

ПРИКЛАДНАЯ МАТЕМАТИКА И МЕХАНИКА

УДК 519.63

Об использовании WENO-ограничителя в неявной схеме для метода Галеркина с разрывными базисными функциями© Р. В. Жалнин¹, А. В. Максимкин², В. Ф. Масыгин³, А. И. Пантюшин⁴,
Е. Е. Пескова⁵

Аннотация. В работе развивается методика на основе неявной схемы для разрывного метода Галеркина. Предложено использование WENO-ограничителя для подавления осцилляций решения на разрывах. На примере решения задачи «blast waves» показана состоятельность предложенной методики.

Ключевые слова: разрывный метод Галеркина, неявная схема, уравнения газовой динамики, WENO-ограничитель

1. Введение

Данная работа является продолжением работ [1, 2], где исследовалась неявная методика для разрывного метода Галеркина, основанная на представлении системы сеточных уравнений в «дельта-форме». В данной работе исследуется методика, основанная на решении нелинейной системы сеточных уравнений методом Ньютона. Для подавления нефизических осцилляций решения вблизи разрывов предлагается использование WENO-ограничителя [3].

2. Неявная схема для разрывного метода Галеркина

Рассмотрим одномерную систему уравнений газовой динамики в переменных Эйлера

$$\frac{\partial U}{\partial t} + \frac{\partial F(U)}{\partial x} = 0, \quad (2.1)$$

¹ Заведующий кафедрой прикладной математики, дифференциальных уравнений и теоретической механики, Мордовский государственный университет имени Н. П. Огарева, г. Саранск; zhrv@mrsu.ru.

² Аспирант кафедры прикладной математики, дифференциальных уравнений и теоретической механики, Мордовский государственный университет имени Н. П. Огарева, г. Саранск; maksimkinav@apppmath.mrsu.ru.

³ Преподаватель кафедры прикладной математики, дифференциальных уравнений и теоретической механики, Мордовский государственный университет имени Н. П. Огарева, г. Саранск; masyaginvf@apppmath.mrsu.ru.

⁴ Аспирант кафедры прикладной математики, дифференциальных уравнений и теоретической механики, Мордовский государственный университет имени Н. П. Огарева, г. Саранск; pantyushinai@apppmath.mrsu.ru.

⁵ Ассистент кафедры прикладной математики, дифференциальных уравнений и теоретической механики, Мордовский государственный университет имени Н. П. Огарева, г. Саранск; peskovaee@apppmath.mrsu.ru.

где

$$U = \begin{pmatrix} \rho \\ \rho u \\ \rho E \end{pmatrix}, \quad F(U) = \begin{pmatrix} \rho u \\ \rho u^2 + p \\ (\rho E + p)u \end{pmatrix},$$

$$E = \epsilon + \frac{u^2}{2}, \quad p = \rho\epsilon(\gamma - 1).$$

Здесь ρ – плотность, p – давление, u – скорость, ϵ – удельная внутренняя энергия, γ – показатель адиабаты. Система (2.1) рассматривается вместе с соответствующими начальными и граничными условиями.

Рассмотрим неявную схему для метода Галеркина с разрывными базисными функциями [4], предложенную в работе [1]:

$$M \frac{U^{n+1} - U^n}{\tau} - L(U^{n+1}) = 0, \quad (2.2)$$

где U^n – вектор, составленный из коэффициентов разложения вектора U по базису пространства полиномов, в котором ищется решение [1].

Полученная нелинейная система (2.2) решается методом Ньютона. При этом на каждом шаге метода Ньютона необходимо решать систему линейных алгебраических уравнений

$$\left(\frac{1}{\tau} M - \left(\frac{\partial L}{\partial U} \right)_s \right) (\Delta U)_s = - \left(M \frac{(U^{n+1})_s - U^n}{\tau} - L((U^{n+1})_s) \right), \quad s = 0, 1, \dots \quad (2.3)$$

относительно $(\Delta U)_s = (U^{n+1})_{s+1} - (U^{n+1})_s$, где $(U^{n+1})_0 = U^n$. Для решения системы (2.3) использовался решатель GMRES из библиотеки HYPRE [5, 6].

Обозначим решение системы (2.2), полученное в результате ньютоновских итераций, как U^* . Вследствие того, что построенная схема обладает порядком точности выше первого, необходимо использовать ограничители для подавления осцилляций решения на разрывах. Поэтому значение U^{n+1} на новом временном слое находится следующим образом:

$$U^{n+1} = \Lambda \Pi_h U^*, \quad (2.4)$$

где $\Lambda \Pi_h$ – ограничитель.

3. WENO-ограничитель

В качестве ограничителя будем использовать WENO-ограничитель, описанный в работе [3]. Для его применения необходимо выделить так называемые «плохие» ячейки. Процедура их определения следующая.

Вычислим среднее значение решения в каждой ячейке сетки

$$\bar{u}_i = \frac{1}{\Delta x} \int_{I_i} u dx \quad (3.1)$$

и введем в рассмотрение переменные

$$\tilde{u}_i = u_{i+1/2}^- - \bar{u}_i, \quad \tilde{u}_i = \bar{u}_i - u_{i+1/2}^+. \quad (3.2)$$

Затем, обозначив

$$\Delta_+ \bar{u}_i = \bar{u}_{i+1} - \bar{u}_i, \quad \Delta_- \bar{u}_i = \bar{u}_i - \bar{u}_{i-1}, \quad (3.3)$$

вычислим

$$\tilde{u}_i^m = \minmod(\tilde{u}_i, \Delta_+ \bar{u}_i, \Delta_- \bar{u}_i), \quad \tilde{\tilde{u}}_i^m = \minmod(\tilde{\tilde{u}}_i, \Delta_+ \bar{u}_i, \Delta_- \bar{u}_i), \quad (3.4)$$

где

$$\minmod(a_1, a_2, a_3) = \begin{cases} s \min(a_1, a_2, a_3), & \text{если } s = \text{sign}(a_1) = \text{sign}(a_2) = \text{sign}(a_3); \\ 0, & \text{иначе.} \end{cases} \quad (3.5)$$

Далее, если $\tilde{u}_i^m \neq \tilde{u}_i$ или $\tilde{\tilde{u}}_i^m \neq \tilde{\tilde{u}}_i$, то ячейка с номером i помечается, как «плохая».

После определения ячеек, требующих применения ограничителя, выполняется следующая процедура [3].

Предположим, что для ячейки I_i требуется применение ограничителя. Рассмотрим полиномы $p_{i-1}(x)$, $p_i(x)$, $p_{i+1}(x)$, определяющие решение уравнения (2.1) в ячейках I_{i-1} , I_i , I_{i+1} , соответственно. Положим

$$\bar{p}_{i-1} = \frac{1}{\Delta x_i} \int_{I_i} p_{i-1}(x) dx, \quad \bar{p}_i = \frac{1}{\Delta x_i} \int_{I_i} p_i(x) dx, \quad \bar{p}_{i+1} = \frac{1}{\Delta x_i} \int_{I_i} p_{i+1}(x) dx. \quad (3.6)$$

И в качестве нового полинома в ячейке I_i возьмем полином

$$p_i^N(x) = \Lambda \Pi_h p_i(x) = \omega_0 \check{p}_{i-1} + \omega_1 p_i + \omega_2 \check{p}_{i+1}, \quad (3.7)$$

где

$$\check{p}_{i-1} = p_{i-1}(x) - \bar{p}_{i-1} + \bar{p}_i, \quad \check{p}_{i+1} = p_{i+1}(x) - \bar{p}_{i+1} + \bar{p}_i, \quad (3.8)$$

а весовые коэффициенты удовлетворяют условию $\omega_0 + \omega_1 + \omega_2 = 1$.

Данные весовые коэффициенты вычисляются согласно классической схеме WENO [7, 8]:

$$\omega_j = \frac{\alpha_j}{\sum_{k=0}^2 \alpha_k}, \quad j = 0, 1, 2, \quad (3.9)$$

где

$$\alpha_k = \frac{\gamma_k}{(10^{-6} + \beta_k)^2}, \quad k = 0, 1, 2. \quad (3.10)$$

Аналогично работам [7, 8] β_k будем называть индикатором гладкости и вычислять следующим образом:

$$\beta_k = \sum_{l=0}^2 \int_{x_{i-1/2}}^{x_{i+1/2}} \Delta x_{i-1+k}^{2l-1} \left(\frac{\partial^l p_k(x)}{\partial x^l} \right)^2 dx. \quad (3.11)$$

Возникает вопрос выбора коэффициентов γ_0 , γ_1 , γ_2 . Исходя из описанной выше схемы на них не накладывается никаких дополнительных ограничений. В работе [3] предлагается использовать следующие значения:

$$\gamma_0 = 0.001, \quad \gamma_1 = 0.998, \quad \gamma_2 = 0.001, \quad (3.12)$$

гарантирующие сохранение исходного порядка точности и отсутствие осцилляций на разрывах. В данной работе использованы такие же значения.

4. Задача о взаимодействии двух ударных волн (blast waves)

В качестве тестовой задачи была выбрана задача о взаимодействии двух ударных волн с начальными данными [9]:

$$U(x, 0) = \begin{cases} U_L, & 0 \leq x < 0.1, \\ U_M, & 0.1 \leq x < 0.9, \\ U_R, & 0.9 \leq x \leq 1, \end{cases} \quad (4.1)$$

где

$$\begin{aligned} \rho_L &= \rho_M = \rho_R = 1, \\ v_L &= v_M = v_R = 0, \\ p_L &= 10^3, p_M = 10^{-2}, p_R = 10^2, \end{aligned}$$

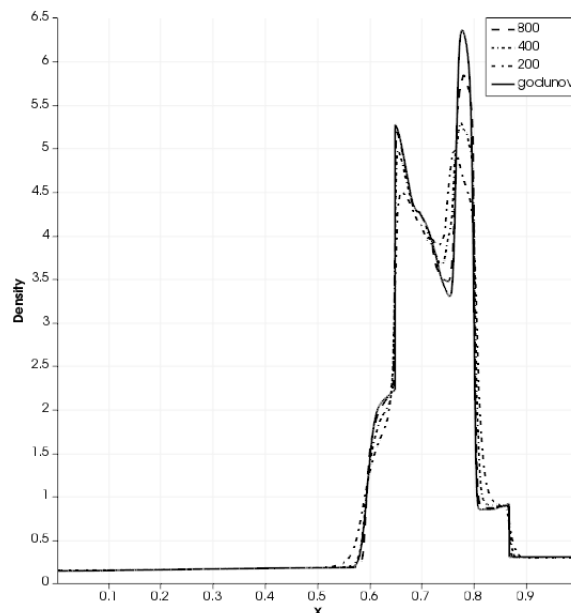
а на концах отрезка $[0,1]$ задавались граничные условия отражения.

На рисунке 4.1 представлены результаты расчетов на сетках с числом ячеек 200, 400, 800 (численные потоки вычислялись как точное решение задачи Римана на границе между ячейками [10]). Для сравнения, в качестве точного решения рассматривались результаты расчета методом Годунова на сетке с числом ячеек 20000. В таблице 1 представлены погрешности и порядки сходимости. Погрешность решения оценивалась в следующей норме:

$$\|U_h - U_T\|_{L_1} = \int_a^b |U_h - U_T| dx,$$

где U_h – вычисленные значения сеточной функции, U_T – точные значения искомого решения.

Как видно из графика и таблицы, при измельчении сетки наблюдается сходимость численного решения к точному, порядок сходимости выше первого.



Р и с у н о к 4.1

На рисунке 4.2 представлены графики плотности полученные при расчетах с разными способами вычисления численных потоков (точное решение задачи Римана, потоки Куранта–Изахсона–Рисса, потоки Лакса-Фридрихса).

Таблица 1: Порядок сходимости (N – количество ячеек сетки)

N	$\ \cdot\ _{L_1}$	Order, $\ \cdot\ _{L_1}$
100	0.2882971	–
200	0.2130803	0.4362
400	0.1173680	0.8604
800	0.05131574	1.1936



Р и с у н о к 4.2

Во всех расчетах для решателя GMRES размерность пространства Крылова задавалась равной 20.

Полученные результаты позволяют сделать вывод, что предложенная неявная схема с использованием WENO-ограничителя состоятельна и демонстрирует хорошую точность.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект 14-01-31260 мол_а).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Р. В. Жалнин, А. В. Максимкин, В. Ф. Масыгин, А. И. Пантюшин, Е. Е. Пескова, В. Д. Сальников, В. Ф. Тишкин, “Исследование порядка точности неявной схемы для метода Галеркина с разрывными базисными функциями для решения задач газовой динамики”, *Журнал Средневолжского математического общества*, **17:1** (2015), 48 – 54.
2. Р. В. Жалнин, В. Ф. Масыгин, В. Д. Сальников, Е. Е. Пескова, “Решение задач газовой динамики с использованием неявной схемы для метода Галеркина с разрывными базисными функциями”, *Аналитические и численные методы моделирования естественно-научных и социальных проблем: сб. ст. IX Междунар. науч.-техн. конф.* (Россия, г. Пенза, 28–31 октября 2014 г.), Изд-во ПГУ, Пенза, 2014, 100 – 104.
3. X. Zhong, C.-W. Shu, “A simple weighted essentially nonoscillatory limiter for Runge-Kutta discontinuous Galerkin methods”, *Journal of Computational Physics*, **232** (2013), 397 – 415.
4. B. Cockburn, “An Introduction to the Discontinuous Galerkin Method for Convection - Dominated Problems, Advanced Numerical Approximation of Nonlinear Hyperbolic Equations”, *Lecture Notes in Mathematics*, **1697** (1998), 151 – 268.
5. E. Chow, A. J. Cleary, R. D. Falgout, “Design of the hypre Preconditioner Library”, *Proc. of the SIAM Workshop on Object Oriented Methods for Inter-operable Scientific and Engineering Computing* (Workshop held at the IBM T.J. Watson Research Center, Yorktown Heights, NY, October 21-23, 1998), SIAM, Philadelphia, PA, 1998.
6. R. D. Falgout, J. E. Jones, U. M. Yang, “The Design and Implementation of hypre, a Library of Parallel High Performance Preconditioners”, *Numerical Solution of Partial Differential Equations on Parallel Computers*, A.M. Bruaset and A. Tveito, eds. (UCRL-JRNL-205459), Springer-Verlag, 2006, 267 – 294.
7. G. Jiang, C.-W. Shu, “Efficient implementation of weighted ENO schemes.”, *Journal of Computational Physics*, **126** (1995), 202 – 228.
8. Р. В. Жалнин, Н. В. Змитренко, М. Е. Ладонкина, В. Ф. Тишкин, “Численное моделирование развития неустойчивости Рихтмайера–Мешкова с использованием схем высокого порядка точности”, *Матем. моделирование*, **19:10** (2007), 61 – 66.
9. P. Woodward, P. Colella, “The numerical simulation of two-dimensional fluid flow with strong shocks”, *Journal of Computational Physics*, **5** (1984), 836 – 848.
10. С. К. Годунов, “Разностный метод численного расчета разрывных решений уравнений гидродинамики”, *Матем. сб.*, **47(89):3** (1959), 271 – 306.

About the use of WENO-limiter in the implicit scheme for the Discontinuous Galerkin method

© R. V. Zhalnin⁶, A. V. Maksimkin⁷, V. F. Masyagin⁸, A. I. Pantyushin⁹,
E. E. Peskova¹⁰

Abstract. The paper studies a technique based on the implicit scheme for discontinuous Galerkin method. WENO-limiter used to suppress oscillations on discontinuities. The «blast waves» problem solved for showing the viability of the proposed method.

Key Words: DG, implicit schemes, gas dynamic equations, WENO-limiter

⁶ Head of of Applied Mathematics, Differential Equations and Theoretical Mechanics Department, Ogarev Mordovian State University, Saransk; zhrv@mrsu.ru.

⁷ Postgraduate Student of Applied Mathematics, Differential Equations and Theoretical Mechanics Department, Ogarev Mordovian State University, Saransk; maksimkinav@appmath.mrsu.ru.

⁸ Assistant Lecturer of Applied Mathematics, Differential Equations and Theoretical Mechanics Department, Ogarev Mordovian State University, Saransk; masyaginvf@appmath.mrsu.ru.

⁹ Postgraduate Student of Applied Mathematics, Differential Equations and Theoretical Mechanics Department, Ogarev Mordovian State University, Saransk; pantyushinai@appmath.mrsu.ru.

¹⁰ Assistant Lecturer of Applied Mathematics, Differential Equations and Theoretical Mechanics Department, Ogarev Mordovian State University, Saransk; peskovaee@appmath.mrsu.ru.