. Доказательство основных результатов

Напомним некоторые определения, и приведем необходимые для дальнейшего результаты. Рассмотрим окружность S^1. Сюрьективное C^1 отображение $g : S^1 \to S^1$ называется *эндоморфизмом* [9]. Эндоморфизм g называется *неособым*, если его производная $Dg \neq 0$ [7]. Поскольку $d \geq 2$, то E_d является растягивающим эндоморфизмом ($g : S^1 \to S^1$ - *растягивающий* эндоморфизм, если $Dg > 1$). Шуб [9] классифицировал растягивающиеся эндоморфизмы, показав, что степень является полным инвариантом сопряженности в классе растягивающих эндоморфизмов.

Неособые эндоморфизмы окружности образуют важный класс d-накрытий окружности. *d-накрытием* окружности S^1 называется сюрьективный локальный гомеоморфизм $S^1 \to S^1$ степени $|d| \geq 2$, при этом прообраз каждой точки состоит из $|d| \in \mathbb{N}$ точек. В статье [2] сделана классификация d-накрытий окружности S^1 с точностью до сопряженности с помощью сохраняющих ориентацию гомеоморфизмов. В [2] показано, что полным классификационным инвариантом с точностью до d-эквивалентности является наделенное схемой инвариантное счетное множество (отмеченное множество) линейного растягивающего эндоморфизма степени d. Также в статье [2] изучено неблуждающее множество d-накрытий окружности, а именно, показано, что оно содержит канторовское множество плюс периодические точки из открытых смежных интервалов.

Пусть M – некоторое многообразие. Напомним, неблуждающее множество $NW(g)$ эндоморфизма g определяется как множество неблуждающих точек и является g-инвариантным и замкнутым. Точка $x \in M$ является *неблуждающей*, если для любой ее окрестности U пересечение $g^n(U) \cap U \neq \emptyset$ для бесконечного множества положительных n.

Будем говорить, что отображение $f_1 : S^1 \to S^1$ *полусопряжено* $f_2 : M \to M$, если существует непрерывное отображение $h : S^1 \to M$ такое, что $h \circ f_1 = f_2 \circ h$, то есть имеет место коммутативная диаграмма

$$\begin{array}{ccc} S^1 & \xrightarrow{f_1} & S^1 \\ \downarrow h & & \downarrow h \\ M & \xrightarrow{f_2} & M. \end{array}$$

Следуя [1], *одномерным ветвленным многообразием* называется топологическое пространство B, допускающее два типа координатных окрестностей: окрестности, гомеоморфные $\mathbb{R}$ и окрестности, гомеоморфные $Y = \{(x,y) \in \mathbb{R} : y = 0 \quad \text{или} \quad y = \varphi(x)\}$, где $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ – C^∞-функция такая, что $\varphi(x) = 0$ для $x \leq 0$ и $\varphi(x) = 0$ для $x > 0$, см. рис. 1.

Непосредственно из определения ветвленного многообразия вытекает, что одномерное ветвленное многообразие B имеет касательное пространство TB в каждой точке. Поэтому достаточно гладкий эндоморфизм $g : B \to B$ (в точках ветвления в понятном смысле надо говорить об односторонних производных) индуцирует отображение $D_g : TB \to TB$ касательного пространства в себя. Эндоморфизм называется неособым, если отображение D_g инъективно в каждой точке.

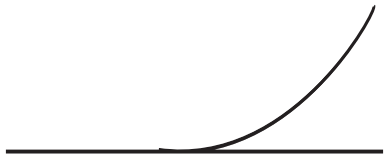

Рис. 1:

Пусть $\mathbb{K}$ – одномерное ветвленное многообразие с двумя точками ветвления, изображенное на рис. 2. Обозначим через $\mathbf{B}$– серединный отрезок, снабженный ориентацией, как показано на рис. 2. Обозначим через $\mathbf{A}$ (соответственно $\mathbf{C}$) – ориентированную дугу, гомотопную S^1, примыкающую к отрезку $\mathbf{B}$ слева (соответственно справа).

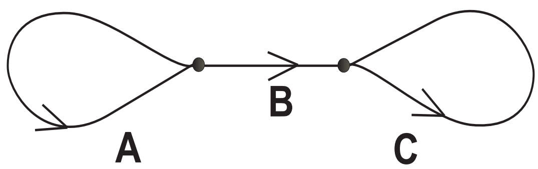

Рис. 2: Одномерное ветвленное многообразие с двумя точками ветвления.

Рассмотрим окружность S^1 и введем на ней следующие обозначения: A' – дуга, полученная при обходе окружности против часовой стрелки от точки M_1 до M_2; B_2' – дуга, полученная при обходе окружности против часовой стрелки от точки M_2 до N_2; C' – дуга, полученная при обходе окружности против часовой стрелки от точки N_2 до N_1; B_1' – дуга, полученная при обходе окружности против часовой стрелки от точки N_1 до M_1, см. рис. 3.

В данной статье мы будем рассматривать неособые эндоморфизмы $\varphi : \mathbb{K} \to \mathbb{K}$ одномерного ветвленного многообразия $\mathbb{K}$ вида 2.1 в предположении, что они не обязательно должны быть растягивающие.

$$\begin{aligned} A &\longrightarrow -B + A + B \\ B &\longrightarrow C - B + A \\ C &\longrightarrow B + C - B \end{aligned} \tag{2.1}$$

Ключевым результатом является следующее утверждение.

Теорема 2.1. *Пусть $\varphi : \mathbb{K} \to \mathbb{K}$ - неособый эндоморфизм одномерного ветвленного многообразия $\mathbb{K}$ вида 2.1. Тогда существуют неособый эндоморфизм окружности $g : S^1 \to S^1$ степени три и непрерывное отображение $h : S^1 \to \mathbb{K}$, такие что*

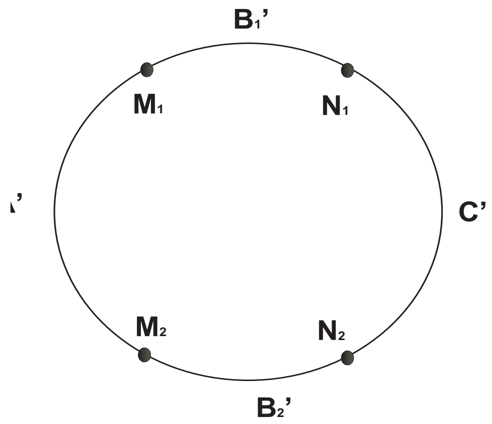

Рис. 3:

имеет место равенство $h \circ g = \varphi \circ h$, *то есть верна коммутативная диаграмма*

$$\begin{array}{ccc} S^1 & \xrightarrow{g} & S^1 \\ \downarrow h & & \downarrow h \\ \mathbb{K} & \xrightarrow{\varphi} & \mathbb{K}. \end{array}$$

Более того:

1. $h^{-1}(A) \stackrel{\text{def}}{=} A'$, *где* A' *- дуга, такая что ограничение* $h|_{intA'}$ *– гомеоморфизм.*

2. $h^{-1}(C) \stackrel{\text{def}}{=} C'$, *где* C' *- дуга, такая что ограничение* $h|_{intC'}$ *– гомеоморфизм.*

3. $h^{-1}(B) \stackrel{\text{def}}{=} B_1' \cup B_2'$ *- объединение двух дуг* B_1' *и* B_2', *таких что ограничение* $h|_{intB_i'}$, $i = 1, 2$ *– гомеоморфизм и* $h|_{B_1' \cup B_2'}$ *– локальный гомеоморфизм.*

Доказательство.

Определим отображение h так, как показано на рис. 4, то есть $h(A') = A$, $h(C') = C$, $h(B_1') = h(B_2') = B$, причем ограничения $h|_{intA'} : S^1 \to \mathbb{K}$, $h|_{intC'} : S^1 \to \mathbb{K}$, $h|_{intB_i'} : S^1 \to \mathbb{K}$, $i = 1, 2$ являются гомеоморфизмами, а объединение $h|_{B_1' \cup B_2'}$ – локальный гомеоморфизм.

Справедливость равенства $h \circ g = \varphi \circ h$, то есть наличие соответствующей коммутативной диаграммы проверяется непосредственно на рис. 5 - рис. 7.

□

Следствие 2.1.

$$h \circ g^n = \varphi^n \circ h.$$

Для неблуждающего множества эндоморфизма Вильямса одномерного ветвленного многообразия получаем следующий факт:

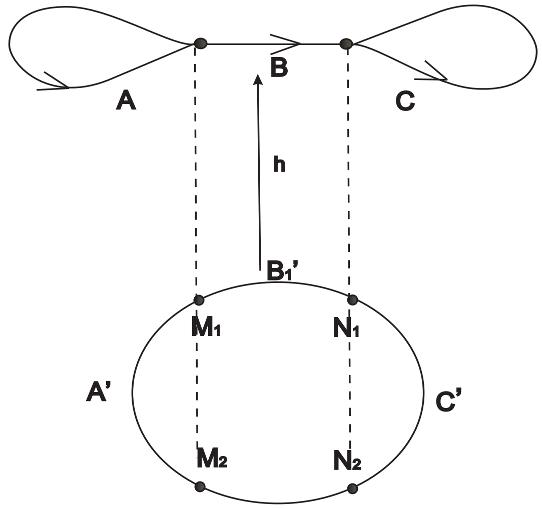

Рис. 4:

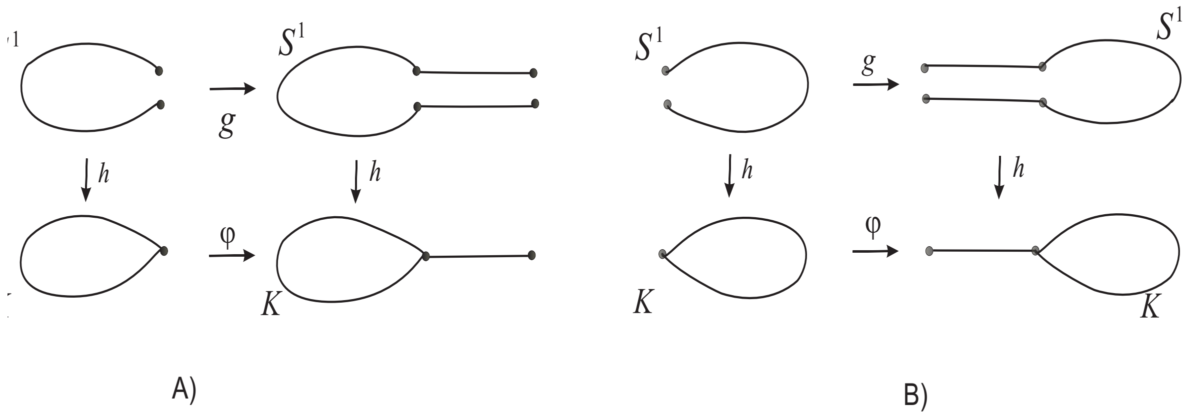

Рис. 5:

С л е д с т в и е 2.2. *Пусть* $\varphi:\mathbb{K}\to\mathbb{K}$ *- неособый эндоморфизм вида 2.1 и* $g: S^1\to S^1$ *– неособый эндоморфизм окружности* S^1 *, удовлетворяющие условиям теоремы 2.1.. Тогда имеет место следующее включение*

$$h(NW(g))\subset NW(\varphi).$$

Доказательство. Для $x\in NW(g)$, покажем, что $h(x)\in NW(\varphi)$. Возьмем любую ε-окрестность точки $h(x)$ - $U_\varepsilon(h(x))$, тогда $h^{-1}[U_\varepsilon(h(x))]=V(x)$ – окрестность точки x, $x\in S^1$. Так как точка $x\in NW(g)$, существует $n_0\geq 0$ такое, что $g^{n_0}[V(x)]\cap V(x)\neq\varnothing$, следовательно $h[g^{n_0}[V(x)]\cap V(x)]\neq\varnothing$. Поскольку h - непрерывное отображение, верно следующее включение $h[g^{n_0}[V(x)]\cap V(x)]\subset h\circ g^{n_0}[V(x)]\cap h[V(x)]$. Значит, $h\circ g^{n_0}[V(x)]\cap h[V(x)]\neq\varnothing$. В силу следствия 2.1., $\varphi^{n_0}\circ h[V(x)]\cap h[V(x)]\neq\varnothing$. Таким образом, $h[V(x)]=U_\varepsilon(h(x))$, и тогда $\varphi^{n_0}[U_\varepsilon(h(x)))]\cap U_\varepsilon(h(x))\neq\varnothing$, что означает $h(x)\in NW(\varphi)$. $\Box$.

С л е д с т в и е 2.3. *Пусть* $\varphi:\mathbb{K}\to\mathbb{K}$ *- неособый эндоморфизм вида 2.1, тогда* $NW(\varphi)$ *содержит инвариантное канторово множество.*

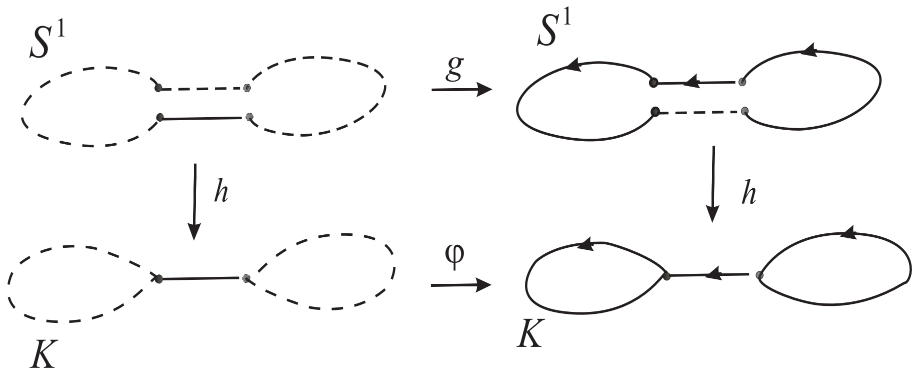

Рис. 6:

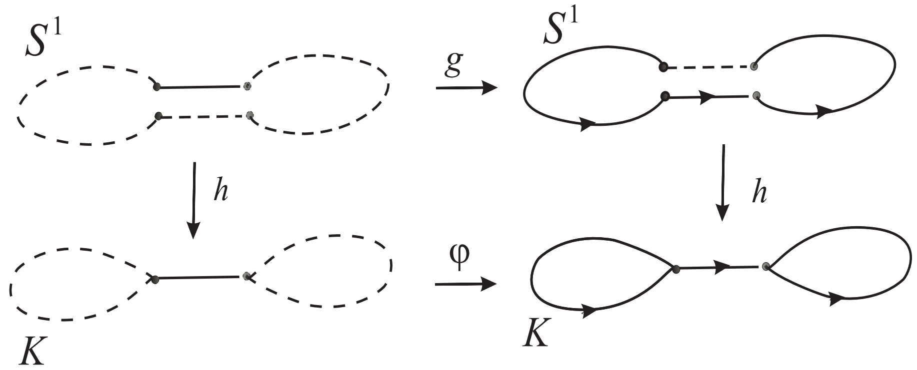

Рис. 7:

Доказательство. В статье [2] показано, что неблуждающее множество $NW(g)$ неособого эндоморфизма окружности $g : S^1 \to S^1$ содержит инвариантное канторово множество. Из теоремы 2.1. следует, что существует непрерывное отображение $h : S^1 \to \mathbb{K}$, полусопрягающее g и φ, верно включение $h(NW(g)) \subset NW(\varphi)$ (следствие 2.2.), таким образом неблуждающее множество $NW(\varphi)$ неособого эндоморфизма φ одномерного ветвленного многообразия $\mathbb{K}$ также содержит инвариантное канторово множество. $\square$.

Список литературы

1. Гринес В.З., Починка О.В., "Каскады Морса–Смейла на 3-многообразиях", *УМН*, **68**:1 (2013), 129–188.

2. Жужома Е.В., Исаенкова Н.В., "Классификация накрытий окружности", *Труды МИАН. Российская академия наук*, **3** (2012), 96-101.

3. Жужома Е.В., Исаенкова Н.В., "О классификации одномерных растягивающихся аттракторов", *Матем. зам.*, **86**:3 (2009), 333-341.

4. Жужома Е.В., Исаенкова Н.В., "О нульмерных соленоидальных базисных множествах", *Матем. сб.*, **202**:3 (2011), 47-68.

5. Bothe H., "Transversally wild expanding attractors", *Math. Nachr.*, **157** (1992), 25-49.

6. Farrell F., Jones L., "New attractors in hyperbolic dynamics", *Jour. Diff. Geom.*, **15** (1980), 107-133.

7. Nitecki Z., "Nonsingular endomorphisms of the circle", *Proc. Symp. Pure Math.*, **14** (1970), 203-220.

8. Robinson C., Williams R., "Classification of expanding attractors: an example", *Topology*, **15** (1976), 321-323.

9. Shub M., "Endomorphisms of compact differentiable manifolds", *Amer. Journ. Math.*, **91** (1969), 175-199.

10. Williams R.F., "One-dimensional non-wandering sets", *Topology*, **6** (1967), 473-487.

11. Williams R., "Expanding attractors", *Publ. Math. IHES*, **43** (1974), 169-203.

On semiconjugacy of Williams endomorphism and nonsingular circle endomorphism

© **N. Isaenkova[4], E. Zhuzhoma[5], G. Osipov[6]**

Abstract. In the paper, we proof that Williams endomorphism of one-dimensional branched manifold with two branched points semiconjugates with the nonsingular circle endomorphism of degree three. As a consequence, one gets that the non-wandering set of the Williams endomorphism contains Cantor set.
Key Words: semiconjugacy, one-dimensional branched manifold, non-wandering set, nonsingular endomorphism, basic set

[4] University professor of department of Mathematics, Computer Science and Information Technology, MIA academy of Nizhnii Novgorod; math-ngaa@yandex.ru, nisaenkova@mail.ru

[5] Professor of department of Fundamental Mathematics, National research University «Higher school of Economics», Nizhny Novgorod; zhuzhoma@mail.ru.

[6] Professor of Chair of Theory of Control and Dynamics of Machines, Lobachevskii State University, Nizhny Novgorod; grosipov@gmail.ru