УДК 517.9

Анализ устойчивости математической модели Лукаса по части переменных

© **Т. Ф. Мамедова[1], Д. К. Егорова[2], Е. В. Десяев[3]**

Аннотация. В работе, для анализа устойчивости системы дифференциальных уравнений, используется метод Е. В. Воскресенского, основанный на методе сравнения. Предложенный подход состоит в следующем: для исследуемых уравнений строятся уравнения сравнения, поведение решений которых известно. Затем через эталонные функции сравниваются решения этих уравнений.

Ключевые слова: нелинейные системы обыкновенных дифференциальных уравнений, метод сравнения, модель Лукаса

1. Исследование устойчивости нелинейных систем обыкновенных дифференциальных уравнений по части переменных на основе метода сравнения

Рассмотрим две системы обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\frac{dy}{dt} = A(t)y \tag{1.1}$$

и

$$\frac{dx}{dt} = A(t)x + f(t,x) \tag{1.2}$$

где A: $[\mathrm{T},\ +\infty\,) \to Hom(R^n, R^n)$ – непрерывное отображение.

Выясним: какими асимптотическими формулами связаны решения этих двух дифференциальных уравнений?

Пусть $N = \{1, 2, ..., n\ \}$ и $N_0 \subseteq M \subseteq M_0 \subseteq \overline{M_0} \subseteq N$,

$$R_0 = \{x : x \in R^n, x = colon(x_1\ , x_2, ..., x_n), x_j = 0, j \notin \overline{M_0}\}.$$

Предположим так же, что

$$|f_j(t, x_1, x_2, ..., x_n)| \leq \lambda_j(t, |x_{j_1}|\,, ..., |x_{j_q}|),$$

$$\forall j \in N, f(t,x) = f(t, x_1, ..., x_n) = colon(f_1(t, x_1, ..., x_n), ..., f_n(t, x_1, ..., x_n)),$$

здесь

$$\lambda_j(t, r_1, ..., r_i, ..., r_q) \leq \lambda_j(t, \overline{r_1}, ..., \overline{r_i}, ..., \overline{r_q}), r_i \leq \overline{r_i}, i = \overline{1, q}$$

[1] Профессор кафедры прикладной математики, дифференциальных уравнений и теоретической механики ФГБОУ ВПО «Мордовский государственный университет им. Н.П.Огарёва», г. Саранск; mamedovatf@yandex.ru.

[2] Доцент кафедры прикладной математики, дифференциальных уравнений и теоретической механики ФГБОУ ВПО «Мордовский государственный университет им. Н.П.Огарёва», г. Саранск; egorovadk@mail.ru.

[3] Доцент кафедры прикладной математики, дифференциальных уравнений и теоретической механики ФГБОУ ВПО «Мордовский государственный университет им. Н.П.Огарёва», г. Саранск; desyaev@rambler.ru.

при всех $t \in [T, +\infty)$.

Фундаментальная матрица $Y(t) = (y_{ij}(t)), i, j \in \overline{1, n}$ уравнения (1.1) будем считать нормирована в точке $t_0 \in [T, +\infty)$ и $Y^{-1}(t) = (y^{ji}(t))$.
Пусть непрерывные функции:

$$\mu_i : [T, +\infty) \to R^1_+, m_i : [T, +\infty) \to R^1_+$$

удовлетворяют неравенствам:

$$\mu_i(t) \geq \max_{j \in N_0} |y_{ij}(t)|, m_i(t) \geq \max\{\max_{j \in \overline{M_0}} |y_{ij}(t)|, \mu_i(t)\},$$

где $T \leq t < +\infty, i \in M_0$.
Таким образом, функции $\mu_i(t)$ будем называть эталонными функциями сравнения.
Будем считать $i_1 = 1, i_2 = 2, ..., i_q = q$.

Пусть при любом $c \geq 0$ функции

$$P_i = c \sum_{k \in \overline{M_0}} |y_{ik}(t)| + \int_{t_0}^{t} \left| \sum_{j \in N, k \in B} y_{ik}(t) y^{jk}(s) \right| \lambda_j(s, cm(s)) ds + \int_{t}^{+\infty} \left| \sum_{j \in N, k \in M} y_{ik}(t) y^{jk}(s) \right| \lambda_j(s, cm(s)) ds,$$

где $i = \overline{q+1, n}$ существуют при всех $t \geq t_0 \geq T, B = N \backslash M$.

Рассмотрим множество

$$\Omega = \{\varphi : \varphi \in C^{(p)}([T, +\infty), R^n), |\varphi_i(t)| \leq c_1 m_i(t), i = \overline{1, q}, |\varphi_i(t)| \leq c_2 p_i(t), i = \overline{q+1, n},$$
$$c_1, c_2 \in R^+_1, p \geq 0\}.$$

Здесь c_1, c_2 – фиксированные положительные числа.
Допустим,

$$I_i(t, \varphi) = \int_{t_0}^{t} \sum_{j \in N, k \in B} y_{ik}(t) y^{jk}(s) f_j(s, \varphi(s)) ds - \int_{t}^{+\infty} \sum_{j \in N, k \in M} y_{ik}(t) y^{jk}(s) f_j(s, \varphi(s)) ds, B = N \backslash M \tag{1.3}$$

существует при любых $i \in N, c \in R^1_+, \varphi \in \Omega$. Кроме того, несобственные интегралы в (1.3) сходятся равномерно по t при $t \in [T, +\infty)$. [1]

Теорема 1.1. [2]. *Пусть для уравнений* (1.1) *и* (1.2) *выполняется условие* (1.3). *Тогда при достаточно большом* t_0 *для решения* $y(t : t_0 y_0), y_0 \in R_0, R_0 = \{x : x \in R^n\}$ *существует решение* $x(t : t_0, x_0), x_0 \in R_0$, *для которого следует выполнение асимптотического равенства:*

$$x_i(t) = \sum_{j \in \overline{M_0}} y_{ij}(t) \gamma_j + o(\mu_i(t)) t \to +\infty, \forall i \in M_0. \tag{1.4}$$

Теорема 1.2. [2]. *Пусть при условиях* (1.3) *для каждого решения уравнения* (1.2) $x(t : t_0, x_0), x_0 \in R_0$ *справедливо асимптотическое равенство:*

$$x_i(t : t_0, x_0) = o(m_i(t)),$$

где $t \to +\infty$ *и* $\forall\ i \in M_0$. *Следовательно, для каждого решения* $x(t : t_0, x_0), x_0 \in R_0$ (1.2) *существует решение* $y(t : t_0, y_0), y_0 \in R_0$ (1.1) *такое, что справедливо асимптотическое равенство* (1.4).

Т е о р е м а 1.3. [2]. *Если выполняются условия теоремы 2 и условие* (1.3) *имеет место равномерно относительно* $0 < c \le c_0$ *и* $\frac{I_i(t,c)}{\mu_i(t)} \to 0$, $\mu_i(t) \le k$, $k > 0$, $\forall i \in M_0$ *при* $A \to 0$, *то, если уравнение* (1.1) *устойчиво по части переменных* $\forall i \in M_0$, *то тривиальное решение уравнения* (1.2) *также устойчиво по части переменных и, если уравнение* (1.1) *неустойчиво по части переменных* $i, i \in M_0$, *то тривиальное решение уравнения* (1.2) *также неустойчиво по части переменных.*

2. Применение метода Е.В. Воскресенского к анализу устойчивости математической модели Лукаса по части переменных

Рассмотрим применение данного метода анализа устойчивости систем дифференциальных уравнений к математической модели Лукаса.

Математическая модель экономического роста Лукаса имеет вид [3]:

$$\begin{array}{l} \frac{d}{dt}K(t) = A(t)k(t)^{\beta}h(t)^{1-\beta+\gamma}u(t)^{1-\beta+\gamma} - (\mu_K + n)k(t) - c(t) \\ \frac{d}{dt}h(t) = \delta(1-u(t))h(t) - \mu_h h(t) \\ \frac{d}{dt}c(t) = \frac{c(t)}{\sigma}[\beta A(t)k(t)^{\beta-1}h(t)^{1-\beta+\gamma}u(t)^{1-\beta+\gamma} - (\rho+\mu_K)] \\ \frac{d}{dt}u(t) = \frac{1}{\beta-\gamma}u(t)\left\{P + \delta Q[1-u(t)] - \beta\frac{c(t)}{k(t)}\right\}. \end{array} \qquad (2.1)$$

где $A(t)$ – функция, описывающая технологический прогресс, $k(t)$ – физический капитал, β – доля физического капитала, $h(t)$ – уровень человеческого капитала, γ – положительный параметр, μ_K – норма амортизации физического капитала, n – темп изменения численности рабочей силы, $c(t)$ – удельное потребление, δ – положительный технологический параметр, $u(t)$ – доля времени индивида, посвященная производственной деятельности, μ_h – норма амортизации человеческого капитала, σ – постоянная мера относительной несклонности к риску, ρ – дисконтирующий фактор, $P = \alpha + (1-\beta)(n+\mu_K) + \delta p - \mu_h(1-\beta+\gamma)$ и $Q = (q-p) - (\beta-\gamma)$.
Для исследования тривиального решения (1.2) на устойчивость преобразуем (2.1).
Определим переменные:

$$q(t) \equiv \frac{c(t)}{k(t)}, x(t) \equiv \frac{k(t)}{A(t)^{\frac{1}{1-\beta}}h(t)^{\frac{1-\beta+\gamma}{1-\beta}}} = k(t)A(t)^{\frac{1}{\beta-1}}h(t)^{\frac{1-\beta+\gamma}{\beta-1}}.$$

Вычисляя логарифмическую производную и подставляя темпы роста функций: $k(t), h(t), c(t)$, а также используя (2.1), получим:

$$\frac{1}{x(t)}\frac{dx(t)}{dt} = x(t)^{\beta-1}u(t)^{1-\beta+\gamma} - \psi[1-u(t)] - q(t) - M$$

$$\frac{1}{q(t)}\frac{dq(t)}{dt} = \phi x(t)^{\beta-1}u(t)^{1-\beta+\gamma} - q(t) - \xi,$$

где

$$\psi = -\delta\frac{1-\beta+\gamma}{1-\beta}, \xi = \frac{\rho}{\sigma} - n - \mu_K(1-\frac{1}{\sigma}), M = \frac{\alpha}{1-\beta} + n + \mu_K - \mu_h\frac{1-\beta+\gamma}{1-\beta}, \phi = \frac{\beta}{\sigma} - 1.$$

Таким образом, получим, что модель Лукаса (2.1) примет вид:

$$\begin{array}{l} \frac{dx(t)}{dt} = x(t)^{\beta}u(t)^{1-\beta+\gamma} + \psi[1-u(t)]x(t) - q(t)x(t) - Mx(t) \\ \frac{dq(t)}{dt} = \phi x(t)^{\beta-1}u(t)^{1-\beta+\gamma}q(t) - [q(t)]^2 - \xi q(t) \\ \frac{du(t)}{dt} = \frac{1}{\beta-\gamma}u(t)\{P + \delta Q[1-u(t)] - \beta q(t)\} \\ \frac{dc(t)}{dt} = \frac{1}{\sigma}c(t)[\beta x(t)^{\beta-1}u(t)^{1-\beta+\gamma} - (\rho+\mu_K)] \end{array} \tag{2.2}$$

где

$$\psi = -\delta\frac{1-\beta+\gamma}{1-\beta}, \xi = \frac{\rho}{\sigma} - n - \mu_K(1-\frac{1}{\sigma}), M = \frac{\alpha}{1-\beta} + n + \mu_K - \mu_h\frac{1-\beta+\gamma}{1-\beta},$$
$$\phi = \frac{\beta}{\sigma} - 1, P = \alpha + (1-\beta)(n+\mu_K) + \delta p - \mu_h(1-\beta+\gamma), Q = (q-p) - (\beta-\gamma).$$

Запишем однородную систему обыкновенную дифференциальных уравнений, соответствующую системе (2.2):

$$\begin{array}{l} \frac{dx(t)}{dt} = (\psi - M)x(t) \\ \frac{dq(t)}{dt} = -\xi q(t) \\ \frac{du(t)}{dt} = \left(\frac{P}{\beta-\gamma} + \frac{\delta Q}{\beta-\gamma}\right)u(t) \\ \frac{dc(t)}{dt} = -\frac{\rho+\mu_K}{\sigma}c(t) \end{array} \tag{2.3}$$

Фундаментальная матрица решений системы и соответствующая ей обратная имеют вид:

$$Y(t) = \begin{pmatrix} e^{(\psi-M)t} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & e^{-\xi t} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & e^{\frac{P+\delta Q}{\beta-\gamma}t} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & e^{-\frac{(\rho+\mu_K)}{\sigma}t} \end{pmatrix}$$

$$Y^{-1}(s) = \begin{pmatrix} e^{-(\psi-M)s} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & e^{\xi s} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & e^{-\left(\frac{P+\delta Q}{\beta-\gamma}\right)s} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & e^{\frac{(\rho+\mu_K)}{\sigma}s} \end{pmatrix}$$

Здесь имеем: $N = \{1,2,3,4\}, M_0 = \{1,2,3,4\}, B = N \backslash M_0 = \{\}$.

Сделаем оценку нелинейной части системы дифференциальных уравнений (2.2). Имеем:

$$\|f_1(t,\overline{x})\| = \left\|x(t)^{\beta}u(t)^{1-\beta+\gamma} - \psi x(t)u(t) - x(t)q(t)\right\| =$$
$$= \left\|x(t)[k(t)^{\beta-1}A(t)h(t)^{1-\beta+\gamma}u(t)^{1-\beta+\gamma} - \psi u(t) - -\frac{c(t)}{k(t)}]\right\|.$$

Отметим, что для развитых экономик функция $A(t) \geq 1$ на рассматриваемом промежутке времени. Примем это допущение.

Кроме того, $c(t)$ – удельное потребление – положительная величина, $u(t)$ – доля времени индивида, посвященная производственной деятельности – величина, находящаяся в промежутке $[0,1]$.

Поэтому, если $\psi \geq 0$ и $1-\beta+\gamma \geq 0$, то справедливо следующее неравенство:

$$\|f_1(t,\overline{x})\| \leq \left\|x(t)k(t)^{\beta-1}h(t)^{1-\beta+\gamma}\right\|.$$

Дальнейшие рассуждения справедливы для таких функций человеческого и физического капитала, которые могут быть представлены в виде показательных функций: ae^{bt}, где $a, b = const$.

Предположим, что $a_1 e^{b_1 t}$ – функция, описывающая физический капитал, $a_2 e^{b_2 t}$ – функция, описывающая человеческий капитал.

Имеем:

$$\|f_1(t,\overline{x})\| \leq \left\|x(t)k(t)^{\beta-1}h(t)^{1-\beta+\gamma}\right\| = \left\|x(t)a_1a_2e^{(b_1(\beta-1)+b_2(1-\beta+\gamma))t}\right\|.$$

Рассмотрим условия устойчивости модели по части переменных по методу Воскресенского:

По переменной $x(t)$ достаточно, чтобы:

$$b_1(\beta-1)+b_2(1-\beta+\gamma)<0.$$

Итак,

$$\|f_1(t,\overline{x})\| \leq \left\|x(t)a_1a_2e^{(b_1(\beta-1)+b_2(1-\beta+\gamma))t}\right\| = c_1\left\|x(t)e^{-c_2t}\right\| = c_1\left|x(t)\right|e^{-c_2t} = \lambda_1(t,|x|),$$

где

$$\begin{array}{l} c_1 = a_1a_2 = const, \\ c_2 = b_1(\beta-1)+b_2(1-\beta+\gamma) = const. \end{array}$$

Аналогично, рассмотрим нелинейные части остальных уравнений системы (2.2).

$$\|f_2(t,\overline{x})\| = \left\|q(t)[\phi k(t)^{\beta-1}A(t)h(t)^{1-\beta+\gamma}-\frac{c(t)}{k(t)}]\right\| \leq \phi c_1\left|q(t)\right|e^{-c_2t} = \lambda_2(t,|q|).$$

По переменной $q(t)$ достаточно, чтобы:

$$\begin{array}{l} 1-\beta+\gamma \geq 0, \\ b_1(\beta-1)+b_2(1-\beta+\gamma)<0. \end{array}$$

Аналогично,

$$\|f_3(t,\overline{x})\| \leq \lambda_3(t,|x_3|).$$

По переменной $u(t)$ достаточно, чтобы:

$$\frac{\beta}{\beta-\gamma} \leq 0.$$

$$\|f_4(t,\overline{x})\| \leq \frac{\beta}{\sigma}\left\|c(t)k(t)^{\beta-1}A(t)h(t)^{1-\beta+\gamma}u(t)^{1-\beta+\gamma}\right\| \leq \frac{\beta}{\sigma}c_1\left|c(t)\right|e^{-c_2(t)} = \lambda_4(t,|c|).$$

По переменной $c(t)$ достаточно, чтобы:

$$\begin{array}{l} b_1(\beta-1)+b_2(1-\beta+\gamma)<0, \\ 1-\beta+\gamma \geq 0 \Leftrightarrow \beta \leq 1+\gamma. \end{array}.$$

Исследуем сходимость интегралов (1.3):

$$I_1(t) = -\int_t^{+\infty} y_{11}(t)y^{11}(s)f_1(s,\varphi(s))ds,$$

$$I_2(t) = -\int_t^{+\infty} y_{22}(t)y^{22}(s)f_2(s,\varphi(s))ds$$

$$I_3(t) = -\int_t^{+\infty} y_{33}(t)y^{33}(s)f_3(s,\varphi(s))ds$$

$$I_4(t) = -\int_t^{+\infty} y_{44}(t)y^{44}(s)f_4(s,\varphi(s))ds.$$

Пусть выполняются следующие условия

$$\begin{array}{l} \psi - M < 0, (\psi - M + c_2) > 0, \\ \xi > 0, (\xi - c_2) < 0, \\ \frac{P+\delta Q}{\beta-\gamma} < 0, (\frac{P+\delta Q}{\beta-\gamma} + c_3) > 0, \\ \frac{\rho+\mu_K}{\sigma} > 0, (\frac{\rho+\mu_K}{\sigma} - c_2) < 0. \end{array} \tag{2.4}$$

Тогда

$$||I_1(t)|| \leq \int_0^{+\infty} e^{(\psi-M)t}e^{-(\psi-M)s}ce^{-c_2 s}ds < \infty,$$

$$||I_2(t)|| \leq \int_0^{+\infty} e^{-\xi t}e^{\xi s}ce^{-c_2 s}ds < \infty,$$

$$||I_3(t)|| \leq \int_0^{+\infty} e^{\frac{P+\delta Q}{\beta-\gamma}t}e^{-\frac{P+\delta Q}{\beta-\gamma}s}ce^{-c_3 s}ds < \infty,$$

$$||I_4(t)|| \leq \int_0^{+\infty} e^{-\frac{(\rho+\mu_K)}{\sigma}t}e^{\frac{(\rho+\mu_K)}{\sigma}s}ce^{-c_2 s}ds < \infty.$$

Таким образом выражения $I_i(t)$ существуют для $i = \overline{1,4}$ и несобственные интегралы сходятся равномерно по t на $[T, +\infty)$ при выполнении условий (2.4). Кроме того $I_i(t) \to 0$ при $A \to 0$ для $i = \overline{1,4}$.

Следовательно, все условия теоремы 3 выполнены и рассматриваемая математическая модель устойчива по всем переменным при наложенных допущениях.

Список литературы

1. Е. В. Воскресенский, "Метод сравнения в нелинейном анализе", *Сиб. мат. журн.*, **5** (1991), 3-11.

2. Е. В. Воскресенский, "Об асимптотике решений нелинейных дифференциальных уравнений", *Укр. мат. журн.*, **43**:5 (1991), 689-691.

3. R. Lucas, "On the mechanics of economic development", *Journal of Monetary Economics*, **22**:1 (1988), 3- 42.

4. Т.Ф. Мамедова, Д.К. Егорова, Е.В. Десяев, "Об оптимальной стабилизации программного движения при абсолютно равномерно устойчивых решениях", *Журнал Средневолжского математического общества*, **16**:1 (2014), 135-139.

5. Т.Ф. Мамедова, Д.К. Егорова, "Об асимптотическом равновесии некоторых экономических систем", *Журнал Средневолжского математического общества*, **15**:2 (2013), 55-58.

6. Т.Ф. Мамедова, Д.К. Егорова, “О стабилизации экономической системы асимптотическими методами”, *Журнал Средневолжского математического общества*, **10**:2 (2008), 243-245.

Stability analysis of a mathematical model of Lucas some of the variables.

© T. F. Mamedova[4], D. K. Egorova[5], E. V. Desyaev[6]

Abstract. In this article uses a method E. V. Voskresensky for analysis stability of the system of differential equations. It is based on the method of comparison. Here the comparison equation constructed for the test functions. We know the behavior of solutions of the comparison. Then compares the solutions of the equations by reference function.

Key Words: nonlinear systems of the ordinary differential equations, a method of comparing, model of Lucas

[4] Professor of Applied Mathematics, differential equations and theoretical mechanics Chair, Mordovian State University after N.P. Ogarev, Saransk; mamedovatf@yandex.ru.

[5] Assistant professor of Applied Mathematics, differential equations and theoretical mechanics Chair, Mordovian State University after N.P. Ogarev, Saransk; egorovadk@mail.ru.

[6] Assistant professor of Applied Mathematics, differential equations and theoretical mechanics Chair, Mordovian State University after N.P. Ogarev, Saransk; desyaev@rambler.ru.