УДК 517.9

Плотность вероятности как решение уравнения Фоккера-Планка в индуцированных шумом переходах.

© **С. Н. Нагорных**[1], **Д. С. Саблуков**[2]

Аннотация. В развитие теории индуцированных шумом переходов рассматриваются необходимые и достаточные условия существования плотности вероятности решения уравнения Фоккера-Планка по Ито в виде сингулярной обобщенной функции в окрестности точки бифуркации уравнения Ферхюльста и критические параметры.

Ключевые слова: плотность вероятности, критические параметры, уравнение Фоккера-Планка, уравнение Ферхюльста, индуцируемые шумом переходы

Известно [1], что плотность вероятности (ПВ) - решение уравнения Фоккера-Планка (УФП) в точке $x = 0$ теории индуцированных шумом переходов (ИШП) может иметь вид дельта-функции. В [2] доказано, что эта ПВ по Стратановичу имеет вид дельта-функции. В данной работе исследуется вид ПВ решения УФП по Ито и ищется критический параметр стохастического обыкновенного дифференциального уравнения Ферхюльста и эквивалентного ему УФП по Ито.

Уравнения Ферхюльста имеет вид:

$$\dot{x} = \lambda_0 x - x^2 \tag{1.1}$$

где: x - плотность, например $[0, \infty)$ и (1.1) - это приближение $\dot{x} = F(x, \lambda_0)$ связаное с симметрией. Аттрактором (1.1) является $x = \lambda_0$ с точкой бифуркации $\lambda_0 = 0, x = 0$.

Известна ПВ $P_S(x)$ решение УФП:

$$P_S(x) = N x^{\frac{2\lambda_0}{\sigma^2} - \nu} \exp(\frac{-2x}{\sigma^2}), \tag{1.2}$$

$\nu = 1$ по Стратановичу, $\nu = 2$ по Ито

где: $N = (\frac{2}{\sigma^2})^{\frac{2\lambda_0}{\sigma^2}} / \Gamma(\frac{2\lambda_0}{\sigma^2}), \Gamma(\frac{2\lambda_0}{\sigma^2})$ -гамма-функция, $x \in [0, \infty)$.

2. Теорема Хорстхемке-Саичева по Ито

Необходимо в $P_S(x)$ на $[o, \infty)$ выделить множитель - пробную функцию в виде:

$$\Phi(x) = e^{-\frac{2x}{\sigma^2}}, \Phi(x) \in D, \tag{2.1}$$

чтобы найти $a(x)$ - сингулярную обобщенную функцию (СОФ) с помощью функционала:

$$\lim_{\epsilon \to 0} \int_{-\infty}^{\infty} a_\epsilon^u(x) \Phi(x) dx, \tag{2.2}$$

где

[1] Доцент кафедры прикладной математики, Нижегородский государственный технический университет им. Р. Е. Алексеева, г. Нижний Новгород; algoritm@sandy.ru

[2] Студент, Нижегородский государственный технический университет им.Р. Е. Алексеева, г. Нижний Новгород; denis-sablukov@mail.ru

$$a_\epsilon^u(x) = \frac{(\epsilon/\lambda_0)^\epsilon}{\Gamma(\epsilon+1)}\epsilon x^{\epsilon-2}\chi(x) \tag{2.3}$$

есть другой сомножитель, который назовем фундаментальной последовательностью (ФП) обобщенной функции по Ито, $\epsilon = \frac{2\lambda_0}{\sigma^2}$ - параметр, $\chi(x)$-функция Хевисайда. Функция $\Phi(x)$ отвечает свойствам непрерывности, бесконечной дифференцируемости, симметрии [3]. С учетом симметрии представим:

$$\Phi(x) = \Phi(0) + x\Phi'(x_0), \tag{2.4}$$

где $x_o \in (0, x)$. Найдем (2.2), допустив финитность $\Phi(x)$, то есть $\Phi(x) \equiv 0$ как только $x > M$ и учтя ограниченность $\Phi'(x)$:

$$\lim_{\epsilon\to 0}\int_{-\infty}^{\infty} a_\epsilon^u(x)\Phi(x)dx = \Phi'(x_0) \tag{2.5}$$

По определению [3] $a_\epsilon^u(x)$ слабо сходится к $\delta'(x-x_0)$. Так как $P_S^u(x) = a_\epsilon^u(x)\Phi(x)$ есть решение УФП, то $\delta'(x-x_0)\Phi(x)$ при неотрицательных значениях на связном $[0,\infty)$ как нормированная функция тоже есть решение УФП по Ито. Применяя свойство произведения фунуции $\Phi(x)$ на СОФ получим:

$$P_S^u(x) = \delta'(x-x_0) + \frac{2}{\sigma^2}\delta(x-x_0) \tag{2.6}$$

Если $\epsilon \to 0$ при стремлении аттрактора (1.1) $\lambda_0 \to 0$, то второе слагаемое в (2.6), является ПВ из теоремы Хорстхемке-Саичева по Стратановичу [2] и входит в необходимое условие получения $a(x)$ по Ито. Очевидна линейность СОФ в (2.6) и принадлежность к решению при непосредственной подстановке в УФП.

Достаточным условием является выделение множителей ФП обобщенных функций по Ито $a_\epsilon^u(x) \sim (\epsilon-1)x^{\epsilon-2}$ и по Стратановичу $a_\epsilon^c(x) \sim x^{\epsilon-1}$ в $P_S(x)$ на $[0,\infty)$ для нахождения пробной функции $\Phi(x)$. Приведем определение обобщенных производных обобщенных функций и их непрерывности с помощью (2.2) [3]:

$$\int a'(x)\Phi(x)dx = -\int a(x)\Phi'(x)dx \tag{2.7}$$

так как нормальные производные есть

$$\Phi'(x) = -\frac{2}{\sigma^2}e^{-\frac{2x}{\sigma^2}}, a_\epsilon^u(x) = (a_\epsilon^c(x))' \tag{2.8}$$

определим первый функционал по Ито, а второй по Стратановичу в (2.7) и получим:

$$\frac{2}{\sigma^2}(\epsilon-1)\int a_\epsilon^u(x)\Phi(x)dx = \int a_\epsilon^c(x)\Phi(x)dx \tag{2.9}$$

Вычисление $\lim_{\epsilon\to 0}$ от (2.9) дает:

$$\frac{\sigma^2}{2}\Phi'(x) + \Phi(0) = 0 \tag{2.10}$$

Выражение (2.10) соответствует функции $\Phi(x)$ (2.1) при $x = \frac{\sigma^2}{2}$, типа $\Phi(x) = 1$, дружественного $\Phi(x) \in D$ [3]. Действительно, финитность для таких функций обычно устанавливается при $M = 3\frac{\sigma^2}{2}$. Непрерывность и симметрия сдвигов $\Phi(x)$ выражается равенством:

$$0 = \Phi(0) + \frac{\sigma^2}{2}\Phi'(x_0) = (\delta, \Phi(x) + \frac{\sigma^2}{2}\Phi'(x + x_0)) = (\frac{2}{\sigma^2}\delta(x) + \delta'(x - x_0), \Phi(x)), \qquad (2.11)$$

где круглые скобки обозначают функционал. Следовательно функция $\Phi(x)$ (2.10) дает верные значения. Так как $\epsilon \to 0$ только при $\frac{\sigma^2}{2} \to \infty$, то слагаемое $\Phi(0)$ в (2.10) отвечающее СОФ $\frac{2}{\sigma^2}\delta(x)$ зануляется. Дифференцируемость $\Phi(x)$ следует из применения (2.4) при вычислении $\lim_{\epsilon\to 0}$ от (2.9) и из величины окрестности $x = 0$ $\sim 3\epsilon$ в соответствии с Леммой 1 раздела: "пространство пробных функций D "[3]. Относительная погрешность отклонения координаты x_0 от координаты СОФ есть $\frac{2x_0}{\sigma^2}$ и стремится к 0 при $\frac{\sigma^2}{2} \to \infty$ для аттрактора (1.1) $x = \lambda_0$. Следовательно функция (2.10) является пробной. Тогда получаем $P_S(x) = \delta'(x - x_0)$ при $\delta'(x - x_0) \geq 0$ на связном $[0, \infty)$ как нормированную функцию, непосредственно удовлетворяющую УФП. Сформулируем теорему: Для существования и пересечения стационарного решения УФП $P_S(x)$ в окрестности точки $x = 0$ со стационарным решением уравнения Ферхюльста в окрестности точки $x = 0, \lambda_0 = 0$ необходима при $\epsilon \to 0$ ПВ вида $\delta'(x - x_0) + \frac{2}{\sigma^2}\delta(x - x_0)$ и достаточна ПВ вида $\delta'(x - x_0)$ при $\delta'(x - x_0) \geq 0$ на связном интервале.

Следствие 2.1. *Если в небходимых условиях $\epsilon \to 0$ только при $\frac{\sigma^2}{2} \to \infty$ и заданном аттракторе λ_0, то ПВ (2.6) принимает вид $P_S(x) = \delta'(x - x_0)$, реализуемый также в достаточных условиях.*

Следствие 2.2. *В необходимых условиях относительная погрешность отклонения x_0 от точки бифуркации $x = 0, \lambda_0 = 0$ есть $\frac{2x_0}{\sigma^2}$ и может быть сопоставлена с числом 3ϵ. Откуда имеем $x_0 \sim 3\lambda_0$ и $x_0 \to 0$ при $\lambda_0 \to 0 (\epsilon \to 0)$, то есть при стремлении аттрактора $\lambda = \lambda_0$ к нулю.*

Следствие 2.3. *Получение в необходимых условиях ПВ вида $\delta(x - x_0) + \delta'(x - x_0)$ является аналогом граничного условия для стахостического волнового уравнения* [4]. *Граничное условие представляет полную систему в граничном нормированном пространстве W обобщенных функций.*

Значение критического параметра $\epsilon = \frac{2\lambda_0}{\sigma^2} \to 0$, при котором ПВ $P_S(x)$ по Ито имеет непрерывные обобщенные производные, отличается от значения $\frac{2\lambda_0}{\sigma^2} = 1$ [1]. Однако при этом отличаются и условия рассмотрения ПВ.

Теорема Хорстхемке-Саичева по Ито частично включает в себя результаты теоремы Хорстхемке-Саичева по Стратановичу [2] и наряду с доказанной эквивалентностью УФП стахостическому дифференциальному уравнению по Ито в работе [1] может образовать более последовательную теорию ИШП.

Список литературы

1. Хорстхемке В., Лефевр Р., *Индуцированные шумом переходы*, Мир., 1987, 397 с.

2. Нагорных С. Н., “Критические параметры плотности вероятности в индуцированных шумом переходах”, *Журн. СВМО.*, **16**:4 (2014).

3. Владимиров В. С., *Уравнения математической физики*, М. Наука, 1981, 512 с.

4. Розанов Ю. А., *Случайные поля и стохастические уравнения с частными производными.*, М. Наука, 1995, 256 с.

Probability density as the solution of the Fokker-Plank equation in Noise-Induced Transitions.

© S. N. Nagornykh[3], D. S. Sablukov[4]

Abstract. Under development of the noise-induced transitions theory all necessary and sufficient conditions of Fokker-Plank equations solutions are considered according to Ito as singular united functions near the bifurcation point of Verhulst equation in connection of Liouville theorem. The critical parameters of probability density are estimated.

Key Words: probability density, critical parameters, Fokker-Plank equations, Verhulst equation

[3] Docent of the applied mathematics chair, Nizhniy Novgorod State Technical University, Nizhniy Novgorod; algoritm@sandy.ru

[4] Student, Nizhniy Novgorod State Technical University, Nizhniy Novgorod; denis-sablukov@mail.ru