Математика

УДК 517.9

О дифференцируемости решений лиминального диссипативного уравнения

© С. Н. Алексеенко [1], Д. В. Хитева [2]

Аннотация. В данной статье установлены условия, при которых решения лиминального диссипативного уравнения имеют третьи производные по пространственным переменным. Так же, как были получены главные условия для продления решения для вторых производных, строится уравнение со вторыми производными. Особенностью этого уравнения является то, что оно, приведенное к расширенной характеристической системе, имеет удобную для выведения глобальных оценок форму.

Ключевые слова: плотность дислокаций, нелинейное дифференциальное уравнение первого порядка в частных производных, метод дополнительного аргумента, лиминальность.

В диссипативной механике материалов, определяемой взаимодействием дислокаций и точечных дефектов, совйства пластической деформации определяются с помощью скалярной плотности дослокаций [1]. Указанное взаимодействие приводит к переползанию краевых и скручиванию винтовых дислокаций, что во внешних силовых полях вызывает разрушение. Как было отмечено в [2], взаимодействие дислокаций с точечными дефектами присутствует в большом числе явлений и актуально для твердотельных технологий.

Основываясь на ряде физических допущений в [2] было выведено нелинейное дифференциальное уравнение для описания динамики плотности переползающих дислокаций для однокомпонентного изгиба плоской пластины

$$\frac{\partial \nu}{\partial t} + \left(g - \frac{\gamma}{\nu}\right)\frac{1}{\nu^3}\left(\frac{\partial \nu}{\partial x}\right)^3 + B\nu^2 - A\nu = 0, \tag{1.1}$$

где постоянные величины γ, A, g, B имеют вполне определенные выражения через основные физические константы и величины. Диффиренциальное уравнение (1.1) было названо лиминальным, потому что для его решений возможны критические значения, кардинально меняющие характер поведения решений.

Примем, что $x \in R^1$. Начальное условие для уравнения (1.1) зададим в виде:

$$\nu\left(0,x\right) = \varphi\left(x\right), \qquad -\infty < x < \infty. \tag{1.2}$$

Для исследования разрешимости поставленной задачи будем применять метод дополнительного аргумента. В начале преобразуем задачу (1.1)-(1.2) к системе квазилинейных уравнений. Для этого продифференцируем (1.1) по x и, введя новую неизвестную функцию $p(t,x) = \partial_x \nu(t,x)$, получим уравнение

$$\frac{\partial p}{\partial t} + 2p\frac{g\nu - \gamma}{\nu^4}\frac{\partial p}{\partial x} = \frac{3g\nu - 4\gamma}{\nu^5}p^3 - 2Bp\nu - Ap. \tag{1.3}$$

[1] Профессор кафедры прикладной математики, Нижегородский государственный технический университет им. Р.Е.Алексеева, г. Нижний Новгород; sn-alekseenko@yandex.ru

[2] Магистрант кафедры прикладной математики, Нижегородский государственный технический университет им. Р.Е.Алексеева, г. Нижний Новгород; geheimberater@yandex.ru

Из (1.1) "сконструируем"еще одно уравнение с тем же самым дифференциальным оператором

$$\frac{\partial \nu}{\partial t} + 2p\frac{g\nu - \gamma}{\nu^4}\frac{\partial \nu}{\partial x} = -B\nu^2 + A\nu + p^2\frac{g\nu - \gamma}{\nu^4}. \tag{1.4}$$

Из (1.2) естественным образом следует начальное условие для p:

$$p\,(0,x) = \varphi'(x). \tag{1.5}$$

Составим для задачи (1.2), (1.3), (1.4), (1.5) расширенную характеристическую систему с дополнительным аргументом

$$\frac{d\eta(s,t,x)}{ds} = 2\frac{gw_0(s,t,x) - \gamma}{w_0^4(s,t,x)}w_1(s,t,x), \tag{1.6}$$

$$\eta(t,t,x) = x, \tag{1.7}$$

$$\frac{dw_1(s,t,x)}{ds} = \frac{3gw_0(s,t,x) - 4\gamma}{w_0^5(s,t,x)}w_1^3(s,t,x) - 2Bw_0(s,t,x)w_1(s,t,x) + Aw_1(s,t,x), \tag{1.8}$$

$$w_1(0,t,x) = \varphi'(\eta(0,t,x)), \tag{1.9}$$

$$\frac{dw_0(s,t,x)}{ds} = Aw_0(s,t,x) - Bw_0^2(s,t,x) + \frac{gw_0(s,t,x) - \gamma}{w_0^4(s,t,x)}w_1^2(s,t,x), \tag{1.10}$$

$$w_0(0,t,x) = \varphi(\eta(0,t,x)). \tag{1.11}$$

В результате мы приходим к системе интегральных уравнений:

$$\begin{aligned} w_1 = 3g\int\limits_0^s \frac{w_1^3}{w_0^4}ds - 4\gamma\int\limits_0^s \frac{w_1^3}{w_0^5}ds - 2B\int\limits_0^s w_0w_1ds + A\int\limits_0^s w_1ds + \\ +\varphi'\left(x + 2\gamma\int\limits_0^t \frac{w_1}{w_0^4}ds - 2g\int\limits_0^t \frac{w_1}{w_0^3}ds\right), \end{aligned} \tag{1.12}$$

$$\begin{aligned} w_0 = g\int\limits_0^s \frac{w_1^2}{w_0^3}ds - \gamma\int\limits_0^s \frac{w_1^2}{w_0^4}ds - B\int\limits_0^s w_0^2ds + A\int\limits_0^s w_0ds + \\ +\varphi\left(x + 2\gamma\int\limits_0^t \frac{w_1}{w_0^4}ds - 2g\int\limits_0^t \frac{w_1}{w_0^3}ds\right). \end{aligned} \tag{1.13}$$

С помощью метода последовательных приближений доказывается локальное существование дважды непрерывно дифференцируемого решения системы интегральных уравнений (1.12) - (1.13). При этом промежуток разрешимости $0 < t \le T_0$ определяется алгебраически на основании известных величин, входящих в задачу Коши (1.1) - (1.2). Функции $p(t,x) = w_1(t,t,x)$, $\nu(t,x) = w_0(t,t,x)$ дадут решение задачи (1.3), (1.4), (1.2), (1.5), а функция $\nu(t,x)$ будет решением задачи (1.1) - (1.2). Соответствующая теорема приведена в работе [2].

Чтобы иметь возможность продлевать локальное решение, нам потребуются глобальные оценки функций w_0, w_1, их первых и вторых производных. А для этого нужно вывести удобное для получения оценок уравнение, которому удовлетворяет вторая производная по x от функции $\nu(t,x)$. Особенностью этого уравнения как раз и является то, что оно, приведенное к расширенной характеристической системе, имеет удобную для выведения глобальных оценок форму [3]. Соответственно, надо доказать существование дифференцируемого решения такого уравнения и обосновать связь его решения с функциями $\nu(t,x)$ и $p(t,x)$. Этому по существу и посвящена данная работа.

В начале уточним связь функций $\nu(t,x)$ и $p(t,x)$. Дифференцируя уравнение (1.4) по x и вычитая результат дифференцирования из (1.3), получим для разности $\omega(t,x) = p(t,x) - \partial_x\nu(t,x)$ уравнение

$$\frac{\partial\omega}{\partial t} + 2p\frac{g\nu-\gamma}{\nu^4}\frac{\partial\omega}{\partial x} = \omega\left[\frac{3g\nu-4\gamma}{\nu^5}p^2 + 2\frac{3g\nu-4\gamma}{\nu^5}p\frac{\partial\nu}{\partial x} - 2\frac{\partial p}{\partial x}\frac{g\nu-\gamma}{\nu^4} - 2B\nu + A\right]$$

с начальным условием $\omega(0,x)=0$. Применяя к этой задаче Коши метод дополнительного аргумента, получаем, что $\omega(t,x)=0$, следовательно

$$p(t,x) = \partial_x\nu(t,x). \tag{1.14}$$

Собственно говоря, это рассуждение входит составной частью в обоснование того, что решение системы интегральных уравнений (1.12) - (1.13) дает решение исходной задачи (1.1) - (1.2). Но в [2] на этом не было акцентировано внимание, а для данной работы оно играет существенную роль.

Из (1.14) следует важный вывод:

Если $\varphi \in \bar{C}^3(R^1)$, то $\nu(t,x) \in \bar{C}^{1,3}([0,T_0]\times R^1)$. И именно такая гладкость функции $\nu(t,x)$ нужна для продления решения задачи (1.1) - (1.2).

Теперь добавим к системе двух уравнений (1.3), (1.4) уравнение относительно $\vartheta = \partial_x p = \partial_{xx}\nu$. С этой целью продифференцируем (1.3) по x и, заменив $\partial_x p$ на ϑ, будем иметь

$$\begin{aligned}\frac{\partial\vartheta}{\partial t} + 2p\frac{g\nu-\gamma}{\nu^4}\frac{\partial\vartheta}{\partial x} = -2\frac{g\nu-\gamma}{\nu^4}\vartheta^2 + 5\frac{3g\nu-4\gamma}{\nu^5}p^2\vartheta + \\ +(A-2B\nu)\vartheta + 4\frac{5\gamma-3g\nu}{\nu^6}p^4 - 2Bp^2.\end{aligned} \tag{1.15}$$

В качестве начального условия для ϑ возьмем

$$\vartheta|_{t=0} = \varphi''\left(\eta(0,t,x)\right). \tag{1.16}$$

Тогда к приведенной выше расширенной характеристической системе (1.6) - (1.11) добавится уравнение для функции $w_2(s,t,x)$:

$$\frac{dw_2}{ds} = -2\frac{gw_0-\gamma}{w_0^4}w_2^2 + \left[5\frac{3gw_0-4\gamma}{w_0^5}w_1^2 + A - 2Bw_0\right]w_2 + 4\frac{5\gamma-3gw_0}{w_0^6}w_1^4 - 2Bw_1^2 \tag{1.17}$$

с начальным условием

$$w_2(0,t,x) = \varphi''\left(\eta(0,t,x)\right). \tag{1.18}$$

Соответственно, к системе интегральных уравнений (1.12) - (1.13) также добавится уравнение

$$w_2 = 6g\int_0^s \frac{w_1^2}{w_0^4}ds - 8\gamma\int_0^s \frac{w_1^2}{w_0^5}ds + 20\gamma\int_0^s \frac{w_1^4}{w_0^6}ds - 12g\int_0^s \frac{w_1^4}{w_0^5}ds - 2B\int_0^s w_1^2 ds +$$
$$+9g\int_0^s \frac{w_1^2}{w_0^4}w_2 ds - 12\gamma\int_0^s \frac{w_1^2}{w_0^5}w_2 ds - 2g\int_0^s \frac{w_2}{w_0^3}ds + \gamma\int_0^s \frac{w_2}{w_0^4}ds - 2B\int_0^s w_2 w_0 ds -$$
$$-A\int_0^s w_2 ds + \varphi''\left(x + 2\gamma\int_0^t \frac{w_1}{w_0^4}ds - 2g\int_0^t \frac{w_1}{w_0^3}ds\right). \tag{1.19}$$

С помощью метода последовательных приближений доказывается, что при $0 < t < \vartheta_2$, где

$$\vartheta_2 = min\left|M_1, M_2, \frac{kN_\varphi}{M_3}\right|, \tag{1.20}$$

$$M_1 = \frac{9N_\varphi}{\left[3|g|\frac{(10N_\varphi)^3}{\left(\frac{C_\varphi}{2}\right)^4} + 4|\gamma|\frac{(10N_\varphi)^3}{\left(\frac{C_\varphi}{2}\right)^5} + 2|B|\left(\frac{C_\varphi}{2} + N_\varphi\right)10N_\varphi + |A|10N_\varphi\right]}, \tag{1.21}$$

$$M_2 = \frac{\frac{C_\varphi}{2}}{\left[|g|\frac{(10N_\varphi)^2}{\left(\frac{C_\varphi}{2}\right)^3} + |\gamma|\frac{(10N_\varphi)^2}{\left(\frac{C_\varphi}{2}\right)^4} + 2|B|\left(\frac{C_\varphi}{2} + N_\varphi\right)^2 + |A|\left(\frac{C_\varphi}{2} + N_\varphi\right)\right]}, \tag{1.22}$$

$$M_3 = 6|g|\frac{(10N_\varphi)^2}{\left(\frac{C_\varphi}{2}\right)^4} + 8|\gamma|\frac{(10N_\varphi)^2}{\left(\frac{C_\varphi}{2}\right)^5} + 20|\gamma|\frac{(10N_\varphi)^4}{\left(\frac{C_\varphi}{2}\right)^6} + 12|g|\frac{(10N_\varphi)^4}{\left(\frac{C_\varphi}{2}\right)^5} + 2|B|\left(10N_\varphi\right)^2 +$$
$$+9|g|\frac{(10N_\varphi)^2(k+1)N_\varphi}{\left(\frac{C_\varphi}{2}\right)^4} + 12|\gamma|\frac{(10N_\varphi)^2(k+1)N_\varphi}{\left(\frac{C_\varphi}{2}\right)^5} + 2|g|\frac{(k+1)N_\varphi}{\left(\frac{C_\varphi}{2}\right)^3} +$$
$$+|\gamma|\frac{(k+1)N_\varphi}{\left(\frac{C_\varphi}{2}\right)^3} + 2|B|\left(\frac{C_\varphi}{2} + N_\varphi\right)(k+1)N_\varphi + |A|(k+1)N_\varphi, \tag{1.23}$$

$$N_\varphi = max|sup|\varphi(x)|, sup|\varphi'(x)|, sup|\varphi''(x)||, \qquad \varphi \geq C_\varphi > 0, \qquad k = const, \tag{1.24}$$

выполняются неравенства

$$|w_n^1| \leq 10N_\varphi, \qquad |w_n^0| \leq \frac{C_\varphi}{2} + N_\varphi, \qquad |w_n^0| \geq \frac{C_\varphi}{2}, \qquad |w_n^2| \leq (k+1)N_\varphi \tag{1.25}$$

и интегральное уравнение (1.19) имеет единственное дифференцируемое по t и по x решение $w_2(s,t,x)$.

В силу основного принципа метода дополнительного аргумента функция $\vartheta(t,x) = w_2(s,t,x)$ будет удовлетворять уравнению (1.15) и начальному условию (1.16).

Аналогичным образом, как это было проделано выше для функций $\nu(t,x)$ и $p(t,x)$, доказывается, что $\vartheta(t,x) = \partial_x p(t,x)$, а значит $\vartheta(t,x) = \partial_{xx}\nu(t,x)$.

В результате приходим к теореме, которая предназначена служить основой для вывода глобальных априорных оценок. В ее формулировке воспользуемся обозначением множества $\Delta_\Upsilon := \{(s,t) : 0 \le s \le t \le \Upsilon\}$.

Теорема. Пусть $\varphi \in \bar{C}^3(R^1)$. Тогда существует такое число $\Upsilon > 0$, что при $0 < t \le \Upsilon$ задача Коши (1.1) - (1.2) имеет решение $\nu(t,x) \in \bar{C}^{1,3}([0,\gamma] \times R^1)$, которое определяется из расширенной характеристической системы (1.6) - (1.11) в виде $\nu(t,x) = w_0(t,t,x)$. При этом $\partial_x\nu(t,x) = p(t,x) = w_1(t,t,x)$, а $\partial_{xx}\nu(t,x) = \partial_x p(t,x) = \vartheta(t,x) = w_2(t,t,x)$, где функция $w_2(s,t,x)$ удовлетворяет уравнению (1.17) и начальному условию (1.18). Гладкость функций w_0, w_1, w_2 определяется соотношениями $w_0 \in \bar{C}^{1,1,3}(\Delta_\Upsilon \times R^1)$, $w_1 \in \bar{C}^{1,1,2}(\Delta_\Upsilon \times R^1)$, $w_2 \in \bar{C}^{1,1,1}(\Delta_\Upsilon \times R^1)$.

Замечание. Значение Υ определяется величинами g, γ, B, A, $C_\varphi = inf\varphi$ и $N_\varphi = max\{sup|\varphi|, sup|\varphi'|, sup|\varphi''|, sup|\varphi'''|\}$.

Список литературы

1. Косевич Д. М., *Основы механики крислаллической решетки.*, Наука, М., 1972.

2. Алексеенко С. Н., Нагорных С. Н., Хитева Д. В., “Лиминальное диссипативное уравнение плотности переползающих дислокаций для однокомпонентного изгиба плоской пластины”, *Журнал Средневолжского математического общества*, **16**:1 (2014), 24 – 31.

3. Алексеенко С. Н., Нагорных С. Н., Елькина Е. А., “Исследование условий нелокальной разрешимости уравнения диссипативных стационарных структур.”, *Вестник Нижегородского университета им. Н.И.Лобачевского*, 2012, № 1, Часть 1, 122 – 128.

On the differentiability of solutions of the liminal dissipative equation

© S. N. Alekseenko[3], D. V. Khiteva[4]

Abstract. There is established the conditions under which the solutions of the liminal dissipative equation have third derivatives with respect to the spatial variables. As principal conditions for a prolongation of solutions are formulated for the second derivatives, the equation for the second derivative of a solution to considered problem is constructed. The peculiarity of this equation is that its in the extended characteristic system has a convenient to deducing of global estimates form.
Key Words: dislocation density, nonlinear first-order partial differential equation, liminality method of an additional argument

[3] The professor of the applied mathematics chair, Nizhniy Novgorod State Technical University, Nizhniy Novgorod; sn-alekseenko@yandex.ru

[4] The undergraduate of the applied mathematics chair, Nizhniy Novgorod State Technical University, Nizhniy Novgorod; geheimberater@yandex.ru