УДК 517.925.54

Оценки погрешности линеаризации относительно части и всех фазовых переменных

© **Щенников А. В.** [1], **Щенников В. Н.** [2], **Щенникова Е. В.** [3]

Аннотация. Данная работа является полным изложением материала, представленного на международную конференцию, посвященную 85-летию В. И. Зубова. Разрабатывается метод построения оценок погрешностей линеаризации нелинейных систем дифференциальных уравнений, включая критические случаи.

Ключевые слова: оценка погрешности линеаризации, асимптотическая устойчивость

1. Построение оценки линеаризации для случая, когда исходная система обыкновенных дифференциальных уравнений имеет линейной первое приближение

Рассмотрим систему дифференциальных уравнений

$$\begin{array}{l} \frac{dy}{dt} = A(t)\cdot y + Y(t,y,z) + \Delta_1(t), \\ y(t_0) = \xi_y(t_0) - \varphi_y(t_0) \equiv y_0, \end{array} \tag{1.1}$$

$$\xi_y(t_0) = (\xi_1(t_0),\ldots,\xi_k(t_0))^T, \varphi_y(t_0) = (\varphi_1(t_0),\ldots,\varphi_k(t_0))^T.$$

$$\begin{array}{l} \frac{dz}{dt} = B(t)\cdot y + C(t)\cdot z + \Phi(t,z) + Z(t,y,z) + \Delta_2(t), \\ z(t_0) = \xi_z(t_0) - \varphi_z(t_0) \equiv z_0, \end{array} \tag{1.2}$$

$$\xi_z(t_0) = (\xi_{k+1}(t_0),\ldots,\xi_n(t_0))^T, \varphi_z(t_0) = (\varphi_{k+1}(t_0),\ldots,\varphi_n(t_0))^T.$$

где $A(t), B(t)$ и $C(t)$ непрерывные ограниченные матрицы размерности соответственно $k\times k, k_1\times k$ и $k_1\times k_1$ и, кроме того, $(\|A(t)\| \wedge \|B(t)\| \wedge \|C(t)\| \le M, 0 < M = const, \Delta(t) = (\Delta_1(t),\Delta_2(t)))^T, \|\Delta_i(t)\| \le \Delta_i, 0 < \tilde{\Delta}_i = const, i = \overline{1,2};$ векторные функции $Y(t,y,z), Z(t,y,z)$ и $\Phi(t,z)$ непрерывные и удовлетворяют условиям

$$Y(t,0,z) \equiv Z(t,0,z) \equiv \Phi(t,0) \equiv Z(t,0,0) \equiv 0, \tag{1.3}$$

$$\begin{array}{l} \|Y(t,y,z)\| \le a_1\cdot\|y\|^{1+\beta}, \|Z(t,y,z)\| \le a_2\cdot\|y\|^{1+\beta}, \\ \|\Phi(t,z)\| \le a_3\cdot\|z\|^{1+\beta}, 0 < (a_1\wedge a_2\wedge a_3\wedge\beta) = const \end{array} \tag{1.4}$$

при $\|y\| \le r_1, \|z\| \le r_2((r_1\wedge r_2) > 0$ – произвольные вещественные числа), $t\in J^+, k+k_1 = n$. Здесь и далее будем считать, что норма матрицы и вектора согласованы. Норма вектора является евклидовой. Верхний индекс ^{T} означает транспонирование.

Предположим, что для системы

$$\frac{d\theta}{dt} = A(t)\theta, \tag{1.5}$$

[1] Соискатель кафедры фундаментальной информатики, Мордовский государственный университет им. Н. П. Огарева, г. Саранск; du@math.mrsu.ru

[2] Профессор кафедры прикладной математики, дифференциальных уравнений и теоретической механики, Мордовский государственный университет им. Н. П. Огарева, г. Саранск; du@math.mrsu.ru

[3] Доцент кафедры фундаментальной информатики, Мордовский государственный университет им. Н. П. Огарева, г. Саранск; du@math.mrsu.ru

$$\frac{d\tilde{\theta}}{dt} = C(t)\tilde{\theta} \tag{1.6}$$

существуют соответствующие функции Ляпунова $v_1(t,\theta)$ и $v_2(t,\tilde{\theta})$ удовлетворяющие следующим условиям:

$$a) b_1\|\theta\|^2 \le v_1(t,\theta) \le b_2\|\theta\|^2, (b_1 \wedge b_2) > 0, \tag{1.7}$$

$$\|grad_\theta v_1(t,\theta)\| \le c_1\|\theta\|, c_1 > 0, \tag{1.8}$$

$$\left.\frac{dv_1}{dt}\right|_{(5)} = -w_1(t,\theta), \tag{1.9}$$

где

$$-d_1\|\theta\|^2 \le -w_1(t,\theta) \le -d_2\|\theta\|^2, (d_1 \wedge d_2) > 0; \tag{1.10}$$

$$b) b_3\|\tilde{\theta}\|^2 \le v_2(t,\theta) \le b_4\|\tilde{\theta}\|^2, (b_3 \wedge b_4) > 0 \tag{1.11}$$

$$\|grad_{\tilde{\theta}} v_2(t,\tilde{\theta})\| \le c_2\|\tilde{\theta}\|, c_2 > 0, \tag{1.12}$$

$$\left.\frac{dv_2}{dt}\right|_{(6)} = -w_2(t,\tilde{\theta}), \tag{1.13}$$

где

$$-d_3\|\tilde{\theta}\|^2 \le -w_2(t,\tilde{\theta}) \le -d_4\|\tilde{\theta}\|^2, (d_3 \wedge d_4) > 0 \tag{1.14}$$

при $t \in J^+, \|\theta\| \le r_3, \|\tilde{\theta}\| \le r_4, 0 < (r_3 \wedge r_4)$ – произвольные вещественные числа.

Справедлива теорема.

Теорема 1.1. *Пусть: 1) выполнены предположения* (1.7)-(1.14) *относительно систем* (1.5),(1.6) *и условий* (1.3),(1.4) *относительно правых частей систем* (1.1),(1.2)*; 2) система* (1.29)-(1.30) *(см. доказательство) имеет решения*

$$0 \le \eta_1^{(1)}\left(-\frac{d_2}{2b_2}, \frac{a_1c_1}{2b_1^{1+\frac{\beta}{2}}}, K\right) \le \eta_2^{(1)}\left(-\frac{d_2}{2b_2}, \frac{a_1c_1}{2b_1^{1+\frac{\beta}{2}}}, K_1\right),$$

$$0 \le \eta_1^{(2)}\left(-\frac{d_4}{2b_4}, \frac{a_3c_2}{2b_3^{1+\frac{\beta}{2}}}, K\right) \le \eta_2^{(2)}\left(-\frac{d_4}{2b_4}, \frac{a_3c_2}{2b_3^{1+\frac{\beta}{2}}}, K\right).$$

Тогда:

а) справедливы оценки

$$\sup_{t\ge t_0}\|y(t)\| \le \max\left(a_1^{(0)}\|y_0\|, \eta_1^{(1)}\left(-\frac{d_2}{2b_2}, \frac{a_1c_1}{2b_1^{1+\frac{\beta}{2}}}, K_1\right)\right), \tag{1.15}$$

$$\sup_{t\ge t_0}\|z(t)\| \le \max\left(a_2^{(0)}\|y_0\|, \eta_2^{(1)}\left(-\frac{d_4}{2b_4}, \frac{a_3\cdot c_2}{2b_3^{1+\frac{\beta}{2}}}, K_2\right)\right); \tag{1.16}$$

при $a_1^{(0)}\|y_0\| < \eta_2^{(1)}\left(-\frac{d_2}{2b_2}, -\frac{a_1c_1}{2b_1^{1+\frac{\beta}{2}}}, K_1\right), a_2^{(0)}\|y_0\| < \eta_2^{(1)}\left(-\frac{d_4}{2b_4}, -\frac{a_3c_2}{2b_3^{1+\frac{\beta}{2}}}, K\right);$

б) для разностей решений систем (1.12),(1.13) *и их сответветсвенно линеаризованных вариантов*

$$\frac{d\tilde{y}}{dt} = A(t)\cdot\tilde{y} + \Delta_1(t), \tilde{y}(t_0) = y_0, \tag{1.17}$$

$$\frac{d\tilde{z}}{dt} = B(t)\cdot\tilde{y} + C(t)\cdot\tilde{z} + \Delta_2(t), \tilde{z}(t_0) = z_0, \tag{1.18}$$

т. е. для разностей $\xi_y(t) = y(t) - \tilde{y}(t), \xi_z(t) = z(t) - \tilde{z}(t),$ *справедливы оценки*

$$\sup_{t\geq t_0}\|\xi_y(t)\| \leq$$

$$\leq \frac{a_1c_1b_2}{b_1^{\frac{1}{2}}d_2}\left[\max\left(a_1^{(0)}\|y_0\|, \rho_1^{(1)}\left(-\frac{d_2}{2b_2}, \frac{a_1c_1}{2b_1^{1+\frac{\beta}{2}}}, K_1\right)\right)\right]^{1+\beta} \tag{1.19}$$

$$\sup_{t\geq t_0}\|\xi_z(t)\| \leq \frac{b_4c_2}{b_3^{\frac{1}{2}}d_4}\max\{\bar{\bar{B}}\}. \tag{1.20}$$

Здесь $b_1^{\frac{1}{2}} \leq a_1^{(0)} \leq b_2^{\frac{1}{2}}, b_3^{\frac{1}{2}} \leq a_2^{(0)} \leq b_4^{\frac{1}{2}}$, *а постоянные* B, $\eta_i^{(1)}\left(-\frac{d_2}{2b_2}, \frac{a_1c_1}{2b_1^{1+\frac{\beta}{2}}}, K\right), \eta_i^{(1)}\left(-\frac{d_4}{2b_4}, \frac{a_3c_2}{2b_3^{1+\frac{\beta}{2}}}, K_2\right)$ *определяются в процессе доказательства,* $i = 1, 2$.

Д о к а з а т е л ь с т в о.

Для построения оценок (1.15), (1.16) воспользуемся вектор-функцией Ляпунова $v(t, y, z) = (v_1(t, y), v_2(t, z))^T$, где функция $v_1(t, y)$ удовлетворяет оценкам (1.7)-(1.10), а $v_2(t, z)$ – оценкам (1.11)-(1.14). Найдем далее полную производную по времени t от векторной функции $v(t, y, z)$ вдоль решений систем (1.1)-(1.2). Эта производная будет иметь вид

$$\left.\frac{dv_1}{dt}\right|_{(1)} = -w_1(t, y) + (grad_y v_1(t, y), Y(t, y, z) + \Delta_1(t)), \tag{1.21}$$

$$\left.\frac{dv_2}{dt}\right|_{(2)} = -w_2(t, y) + (grad_z v_2(t, z), B(t)y+$$

$$+\Phi(t, z) + Z(t, y, z) + \Delta_2(t)). \tag{1.22}$$

Исходя из ограничений (1.3), (1.4) на правые части систем (1.1), (1.2) и оценок (1.7)-(1.14), из соотношений (1.21) и (1.22) получим дифференциальные неравенства

$$\left.\frac{dv_1}{dt}\right|_{(1)} \leq -d_2\|y\|^2 + c_1\|y\|(a_1\|y\|^{1+\beta} + \tilde{\Delta}_1), \tag{1.23}$$

$$\left.\frac{dv_2}{dt}\right|_{(2)} \leq -d_4\|z\|^2 + c_2\|z\|(M|||y||| + a_3\|z\|^{1+\beta} + a_2|||z|||^{1+\beta} + \tilde{\Delta}_2), \tag{1.24}$$

где $|||y||| = \sup_{t\geq t_0}\|y(t)\|$.

В полученных дифференциальных неравенствах (1.23) и (1.24) введем преобразования

$$\rho_1 = v_1^{\frac{1}{2}}(t, y), \rho_2 = v_2^{\frac{1}{2}}(t, z).$$

С учетом этих преобразований и оценок (1.7)-(1.14) дифференциальные неравенства (1.23) и (1.24) примут вид

$$\frac{d\rho_1}{dt} \leq -\frac{d_2}{2b_2}\rho_1 + \frac{a_1\cdot c_1}{2b_1^{1+\frac{\beta}{2}}}\rho_1^{1+\frac{\beta}{2}} + K_1 \equiv \Phi_1(\rho_1), \tag{1.25}$$

$$\frac{d\rho_2}{dt} \leq -\frac{d_4}{2b_4}\rho_2 + \frac{a_3 \cdot c_2}{2b_3^{1+\frac{\beta}{2}}}\rho_2^{1+\frac{\beta}{2}} + K_2 \equiv \Phi_2(\rho_2, \rho_2), \tag{1.26}$$

где $K_1 = \frac{\tilde{\Delta}_1 \cdot c_1}{2b_1^{\frac{1}{2}}}, K_2 = \frac{((M+a_2|||y|||^\beta)\cdot|||y|||+\tilde{\Delta}_2)\cdot c_2}{2b_3^{\frac{1}{2}}}$.

Тогда для системы дифференциальных неравенств (1.25) и (1.26) согласно теореме сравнения [1, гл. 5] получим неравенства

$$\rho_1(t) \leq \eta_1(t), \rho_2(t) \leq \eta_2(t)$$

при $t \geq t_0$, где $\eta_1(t)$ и $\eta_2(t)$ есть решение задачи Коши

$$\frac{d\eta_1}{dt} = \Phi_1(\eta_1), \eta_1(t_0) = \rho_1(t_0) = v_1^{\frac{1}{2}}(z_0, y_0) = a_1^{(0)} \cdot \|y_0\|, \tag{1.27}$$

$$\frac{d\eta_2}{dt} = \Phi_2(\eta_1, \eta_2), \eta_2(t_0) = \rho_2(t_0) = v_2^{\frac{1}{2}}(t_0, z_0) = a_2^{(0)} \cdot \|z_0\|. \tag{1.28}$$

Здесь постоянные a_1 и a_2 во всех случаях однозначно определяются.

Далее рассмотрим систему нелинейных алгебраических уравнений

$$\Phi_1(\eta_1) = 0, \tag{1.29}$$

$$\Phi_2(\eta_1, \eta_2) = 0. \tag{1.30}$$

Предположим, что в области $\eta_1 \geq 0$ уравнение $\Phi_1(\eta_1) = \eta_1^{(1)}\left(-\frac{d_2}{2b_2}, \frac{a_1c_1}{2b_1^{1+\frac{\beta}{2}}}, K_1\right)$ и $\eta_1^{(2)}\left(-\frac{d_2}{2b_2}, \frac{a_1c_1}{2b_1^{1+\frac{\beta}{2}}}, K_1\right)$. Пусть $\eta_1^{(2)}(\cdot) \geq$ $\geq \eta_1^{(1)}(\cdot) \geq 0$. Но тогда, если $a_1^{(0)} \cdot \|y_0\| < \eta_1^{(2)}(\cdot)$ то решения дифференциального уравнения (1.27) равномерно ограничены в пределе (вернее, уравнение (1.27) обладает свойством конвергенции в малом [ ] в окрестности решения $\eta_1^{(1)}(\cdot)$ так как $\Phi_1(\eta_1) \geq 0$ при $(0 \leq \eta_1 \leq \eta_1^{(1)}) \wedge (\eta_1 \geq \eta_1^{(2)})$ и $\Phi_1(\eta_1) \leq 0$ при $\eta_1^{(1)} \leq \eta_1 \leq \eta_1^{(2)}$. Решение же $\eta_1^{(2)}(\cdot)$ в этом случае не будет обладать отмеченным выше свойством. Значит, решение $\rho_1(t)$ будет монотонно стремиться к $\rho_1^{(1)}(\cdot)$. Отсюда следует, что при $a_1^{(0)} \cdot \|y_0\| < \eta_1^{(2)}(\cdot)$ для решения задачи Коши дифференциального уравнения (1.27) справедлива оценка (1.15). С учетом оценки (1.15) получим аналогичную оценку и для решения задачи Коши относительно фазовой переменной $z(t)$. Для этого снова применим теорему сравнения [1, гл. 5] по отношению к решениям дифференциального неравенства (1.26) и дифференциального уравнения сравнения (1.27), (1.28).

В результате получим $\rho_2(t) \leq \eta_2(t)$ при $t \leq t_0$, где $\eta_2(t)$ – решение задачи Коши дифференциального уравнения (1.28) при $\eta_2(t_0) = \rho_2(t_0)$.

Пусть в области $\eta_2 \geq 0$ при $\eta_1^{(1)} > 0$ уравнение $\Phi_2(\eta_1^{(1)}, \eta_2) = 0$ имеет решение. Очевидно, что этих решений не более двух. Обозначим их через $\eta_2^{(1)}\left(-\frac{d_4}{2b_4}, \frac{a_3 \cdot c_2}{2b_3^{1+\frac{\beta}{2}}}, K_2\right)$ и $\eta_2^{(2)}\left(-\frac{d_4}{2b_4}, \frac{a_3 \cdot c_2}{2b_3^{1+\frac{\beta}{2}}}, K_2\right)$. Пусть $\eta_2^{(2)}(\cdot) \geq \eta_2^{(1)}(\cdot) \geq 0$. Тогда, рассуждая так же, как и при отыскании оценки (1.15), получим оценку (1.16).

З а м е ч а н и е 1.1. *Условие 2) теоремы 1.1. можно опустить, если потребовать, чтобы величина* γ *была такой чтобы системы* (1.29), (1.30) *имела в области* $(\eta_1 \wedge \eta_2) \geq 0$ *решение. Следует однако отметить, что если система* (1.1),(1.2) *является* *системой с управлением, то разрешимость системы* (1.29), (1.30) *в области* $(\eta_1 \wedge \eta_2) \geq 0$ *можно добиться путем выбора коэффициента усиления [2, гл. 7] и величины* γ. *В этом случае величина* γ *может принимать и большие значения по сравнению с системой* (1.1),(1.2) *без управления.*

В случае, когда система (1.1),(1.2) *является системой с управлением, можно ослабить условия на величину* γ *и коэффициент усиления, если осуществить аппроксимацию данной системы билинейной системой с управлением.*

Докажем теперь справедливость оценок погрешностей линеаризации (1.19) и (1.20).

Отметим, что векторные функции $\xi_y(t)$ и $\xi_z(t)$ являются решениями систем

$$\frac{d\xi_y}{dt} = A(t)\xi_y + Y(t,y,z), \xi_y(t_0) = 0, \tag{1.31}$$

$$\frac{d\xi_z}{dt} = B(t)\xi_y + C(t)\xi_z + \Phi(t,z) + Z(t,y,z), \xi_z(t_0) = 0. \tag{1.32}$$

С целью получения искомых оценок (1.19), (1.20) воспользуемся функциями Ляпунова $v_1(t,\xi_y)$ и $v_2(t,\xi_z)$, для которых справедливы условия (1.7)-(1.14), с той лишь разницей, что полные производные по времени от функций $v_1(t,\xi_y)$ и $v_2(t,\xi_z)$, находятся вдоль решений соответственно систем

$$\frac{d\,\tilde{\xi}_y}{dt} = A(t)\tilde{\xi}_y \tag{1.33}$$

$$\frac{d\,\tilde{\xi}_z}{dt} = A(t)\tilde{\xi}_z \tag{1.34}$$

$$\left.\frac{dv_1(t,\tilde{\xi}_y)}{dt}\right|_{(30)} = -w_1(t,\tilde{\xi}_y) \leq -d_2\|\tilde{\xi}_y\|^2, d_2 > 0,$$

$$\left.\frac{dv_2(t,\tilde{\xi}_z)}{dt}\right|_{(31)} = -w_2(t,\tilde{\xi}_z) \leq -d_4\|\tilde{\xi}_z\|^2, d_4 > 0.$$

Тогда, с учетом оценок (1.7)-(1.14) получим дифференциальные неравенства

$$\left.\frac{dv_1(t,\tilde{\xi}_y)}{dt}\right|_{(28)} \leq -d_2\|\tilde{\xi}_y\|^2 + (grad_{\xi_y} v_1, Y(t,y,z)),$$

$$\left.\frac{dv_1(t,\tilde{\xi}_z)}{dt}\right|_{(29)} \leq -d_4\|\tilde{\xi}_z\|^2 + (grad_{\xi_z} v_2, (B(t)\xi_y + \Phi(t,z) + Z(t,y,z))).$$

В полученных дифференциальных неравенствах воспользуемся преобразованием

$$\rho_3 = v_1^{\frac{1}{2}}(t,\xi_y),$$

$$\rho_4 = v_2^{\frac{1}{2}}(t,\xi_z),$$

и оценками (1.7)-(1.14). В результате получим дифференциальные неравенства

$$\frac{d\rho_3}{dt} \leq -\frac{d_2}{2b_2}\rho_3 + \bar{\bar{A}}, \rho_3(t_0) = 0,$$

$$\frac{d\rho_4}{dt} \leq -\frac{d_4}{2b_2}\rho_4 + \bar{\bar{\bar{B}}}, \rho_4(t_0) = 0,$$

где

$$\bar{\bar{A}} = \frac{a_1 c_1 |||y|||^{1+\beta}}{2b_1^{\frac{1}{2}}},$$

$$\bar{\bar{B}} = \frac{c_2}{2b_3^{\frac{1}{2}}}(M \cdot |||\xi_y||| + a_2 \cdot |||y|||^{1+\beta} + a_3 \cdot |||z|||^{1+\beta}),$$

$$|||\xi_y||| = \sup_{t \geq t_0} \|\xi_y(t)\|, |||\xi_z||| = \sup_{t \geq t_0} \|\xi_z(t)\|.$$

Этой системе дифференциальных неравенств соответствует соответственно система сравнения

$$\frac{d\eta_3}{dt} = -\frac{d_2}{2b_2}\eta_3 + \bar{\bar{A}}, \eta_3(t_0) = 0, \tag{1.35}$$

$$\frac{d\eta_4}{dt} = -\frac{d_4}{2b_4}\eta_4 + \bar{\bar{B}}, \eta_4(t_0) = 0. \tag{1.36}$$

По теореме сравнения [1] имеем

$$\rho_3(t) \leq \eta_3(t), t \geq t_0,$$

$$\rho_4(t) \leq \eta_4(t), t \geq t_0.$$

Положением равновесия системы (1.35) и (1.36) являются соответственно

$$\eta_3 = \frac{2b_2}{d_2}\bar{\bar{A}}, \eta_3 = \frac{2b_2}{d_2}\bar{\bar{A}}$$

Указанное положение равновесия равномерно асимптотически устойчиво. Это следует из того, что системы (1.35) и (1.36) являются линейными с отрицательными коэффициентами при фазовых переменных. Следовательно, система (1.35), (1.36) конвергентны. А тогда будет справедливы оценки (1.19) и (1.20).

Таким образом, теорема 1.1. полностью доказана.

Доказательство закончено.

Замечание 1.2. *Применительно к задачам адаптивного управления с эталонной моделью, к задачам идентификации, в которых используется адаптивное управление с эталонной моделью, оценки* (1.19) *и* (1.20) *определяют оценки фазового рассогласования. Эталонной моделью в рассматриваемом случае является система* (1.17)-(1.18).

Замечание 1.3. *В силу того, что в данной работе рассматриваются управляемые системы, то необходимость требования разрешимости управлений* $\Phi_1(\eta_1) = 0, \Phi_2(\eta_1, \eta_2) = 0$ *в положительной области отпадает, так как за счет выбора коэффициента усиления всегда можно добиться разрешимость указанных уравнений в указанной области.*

Пример 1.1. *Пусть дана система*

$$\dot{y} = \left(-2 + \frac{1}{1+t}\right) y + y^2 + \frac{1}{8}, y(0) = 1, \tag{1.37}$$

$$\dot{z} = y + \left(-1 + \frac{1}{2+t}\right) z - y^3 + z^2 + \frac{1}{64}, z(0) = 1. \tag{1.38}$$

Ее линеаризованный вариант имеет вид

$$\dot{\tilde{y}} = \left(-2 + \frac{1}{1+t}\right)\tilde{y} + \frac{1}{8}, y(0) = 1, \tag{1.39}$$

$$\dot{\tilde{z}} = \tilde{y} + \left(-1 + \frac{1}{2+t}\right)\tilde{z} + \frac{1}{64}, z(0) = 1. \tag{1.40}$$

Очевидно для уравнения $\dot{\bar{\bar{y}}} = \left(-2 + \frac{1}{1+t}\right)\bar{\bar{y}}$ *функцию Ляпунова можно выбрать в виде* $v_1 = \bar{\bar{y}}^2$, *а для уравнения* $\dot{\bar{\bar{z}}} = \tilde{y} + \left(-1 + \frac{1}{2+t}\right)\bar{\bar{z}}$ *в виде* $v_2 = z^2$. *Тогда будем иметь*

$$\left.\frac{dv_1}{dt}\right|_{(34)} = 2\left(-2 + \frac{1}{1+t}\right)y^2 + 2y^3 + \frac{1}{4}y, \tag{1.41}$$

$$\left.\frac{dv_2}{dt}\right|_{(35)} = 2zy + 2\left(-1 + \frac{1}{2+t}\right)z^2 - 2zy^3 + 2z^3 + 2z\frac{1}{64}. \tag{1.42}$$

Далее введем для уравнения (1.41) *преобразование:* $\rho_1 = v_1^{1/2)}$. *В результате получим*

$$\frac{d\rho_1}{dt} \le -\rho_1 + \rho_1^2 + \frac{1}{8}, \rho(0) = 1.$$

Соответствующее дифференциальное уравнение сравнения имеет вид

$$\frac{du_1}{dt} = -u_1 + u_1^2 + \frac{1}{8}, u_1(0) = 1.$$

По теореме сравнения [1, гл. 5] имеем $\rho_1(t) \le u_1(t), t \ge 0$.

Рассмотрим теперь уравнение $-u_1 + u_1^2 + \frac{1}{8} = 0$. *Его корни* $u_1^{(1)} = \frac{2-\sqrt{2}}{4}, u_1^{(2)} = \frac{2+\sqrt{2}}{4}$. *Тогда* $u_1^{(2)} > u_1^{(1)} > 0$.

Следовательно,

$$|||y(t)||| \le \max\left\{1, \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{2}}{4}\right\} = 1. \tag{1.43}$$

Далее рассмотрим дифференциальное уравнение

$$\dot{\xi}_y = -\left(-2 + \frac{1}{1+t}\right)\xi_y + y^2, \xi_y(0) = 0. \tag{1.44}$$

Функция Ляпунова для уравнения (1.44) *выбираем в виде квадратичной формы, т. е.* $v_3(\xi_y) = \xi_y^2$. *Тогда*

$$\left.\frac{dv_3}{dt}\right|_{(41)} = -2\left(-2 + \frac{1}{1+t}\right)\xi_y^2 + 2\xi_y y^2. \tag{1.45}$$

Вводя преобразования $\rho_3 = v_3^{1/2)}$ *для* (1.45) *и учитывая оценку сверху на* $|y(t)|$, *получим*

$$\frac{d\rho_3}{dt} \le -\rho_3 + 1, \rho_3(0) = 0.$$

Этому дифференциальному неравенству соответствует дифференциальное уравнение сравнения

$$\frac{du_3}{dt} \le -u_3 + 1, u_3(0) = 0.$$

Тогда с учетом оценки (1.44), *оценка сверху на* $|\xi_y(t)|$ *будет иметь вид*

$$|||\xi_y||| \leq 1.$$

Соответствующие оценки для переменных $z(t)$ *и* $\xi_z(t)$ *найдем тем же методом, что и оценка на* $y(t)$ *и* $\xi_y(t)$. *Для этого введем в уравнении* (1.42) *преобразование:* $\rho_2 = v_2^{1/2)}$. *Тогда будем иметь дифференциальное неравенство*

$$\frac{d\rho_2}{dt} \leq -\rho_2 + \rho_2^2 + \frac{1}{64}, \rho_2(0) = 1$$

и дифференциальное уравнение сравнения

$$\frac{du_2}{dt} = -u_2 + u_2^2 + \frac{1}{64}, u_2(0) = 1.$$

Снова по теореме сравнения имеем $\rho_2(t) \leq u_2(t), t \geq 0$.

Уравнение $-u_2 + u_2^2 + \frac{1}{64} = 0$ *имеет корни* $u_2^{(2)} = \frac{4+\sqrt{15}}{8}, u_2^{(1)} = \frac{4-\sqrt{15}}{8}$, *т. е.* $u_2^{(2)} > u_2^{(1)} > 0$. *Тогда на основании оценки* (1.43) *будем иметь*

$$|||z(t)||| \leq \max\left\{1, \frac{4-\sqrt{15}}{8}\right\} = 1. \tag{1.46}$$

Для нахождения оценки сверху на $|\xi_y(t)|$ *составим дифференциальное уравнение*

$$\dot{\xi}_z = \xi_y + (-1 + \frac{1}{2+t})\xi_z - y^3 + z^2, \xi_z(0) = 0.$$

Функцию Ляпунова для данного уравнения можно выбрать в виде $v_4(t, \xi_z) = \xi_z^2$. *Тогда*

$$\left.\frac{dv_4}{dt}\right|_{(41)} = 2\xi_z\xi_y + 2\left(-1 + \frac{1}{2+t}\right)\xi_z^2 - 2\xi_z y^3 + \xi_z z^2. \tag{1.47}$$

Введем преобразование $\rho_4 = v_4^{1/2}$ *для данного соотношения. С учетом оценок* (1.46) *соотношение* (1.47) *преобразуется в дифференциальное неравенство*

$$\frac{d\rho_4}{dt} \leq -\frac{1}{2}\rho_4 + \frac{5}{2}, \rho_4(0) = 0.$$

Соответствующее дифференциальное уравнение сравнения имеет вид

$$\frac{du_4}{dt} = -\frac{1}{2}u_4 + \frac{5}{2}, u_4(0) = 0.$$

По теореме сравнения $\rho_4(t) \leq u_4(t)$ *при* $t \geq 0$. *Таким образом, искомая оценка, с учетом оценки* (1.46) *найдена, т. е.*

$$|||\xi_z(t)||| \leq 5.$$

Следовательно, найдены оценки погрешности линеоаризации, т. е. верхние оценки на нормы решения нелинейной системы (1.37), (1.38) *и ее линеаризованного варианта* (1.39), (1.40).

2. Критический случай k нулевых, которым соответствуют простые элементарные делители

В этом случае система (1.1) преобретает вид

$$\frac{dx}{dt} = F(x) + R(t). \tag{2.1}$$

Пусть правые части системы (2.1) определены в области $\Omega = \{x, t : x \in R^n, t \in J^+ = [0, +\infty]\}$ и пусть существует единственная точка x_1, в которой $F(x_1) = 0$. Вектор-функция $R(t)$ непрерывная ограниченная. Будем считать, что $F(x)$ есть аналитическая вектор-функция в окрестности точки x_1 . Тогда систему (2.1) можно представить в виде

$$\dot{z} = Az + \Phi(z) + R(t), \tag{2.2}$$

где $z = x - x_1, A$ – постоянная матрица размерности $n \times n, \Phi(z)$ – аналитическая вектор функция. Здесь $z(0) = x(0) - x_1(0) \equiv z_0$.

Будем искать оценку для максимального уклонения решения исходной системы (2.1) от решения соответствующей линеаризованной системы для случая, когда матрица A имеет $k(k \le n)$ нулевых корней характеристического уравнения, которым соответствуют простые элементарные делители, а все остальные имеют $Re\lambda_j(A) < 0(j = \overline{k+1, n})$. Случай же, когда $Re\lambda_j(A) < 0(j = \overline{1, n})$, рассмотрен в работе [3, гл. 2].

Известно [3, гл. 2], что при указанных предположениях на матрицу A система (2.2) приводится к виду

$$\begin{aligned}&\dot{z}_1 = A_1 z_1 + \Phi_1(z_1) + \textstyle\sum_{j=1}^{\infty} \Phi_{1j}^{(N)} + R_1(t),\\ &\dot{z}_2 = Z^{(\mu)}(z_2) + \textstyle\sum_{j=\mu+1}^{\infty} Z_j^{(N)}(z_2) + \sum_{j=1}^{\infty} \Phi_{2j}^{(N)}(z_1, z_2) +\\ &+R_2(t).\end{aligned} \tag{2.3}$$

В системе (2.3) вектор z_1 имеет размерность $n-k$, z_2 – размерность k, $Re\,\lambda_j(A) < 0$ $(j = \overline{1, n-k})$, а $\Phi_1 j^{(N)}, \Phi_2 j^{(N)}$ – векторы, компоненты которых суть однородные формы степени N относительно координат вектора z_2 с аналитическими по $z_{11}, \dots, z_{1,n-k}$ коэффициентами, $\Phi_1(z_1)$ – аналитическая вектор-функция, разложение которой не содержит членов, линейных относительно координат вектора z_1, координаты векторов в $Z^{(N)}(z_2)$ есть также однородные формы порядка $N(N = \mu, \mu+1, \dots), R(t) = \begin{bmatrix} R_1(t) \\ R_2(t) \end{bmatrix}$. Здесь $z_{11}, \dots, z_{1,n-k}$ – координаты вектора $z_1, \|z_i\| = \sqrt{\sum_{j=1}^{m} z_{ij}^2} (i = 1, 2; m = k, n-k)$. Дифференциальной системе $\dot{z} = Az + \Phi(z) + R(t)$ поставим в соответствие систему вида

$$\dot{y}_1 = A_1 y_1 + R_1(t), \dot{y}_2 = Z^{(\mu)} + R_2(t), \tag{2.4}$$

которую будем называть << линеаризованной >> .

Чтобы ответить на поставленный вопрос, найдем вначале оценку нормы вектора z_2 в предположении, что нулевое решение системы

$$\dot{z} = Z^{(\mu)}(z_2) \tag{2.5}$$

асимптотически устойчивое и все решения удовлетворяют неравенству $\|z_2\| \le \beta t^{-\alpha}, \beta$ и α – положительные постоянные.

Как известно [3, гл. 2], для системы (2.5) существует однородная функция Ляпунова V_2 порядка $m+1-\mu$, где m – четное достаточно большое число. Выберем в качестве функции

Ляпунова для системы (2.3) функцию вида $V = V_1 + V_2$. Здесь V_1 – квадратичная форма и является функцией Ляпунова для системы $\dot{z}_1 = A_1 z_1$.

Введем обозначения: $\rho_1 = V_1^{\frac{1}{2}}, \rho_2 = V_2^{\frac{1}{m+1-\mu}}$. Рассуждая так же, как в работах [4], [5] получим систему дифференциальных неравенств

$$\dot{\rho}_1 \leq -k_{11}\rho_1 + k_{12}\rho_2^{(\mu+1)}\rho_1^{1+\beta} + A_{10}R_1, \rho_1(0) = A_{10}\|\bar{z}_{10}\|,$$

$$\dot{\rho}_2 \leq -k_{21}\rho_2^{\mu} + k_{22}\rho_2^{(\mu+\beta_2)} + A_{11}R_1, \rho_2(0) = A_{11}\|\bar{z}_{20}\|$$

в области $\rho_1 \leq r_1, \rho_2 \leq r_2, r = r(r_1, r_2)$. Здесь $k_{ij}, A_{10}, A_{11}, R_j, \beta_j$ – положительные вещественные постоянные; $i, j = 1, 2$.

По теореме сравнения [1, гл. 5] имеем

$$\rho_1(t) \leq v_1(t), \rho_2(t) \leq v_2(t),$$

где $v_1(t)$ и $v_2(t)$ удовлетворяют соответственно уравнениям

$$\begin{aligned} &\dot{v}_1 \leq -k_{11}v_1 + k_{12}v_2^{(\mu+\alpha)}v_1^{1+\beta_1} + A_{10}R_1, \equiv \\ &\equiv \Psi_1(v_1, v_2), v_1(0) = A_{10}\|\bar{z_{10}}\|, \\ &\dot{v}_2 \leq -k_{21}v_2^{\mu} + k_{22}v_2^{(\mu+\beta_2)} + A_{11}R_2, \equiv \\ &\equiv \Psi_1(v_1, v_2), v_1(0) = A_{10}\|\bar{z}_{10}\|. \end{aligned} \tag{2.6}$$

Предположим, что конечная система

$$\Psi_1(v_1, v_2) = 0, \Phi_2(v_1, v_2) = 0, \tag{2.7}$$

имеет решение в области $K = \{v_1, v_2 : v_1 \geq 0, v_2 \geq 0\}$. Тогда второе уравнение системы (2.7) имеет не боле двух решений, а первое – не более четырех. Обозначим через

$$v_{11}(k_{11}, k_{12}, A_{10}, R_1), v_{12}(k_{11}, k_{12}, A_{10}, R_1),$$

$$v_{13}(k_{11}, k_{12}, A_{10}, R_1), v_{14}(k_{11}, k_{12}, A_{10}, R_1)$$

решения первого уравнения системы (2.7), а через

$$v_{21}(k_{21}, k_{22}, A_{11}, R_2), v_{22}(k_{21}, k_{22}, A_{11}, R_2)$$

– решение второго уравнения системы (2.7). В дальнейшем будем их обозначать через $v_{kl}(\cdot)(k = 1, 2; l = \overline{1, 4})$. Очевидно, что

$$\Psi_2(v_2) \begin{cases} \geq 0 & \text{при } 0 \leq v_2 \leq v_{21} \wedge v_2 \geq v_{22}, \\ \leq 0 & \text{при} v_{21} \leq v_2 \leq v_{22}. \end{cases}$$

Отсюда следует, что положение равновесия $v_{21}(\cdot)$ системы

$$\dot{v}_2 = \Psi_2(v_2) \tag{2.8}$$

асимптотически устойчиво при $v_2(0) < v_{22}(\cdot)$, а положение равновесия $v_{22}(\cdot)$ неустойчиво. Далее нас будут интересовать решение первого уравнения системы (2.8) $v_{11}(\cdot)$ и $v_{12}(\cdot)$, соответствующие $v_2 = v_{21}(\cdot)$, так как из $v_{21}(\cdot)$ и одного из решений $v_{11}(\cdot)$, либо $v_{12}(\cdot)$ можно выделить положительно асимптотически устойчивое положение равновесия системы (2.6).

Рассмотрим систему

$$\bar{v}_1 = \Psi_1(v_1, v_2). \tag{2.9}$$

Положительно асимптотически устойчивое положение равновесия системы (2.9) при $v_2 = v_{21}(\cdot)$ определяется аналогично тому, как это проделано для системы (2.8). Пусть асимптотически устойчивое положение равновесия есть $v_{11}(\cdot)$ при $v_1(0) < v_{12}(\cdot)$. Следовательно, справедливы оценки

$$\sup_{t\geq t_0} \rho_1(t) \leq \max\{A_{10}\|\bar{z}_{10}\|, v_{11}(\cdot), v_{21}(\cdot)\}$$

$$\sup_{t\geq t_0} \rho_2(t) \leq \max\{A_{11}\|\bar{z}_{20}\|, v_{21}(\cdot)\}$$

при $A_{10}\|\bar{z}_{10}\| \leq v_{21}(\cdot)$ и $A_{11}\|\bar{z}_{20}\| \leq v_{22}(\cdot)$. Возвращаясь к переменной z, получим

$$\begin{array}{l} \sup_{t\geq t_0} \|z_1(t)\| \leq \gamma_1 \max\{A_{10}\|\bar{z}_{10}\|, v_{11}(\cdot), v_{21}(\cdot)\} \\ \sup_{t\geq t_0} \|z_2(t)\| \leq \gamma_2 \max\{A_{11}\|\bar{z}_{20}\|, v_{21}(\cdot)\}. \end{array} \tag{2.10}$$

Здесь $\gamma_1 > 0, \gamma_2 > 0$ – вещественные постоянные. В частности, их можно положить равными единице.

Перейдем теперь непосредственно к решению поставленного в работе вопроса. Для этого введем обозначение $\varepsilon(t) = \begin{bmatrix} \varepsilon_1(t) \\ \varepsilon_2(t) \end{bmatrix}$, где $\varepsilon_1(t) = z_1(t) - y_1(t)$, а $\varepsilon_2(t) = z_2(t) - y_2(t)$.

Вектор-функция $\varepsilon(t)$ характеризует искомую погрешность линеаризации. Система дифференциальных уравнений, которой удовлетворяют $\varepsilon_i(t)(i = 1, 2)$, имеет вид

$$\dot{\varepsilon}_1(t) = A_1\varepsilon_1 + \Phi_1(z_1) + \sum_{N=1}^{\infty} \Phi_2^{(N)},$$

$$\dot{\varepsilon}_2(t) = A_2(z_2(t), y_2(t))\varepsilon_2 + \sum_{N=\mu+1}^{\infty} Z^{(N)}(z_2) + \sum_{N=\mu+1}^{\infty} \Phi_2^{(N)}. \tag{2.11}$$

Выберем для системы (2.12) функцию Ляпунова в виде $\bar{V} = \bar{V}_1 + \bar{V}_2$, где $\bar{V}$ – квадратичная форма, являющаяся функцией Ляпунова для системы

$$\dot{\varepsilon}_1(t) = A_1\varepsilon_1,$$

$\bar{V}_2$ – функция Ляпунова для системы

$$\dot{\varepsilon}_2(t) = A_2(z_2(t), y_2(t))\varepsilon_2. \tag{2.12}$$

Известно [3, гл. 2], что решения системы (2.12) стремятся к нулю асимптотически при $t \to +i\infty$. Предположим, что функция $\bar{V}_1$ и $\bar{V}_2$ удовлетворяют неравенствам

$$\omega_1\|\varepsilon\|^2 \leq \bar{V}_1 \leq \omega_2\|\varepsilon\|^2, v_1\|\varepsilon\|^2 \leq \bar{V}_2 \leq v_2\|\varepsilon\|^2,$$

где $\omega_1, \omega_2, v_1, v_2$ – положительные вещественные постоянные. Тогда

$$\left.\frac{d\bar{V}_1}{dt}\right|_{(55)} = -\|\varepsilon_1\|^2 + (grad\bar{V}_1, \Phi_1(z_1) + \sum_{N=1}^{\infty} \Phi_{1j}^{(N)},)$$

$$\left.\frac{d\bar{V}_2}{dt}\right|_{(55)} = -\bar{W}^2 + (grad\bar{V}_2, \sum_{N=\mu+1}^{\infty} z^{(N)}(z_2) + \sum_{N=\mu+1}^{\infty} \Phi_{2j}^{(N)})$$

Здесь $\bar{W}^2$ – определенно отрицательная функция. Очевидно, при указанных предложениях на $\bar{V}_2$ функция $\bar{W}^2$ удовлетворяет неравенствам

$$\bar{\gamma}_1\|\varepsilon_1\|^2 \leq |\bar{W}^2| \leq \bar{\gamma}_2\|\varepsilon_1\|^2,$$

где $\bar{\gamma}_1 > 0, \bar{\gamma}_2 > 0$ – вещественные постоянные. Вводя вновь обозначения: $\bar{\rho}_1(t) = \bar{V}_1^{(1/2)}$ и $\bar{\rho}_2(t) = \bar{V}_2^{(1/2)}$ получим для $\varepsilon_i(t)(i = 1, 2)$ оценки

$$\begin{aligned} &\sup\nolimits_{t\geq t_0} \varepsilon_1(t) \leq \tfrac{1}{2}\alpha_1\omega_2 a\|z_1^*\|^{\mu+\alpha}, \\ &\sup\nolimits_{t\geq t_0} \varepsilon_2(t) \leq \tfrac{\bar{\gamma}_2\alpha_2}{2v_1}(b\|z_1^*\|^v \cdot \|z_1^*\| + c\|z_1^*\| \cdot \|z_1^*\|), \end{aligned} \tag{2.13}$$

где постоянные $\alpha_1, \alpha_2, a, b, c$ определяются из следующих неравенств:

$$\|gradV_i\| \leq \alpha_i\|z_i\|, i = 1, 2,$$

$$\|\Phi_1(z_1) + \sum_{N=1}^{\infty} \Phi_2^{(N)}\| \leq a\|z_1\|^{\mu+\alpha}, x > 0,$$

$$\|\sum_{N=\mu+1}^{\infty} z^{(N)}(z_2) + \sum_{N=\mu+1}^{\infty} \Phi_{2;}^{(N)}\| \leq b\|z_1^*\|^v \cdot \|z_1^*\| + c\|z_1^*\| \cdot \|z_1^*\|, v > 0,$$

в области $\|z_1\| \leq r_1, \|z_2\| \leq r_2$, $(r_1 \wedge r_2)$, а

$$z_1^* = \sup_{t\geq t_0} \|z_1(t)\|, z_2^* = \sup_{t\geq t_0} \|z_2(t)\|.$$

Таким образом, доказана следующая

Т е о р е м а 2.1. *Пусть*

а) x_1 есть единственная точка, в которой $F(x_1) = 0$;

в) матрица имеет k нулевых корней, которым соответствуют простые элементарные делители, а все остальные имеют $Re\lambda_j(A) < 0$ $(j = \overline{k+1, n})$ (2.8);

с) конечная система уравнений (2.9) имеет решения такие, что

$$0 \leq v_{21}(\cdot) \leq v_{22}(\cdot), 0 \leq v_{11}(\cdot) \leq v_{12}(\cdot);$$

d) $A_{10}\|\bar{z}_{10}\| \leq v_{12}(\cdot), A_{11}\|\bar{z}_{20}\| \leq v_{22}(\cdot)$.

Тогда существует решение дифференциальной системы (1.1) при всех $t \geq 0$, для которого справедливы оценки (2.10), а максимальное уклонение решения системы (2.2) от речения системы (2.5) удовлетворяет неравенствам (2.13) при $F(x_1) = 0$.

Для системы более общего вида по сравнению с системой (1.1), т. е.

$$\frac{dx_s}{dt} = X_s^{(\mu)}(x_s) + X_{1s}^{(\mu)}(t, x_1, \ldots, x_q) + \sum_{j=1}^{q} X_{sj}^{(\mu+\alpha)} + \Delta_s(t) \equiv$$

$$\equiv M_s(t, x) + \Delta_s(t) \tag{2.14}$$

с начальными данными $(x_1^T(t_0), \ldots, x_q^T(t_0))^T = x(t_0) = \xi(t_0) - \phi(t_0) = x_0$.

Здесь $X_s^{(\mu)}(x_s) : R^{n_s} \to R^{n_s}$ и $X_{1s}^{(\mu)}(t, x_1, \ldots, x_q) : R^+ \times R^{n_1} \times \cdots \times R^{n_q} \to R^{n_s}$ $(s = \overline{1, q}), x_s \in R^{n_s}, R^{n_1} \oplus \cdots \oplus R^{n_q} = R^n, x = (x_1^T, \ldots, x_q^T)^T$. $X_s^{(\mu)}$ и $X_1 s^{(\mu)}(t, x_1, \ldots, x_q)$ являются непрерывными по совокупности переменных и, кроме того, непрерывно дифференцируемыми по переменным $x_1, \ldots, x_q$. Векторные функции $X_{sj}^{(\mu+\alpha)}(t, x_1, \ldots, x_q)$:

$R^+ \times R^{n_1} \times \dots \times R^{n_q} \to R^{n_s}$ определяют взаимосвязи подсистем $X_s^{(\mu)}(x_s), s, j = \overline{1,q}$, т. е. подсистемы, а функции $X_{1s}^{(\mu)}(t, x_1, \dots, x_q)$ описывают внутренние взаимосвязи подсистем:

$$\frac{dx_s}{dt} = X_s^{(\mu)}(x_s) + X_{1s}^{(\mu)}(t, x_1, \dots, x_q), s = \overline{1,q}.$$

Векторные функции $X_{sj}^{(\mu+\alpha)}(t, x_1, \dots, x_q)$ обладают теми же свойствами, что и $X_{1s}^{(\mu)}(t, x_1, \dots, x_q), \Delta_s(t)$ – непрерывные ограниченные векторные функции, $\|\bar{\Delta}_s(t)\| < \tilde{\Delta}_s, \tilde{\Delta}_s > 0, M_s(t,0) \equiv 0, s = \overline{1,q}$. Индекс $\mu = \frac{p}{q} > 1, p$ и q нечетные, указывает на порядок однородности $X_s^{(\mu)}(x_s)$ и $X_{1s}^{(\mu)}(t, x_1, \dots, x_q)$, у векторных функций $X_{sj}^{(\mu+\alpha)}(t, x_1, \dots, x_q)$ верхний индекс $\mu + \alpha, 0 < \alpha = const$ также указывает на порядок однородности относительно $x_1, \dots, x_q$. Всюду в дальнейшем будем считать, что норма вектора является евклидовой.

Будем считать, что структура многосвязной системы (2.14) может быть такой, что связи между подсистемами могут с течением времени отключаться, включаться или неопределённым образом изменяться. Следовательно, возникает проблема определения структуры многосвязной системы таким образом, чтобы изменения связей между подсистемами не нарушали устойчивость системы. В случае, когда устойчивость системы и её частей сохраняется при всевозможных изменениях связей, то многосвязная система называется устойчивой к связыванию или коннективно устойчивой ([1, гл. 2 и 5]). Очевидно, (2.14) является системой при полностью включенных связях. Режим функционирования её в этом случае будет предельным. Чтобы отразить структурные изменения в (2.14), в систему вводится ([6, гл. 2 и 7]) так называемая фундаментальная матрица связей $\bar{E} = (\bar{e}_{sj})_{1,1}^{q,q}$, где $\bar{e}_{sj} = 1$ если возможна связь между подсистемами, и нулю, если связи отсутствуют. Следовательно, чтобы полнее отразить структурные изменения в исходную систему (2.14) вводится еще матрица текущих связей E

Подробное описание многосвязных систем при указанных структурных изменениях связей можно найти в [6, гл. 2 и 7].

$<<$ Линейным $>>$ приближением (2.14) является система

$$\frac{dx_s}{dt} = X_s^{(\mu)}(y_s) + X_{1s}^{(\mu)}(t, y_1, \dots, y_q) + \Delta_s(t), \tag{2.15}$$

для которой $(x_1^T(t_0, \dots, x_q^T(t_0))^T = x(t_0) = x_0 = y_0 = y(t_0) = = (y_1^T(t_0), \dots, y_q^T(t_0))^T, s = \overline{1,q}$.

Далее опишем структуру системы (2.14). Для этого введем фундаментальные матрицы связи $\bar{L} = (\bar{l}_{sj})_{1,1}^{q,q}$ и $\bar{E} = (\bar{e}_{sj})_{1,1}^{q,q}$, а также матрицы текущих связей $L = (l_{sj})_{1,1}^{q,q}$ и $E = (e_{sj})_{1,1}^{q,q}, L \in \bar{L}, E \in \bar{E}$. Здесь L и $\bar{L}$ есть соответственно матрица текущих связей и функциональная матрица на уровне подсистемы. Тогда векторные функции взаимосвязей представим в виде

$$X_{1s}^{(\mu)}(t, x_1, \dots, x_q) ::= X_{1s}^{(\mu)}(t, l_{s1}x_1, \dots, l_{sq}x_q),$$

$$X_{sj}^{(\mu+\alpha)}(t, x_1, \dots, x_q) ::= X_{sj}^{(\mu+\alpha)}(t, e_{s1}x_1, \dots, e_{sq}x_q).$$

В этом случае система (2.14), (2.15) соответственно будут иметь вид

$$\frac{dx_s}{dt} = X_s^{(\mu)}(x_s) + X_{1s}^{(\mu)}(t, l_{s1}x_1, \dots, l_{sq}x_q) + \sum_{j=1}^{q} X_{sj}^{(\mu+\alpha)}(t, e_{s1}x_1, \dots, e_{sq}x_q) +$$

$$+\Delta_s(t), \tag{2.16}$$

$$\frac{dx_s}{dt} = X_s^{(\mu)}(y_s) + X_{1s}^{(\mu)}(t, l_{s1}y_1, \ldots, l_{sq}y_q) + \Delta_s(t), s = \overline{1, q}. \tag{2.17}$$

Исходя из вида правых частей системы (2.14) и структуры матриц $L, \bar{L}, E, \bar{E}$, следует, что все условия теоремы Каратеодори о существовании и единственности решения задачи Коши для систем (2.16), (2.17) выполнены. Таким образом, решениями систем (2.16), (2.17) является абсолютно непрерывные векторные функции.

Предположим, что справедливы неравенства

$$l_{s1}x_1, \ldots, l_{sq}x_q) \le \sum_{j=1}^{q} l_{sq}a_{1sj}\|x_j\|^{\mu},$$

$$X_{sj}^{(\mu+\alpha)}(t, e_{s1}x_1, \ldots, e_{sq}x_q) \le \sum_{j=1}^{q} e_{sq}b_{sj}\|x_j\|^{\mu+\alpha}$$

при $\|x_j\| \le r_j, \sqrt{\sum_{j=1}^{q} r_j^2} = r, s = \overline{1, q}$. Здесь a_{1sj} и b_{sj} – положительные вещественные числа, $s, j = \overline{1, q}$.

Пусть нулевое решение систем

$$\frac{dx_s}{dt} = X_s^{(\mu)}(x_s), s = \overline{1, q}, \tag{2.18}$$

асимптотически устойчиво. Следовательно, по теореме Зубова-Красовского для каждой системы (2.18) существует функция Ляпунова, удовлетворяющая условиям

$$\begin{array}{l} c_{1s}\|x_s\|^{m+1-\mu} \le V_s(x_s) \le c_{2s}\|x_s\|^{m+1-\mu}, \\ \|gradV_s(x_s)\| \le c_{3s}\|x_s\|^{m-\mu}, \\ \frac{dV_s}{dt}\Big|_{(62)} \le -c_{4s}\|x_s\|^{m} \end{array} \tag{2.19}$$

при $\|x_s\| \le r_s, \sqrt{\sum_{s=1}^{q} r_s^2} = r, s = \overline{1, q}$. Здесь m – достаточно большое четное вещественное положительное число, $c_{1s}, c_{2s}, c_{3s}, c_{4s}$ – постоянные положительные вещественные числа, $s = \overline{1, q}$.

Следует отметить, что для получения искомых оценок необходимо воспользоваться функцией Ляпунова

$$V(x) = \sum_{s=1}^{q} d_s V_s(x_s), d_s > 0.$$

Для систем общего вида с использованием метода векторных функций Ляпунова также получаются оценки погрешности линеаризации (см. доказательство [8, 9]).

Замечание 2.1. *Таким образом, в работах* [5], [6], [8-12] *и в данной работе развит метод построения оценок погрешностей линеаризации.*

Список литературы

1. Воронов А. А., *Введение в динамику сложных управляемых систем*, "Наука", М., 1985.

2. Зубов В. И., *Теория колебаний*, Высш. школа, М., 1979.

3. Зубов В. И., *Лекции по теории управления*, Лань, СПб., 2009.

4. Зубов В. И., *Устойчивость движения*, Высш. школа, М., 1973.

5. Щенников В. Н., "Об оценке погрешности линеаризации нелинейной дифференциальной системы в критическом случае", *ДУ*, **17**:3 (1981), 568-571.

6. Щенников В. Н., Щенникова Е. В., "Оценки погрещщности линеаризации относительно части и всех фазовых переменных", *ДУ*, **37**:1 (2001), 132-133.

7. Шильяк Д., *Децентрализованное управление сложными системами*, Мир, 1994.

8. Шестаков А. А., "О степенной асимптотике неавтономной однородной и квазиоднородной системы", *ДУ*, **11**:8 (1975), 1427-1436.

9. Щенников А. В., Щенников В. Н., "Коннективные оценки погрешности линеаризации существенно нелинейных систем", *Известия ВУЗов. Математика*, 2013, № 11, 51-63.

10. Щенникова Е. В., "Построение киннективных оценок погрешностей линеаризации многосвязных нелинейных систем", *Вестник С.-Петерб. ун-та*, 2007, Сер. 10, вып. 1, 76-83.

11. Щенников В. Н., Щенникова Е. В., "Построение верхних оценок решений нелинейных систем дифференциальных уравнений и оценки погрешностей линеаризации", *Труды СВМО*, **8**:1 (2006), 127-135.

12. Дружинина О. В., Щенников В. Н., Щенникова Е. В., "Построение оценки максималььотклонения решений нелинейной многосвязной системы и соответствующей системы первого приближения", *Труды X Международной Четаевской конференции «Аналитическая механика, устойчивость, управление» 12-16 июня, Казань, 2012 г.*, **1**, секция 1. Аналитическая механика, 143-153.

Estimates of error of linearization of the relative parts and all phase variables

© **A. V. Shchennikov[4], V. N. Shchennikov[5], E. V. Shchennikova[6]**

Abstract. This article is a complete statement of the material presented at the international conference dedicated to the 85th anniversary of VI Zubov. The paper developed a method of constructing estimates of error of linearization of nonlinear systems of differential equations, including critical cases.

Key Words: estimation of the error of linearization, asymptotic stability

[4] Applicant of the Department of fundamental informatics, Ogarev Mordovia State University, Saransk; du@math.mrsu.ru

[5] Professor of the Department of Applied Mathematics, Differential Equations and Theoretical Mechanics, Ogarev Mordovia State University, Saransk; du@math.mrsu.ru

[6] Associate Professor of the Department of fundamental informatics, Ogarev Mordovia State University, Saransk; du@math.mrsu.ru