УДК 517.9

Построение энергетической функции для А-диффеоморфизмов с двумерными базисными множествами на 3-многообразиях

© **В. З. Гринес**[1], **М. К. Носкова**[2], **О. В. Починка**[3]

Аннотация. В настоящей работе рассматриваются А-диффеоморфизмы, заданные на замкнутых ориентируемых 3-многообразиях. В предположении, что неблуждающее множество такого диффеоморфизма состоит из двумерных базисных множеств, доказывается, что он обладает энергетической функцией.

Ключевые слова: энергетическая функция, базисное множество, диффеоморфизм Аносова

1. Введение и формулировка результатов

Пусть M — замкнутое ориентируемое 3-многообразие с метрикой d и на нём задан диффеоморфизм f. Динамика диффеоморфизма f во многом определяется структурой его *неблуждающего множества* $NW(f)$. Необходимым условием сохранения структуры орбит неблуждающего множества с точностью до гомеоморфизма при малых изменениях диффеоморфизма f является *гиперболичность* множества $NW(f)$. Динамически гиперболичность выражается в том, что любая точка $p\in NW(f)$ обладает *неустойчивым* и *устойчивым* многообразием

$W^u(p)=\{x\in M: d(f^k(p),f^k(x))\to 0 \text{ при } k\to+\infty\}$ и

$W^s(p)=\{x\in M: d(f^k(p),f^k(x))\to 0 \text{ при } k\to-\infty\}$,

которые являются образами $\mathbb{R}^q, q\in\{0,\dots,n\}$ и $\mathbb{R}^{n-q}$ при инъективной иммерсии.

Условие гиперболичности неблуждающего множества и всюду плотности в нем периодических точек приводит к разложению множества $NW(f)$ в объединение конечного числа, так называемых *базисных множеств*, каждое из которых является замыканием некоторой траектории системы. Для сохранения качественного поведения траекторий на неблуждающем множестве при малых изменениях диффеоморфизма f (Ω-*устойчивости*), помимо гиперболичности неблуждающего множества, необходимым является условие отсутствия *циклов*, то есть наборов базисных множеств $B_1,\dots,B_k,B_{k+1}=B_1$ со свойством

$$W^s_{B_i}\cap W^u_{B_{i+1}}\neq\emptyset,\ i=1,\dots,k.$$

Эти же условия являются и достаточными для Ω-устойчивости диффеоморфизма f. *Энергетической функцией* Ω-устойчивого диффеоморфизма f называется гладкая функция, убывающая вдоль блуждающих траекторий, постоянная на базисных множествах и множество критических точек которой совпадает с множеством неблуждающих точек $NW(f)$.

Обозначим через G класс Ω-устойчивых диффеоморфизмов на M, неблуждающее множество которых состоит из базисных множеств топологической размерности равной двум. Пусть $f\in G$. В силу [1] и [2], каждая компонента связности B множества $NW(f)$ является двумерным тором ручно вложенным[4] в M и все компоненты связности имеют

[1] Профессор кафедры фундаментальной математики НИУ ВШЭ; vgrines@yandex.ru
[2] Магистрант кафедры численного и функционального анализа ННГУ им. Н.И. Лобачевского
[3] Профессор кафедры фундаментальной математики НИУ ВШЭ; olga-pochinka@yandex.ru

один и тот же период $k_f \geq 1$, а отображение $f^{k_f}|_B$ топологически сопряжено с *гиперболическим автоморфизмом тора*[5]. Тор B является либо аттрактором, либо репеллером[6] диффеоморфизма f.

Обозначим через $\mathcal{A}$ ($\mathcal{R}$) объединение всех аттракторов (репеллеров), принадлежащих $NW(f)$. Множества $\mathcal{A}$, $\mathcal{R}$ не пусты и граница каждой компоненты связности V множества $M \setminus (\mathcal{A} \cup \mathcal{R})$ состоит в точности из одной периодической компоненты $A \subset \mathcal{A}$ и одной периодической компоненты $R \subset \mathcal{R}$. При этом замыкание $cl\ V$ гомеоморфно многообразию $\mathbb{T}^2 \times [0,1]$. Таким образом, объемлющее многообразие M, допускающее диффеоморфизмы класса G, является объединением конечного числа подмножеств, каждое из которых гомеоморфно $\mathbb{T}^2 \times [0,1]$, и каждое базисное множество является тором, принадлежащим пересечению двух таких подмножеств. Заметим, что базисное множество диффеоморфизма $f \in G$, будучи ручным тором, может не быть гладким ни в одной точке (см., например, [4]). Тем не менее, на M существует гладкая функция с таким множеством критических точек, что следует из основного результата настоящей работы.

Теорема 1.1. *Любой диффеоморфизм $f \in G$ обладает энергетической функцией.*

Благодарности. Работа выполнена при финансовой поддержке Программы фундаментальных исследований НИУ ВШЭ в 2015 году (проект «Динамические системы и их приложения»), Российского фонда фундаментальных исследований (гранты № 13-01-12452 офи-м и 15-01-03689-а) и Российского Научного фонда (грант 14-41-00044).

2. Лемма о сглаживании функции

В этом разделе мы сформулируем и докажем основной технический момент построения энергетической функции для диффеоморфизма $f \in G$.

Лемма 2.1. *Пусть $K \subset M$ — компактное подмножество замкнутого многообразия M размерности n, U — некоторая компактная окрестность множества K. Пусть задана непрерывная функция $\varphi : U \to [0;1]$, гладкая на $U \setminus K$ и $\varphi^{-1}(0) = K$. Тогда существует функция $g : [0;1] \to [0;1]$, такая что суперпозиция $\psi = g \circ \varphi$ гладкая на всем множестве U, причем функция g удовлетворяет следующим свойствам:*

- *g — монотонно возрастающая на $[0;1]$;*
- *$g'(0) = 0$ и $g'(c) \neq 0,\ \forall c \in (0;1]$;*
- *$g(c) = c,\ \forall c \in [\frac{1}{2};1]$.*

[4] Двумерный тор B называется *ручно вложенным* в многообразие M, если существует гомеоморфизм на образ $g : \mathbb{T}^2 \times [-1,1] \to M$ такой, что $g(\mathbb{T}^2 \times \{0\}) = B$.

[5] *Алгебраическим автоморфизмом* тора $\mathbb{T}^2 = \mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2$ называется диффеоморфизм $\widehat{C}$, задаваемый матрицей $C = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ из множества $GL(2,\mathbb{Z})$ целочисленных матриц с определителем ± 1. То есть $\widehat{C}(x,y) = (ax+by, cx+dy)\ (mod\ 1)$. Алгебраический автоморфизм $\widehat{C}$ называется *гиперболическим*, если собственные значения λ_1, λ_2 матрицы C удовлетворяют условиям $|\lambda_1| < 1 < |\lambda_2|$. При этом матрица C также называется *гиперболической*.

[6] Множество B называется *аттрактором* диффеоморфизма f, если существует замкнутая окрестность U множества B такая, что $f(U) \subset int\, U$, $\bigcap\limits_{j \geq 0} f^j(U) = B$. Аттрактор для диффеоморфизма f^{-1} называется *репеллером* диффеоморфизма f.

Доказательство. Для $c \in (0,1]$ положим $\alpha(c) = \min\{1, d^2(\varphi^{-1}(c), K)\}$ и $\beta(c) = \max\{1, \max\limits_{x\in\varphi^{-1}([c,1])} |grad\ \varphi(x)|\}$[7]. По построению функции $\alpha(c)$ и $\beta(c)$ являются непрерывными, причем $\alpha(c)$ — неубывающая на $(0;1]$ и существует значение $c^* \in (0;1]$ такое, что $\alpha(c)$ — монотонно возрастает на $(0;c^*]$, а $\beta(c)$ — невозрастающая. Тогда функция $\gamma(c) = \frac{\alpha(c)}{\beta(c)}$ является неубывающей на полуинтервале $(0;1]$ и $\lim\limits_{c\to 0}\frac{\alpha(c)}{\beta(c)} = 0$.

Построим C^2-гладкую функцию $g : [0;1] \to [0;1]$, такую что

a) $g'(c) > 0$ для любого $c \in (0;1)$;
b) $g(c) \le \gamma(c)$ для любого $c \in (0;\frac{1}{8})$;
c) $g'(c) \le \gamma(c)$ для любого $c \in (0;\frac{1}{8})$;
d) $g(c) = c$ для любого $c \in [\frac{1}{2};1]$.

Возьмем открытое покрытие полуинтервала $(0;1]$ множествами
$U_1 = \{x \in \mathbb{R} :\ \frac{1}{2} < x \le 1\}$
$U_2 = \{x \in \mathbb{R} :\ \frac{1}{4} < x \le 1\}$
$U_i = \{x \in \mathbb{R} :\ \frac{1}{2^i} < x < \frac{1}{2^{i-2}}\}$, $i = 3, 4, \dots$,
и следующее локально конечное разбиение единицы[8], подчиненное этому покрытию:

$$\forall i = 2, 4, \dots,\ \sigma_i(x) = \begin{cases} e^{\frac{\left(x-\frac{1}{2^{i-1}}\right)^4}{\left(x-\frac{1}{2^i}\right)\left(x-\frac{1}{2^{i-2}}\right)}}, \text{ если } x \in \left(\frac{1}{2^i}, \frac{1}{2^{i-2}}\right); \\ 0, \text{ если } x \notin \left(\frac{1}{2^i}, \frac{1}{2^{i-2}}\right); \end{cases}$$

$$\sigma_1(x) = \begin{cases} 1 - \sigma_2(x), \text{ если } x \in (\frac{1}{2};1]; \\ 0, \text{ если } x \notin (\frac{1}{2};1]; \end{cases}$$

$$\forall i = 3, 5, \dots,\ \sigma_i(x) = \begin{cases} 1 - \sigma_{i-1}(x), \text{ если } x \in \left[\frac{1}{2^{i-1}}, \frac{1}{2^{i-2}}\right); \\ 1 - \sigma_{i+1}(x), \text{ если } x \in \left(\frac{1}{2^i}, \frac{1}{2^{i-1}}\right); \\ 0, \text{ если } x \notin \left(\frac{1}{2^i}, \frac{1}{2^{i-2}}\right); \end{cases}$$

Положим $\varepsilon_i = \gamma\left(\frac{1}{2^i}\right)$ для всех $i = 4, 5, \dots$. Пусть $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = 1$, $\varepsilon_3 = \frac{\frac{1}{2} - \int\limits_0^{\frac{1}{2}}(\sum\limits_{i=4}^{\infty}\varepsilon_i\sigma_i(x))dx - \int\limits_0^{\frac{1}{2}}\sigma_2(x)dx}{\int\limits_0^{\frac{1}{2}}\sigma_3 dx}$. Определим функцию g формулой $g(c) = \begin{cases} \int\limits_0^c(\sum\limits_{i=1}^{\infty}\varepsilon_i\sigma_i(x))dx, \text{ если } c \in (0;1]; \\ 0, \text{ если } c = 0 \end{cases}$. Заметим, что она является дважды гладкой, так как ее производная — сумма гладких функций. Покажем, что она является искомой, проверив условия a)-d).

---

[7] Множество $C = \varphi^{-1}([c,1])$ является компактным и, следовательно, допускает покрытие конечным числом гладких карт. Под максимумом модуля градиента функции φ в точке $x \in C$ понимается наибольший из посчитанных в этих картах модулей градиентов этой функции.

[8] Пусть дано открытое покрытие топологического пространства M открытыми множествами U_α. *Разбиением единицы, подчиненным покрытию* $\{U_\alpha\}$ называется набор гладких функций $\sigma_\gamma : M \to \mathbb{R}$, обладающих следующими свойствами:

- Для всех γ, $Supp(\sigma_\gamma) \subset U_\alpha$ для некоторого α (где $Supp(\sigma_\gamma)$ — замыкание множества, на котором функция отлична от нуля)
- $0 \le \sigma_\gamma \le 1$ на M
- $\forall x \in M$ имеем $\sum\limits_\gamma \sigma_\gamma(x) = 1$

Если для любой точки $x \in M$ существует окрестность W_x такая, что пересечение $W \cap Supp(\sigma_\gamma)$ непусто не более чем для конечного числа индексов γ, то такое разбиение единицы называется *локально конечным.*

a) Поскольку $g'(c) = \sum\limits_{i=1}^{\infty} \varepsilon_i \sigma_i(c)$, то $g'(c) > 0$ для любого $c \in (0;1)$.

b) Для $i = 4, 5, \ldots$ последовательность $\{\varepsilon_i\}$ убывающая. Заметим, что для любого $c \in (0;1]$ существует единственный номер i^* такой, что $c \in \left(\frac{1}{2^{i^*-1}}; \frac{1}{2^{i^*-2}}\right]$. Тогда $\sigma_{i^*}(c) \neq 0$ и $\sigma_i(c) = 0$ для всех $i \notin \{i^*, i^*+1\}$. Из выбора параметров ε_i для $c \in (0, \frac{1}{8})$ получаем цепочку неравенств $g(c) = \int\limits_0^c (\sum\limits_{i=1}^{\infty} \varepsilon_i \sigma_i(x))dx = \int\limits_0^c (\sum\limits_{i=i^*}^{\infty} \varepsilon_i \sigma_i(x))dx < \int\limits_0^c (\sum\limits_{i=i^*}^{\infty} \varepsilon_{i^*} \sigma_i(x))dx = \varepsilon_{i^*} \int\limits_0^c (\sum\limits_{i=i^*}^{\infty} \sigma_i(x))dx < \varepsilon_{i^*} \int\limits_0^c (\sum\limits_{i=1}^{\infty} \sigma_i(x))dx = \varepsilon_{i^*} \int\limits_0^c 1dx = \varepsilon_{i^*} c < \varepsilon_{i^*} = \gamma(\left(\frac{1}{2^{i^*}}\right) < \gamma(c)$.

c) Для $g'(c)$, $c \in (0, \frac{1}{4})$ справедлива следующая оценка $g'(c) = \sum\limits_{i=i^*}^{\infty} \varepsilon_i \sigma_i(c) < \varepsilon_{i^*} \sum\limits_{i=i^*}^{\infty} \sigma_i(c) = \varepsilon_{i^*} < \gamma(c)$.

d) При $c \in [\frac{1}{2}; 1]$ верна цепочка равенств $g(c) = \int\limits_0^c (\sum\limits_{i=1}^{\infty} \varepsilon_i \sigma_i(x))dx = \int\limits_0^{\frac{1}{2}} (\sum\limits_{i=4}^{\infty} \varepsilon_i \sigma_i(x))dx + \int\limits_0^{\frac{1}{2}} \varepsilon_3 \sigma_3(x)dx + \int\limits_0^{\frac{1}{2}} \varepsilon_2 \sigma_2(x)dx + \int\limits_{\frac{1}{2}}^{c} (\varepsilon_1 \sigma_1(x) + \varepsilon_2 \sigma_2(x))dx = \int\limits_0^{\frac{1}{2}} (\sum\limits_{i=4}^{\infty} \varepsilon_i \sigma_i(x))dx + \varepsilon_3 \int\limits_0^{\frac{1}{2}} \sigma_3(x)dx + \varepsilon_2 \int\limits_0^{\frac{1}{2}} \sigma_2(x)dx + \varepsilon_2 \int\limits_{\frac{1}{2}}^{c} (\sigma_1(x) + \sigma_2(x))dx = \int\limits_0^{\frac{1}{2}} (\sum\limits_{i=4}^{\infty} \varepsilon_i \sigma_i(x))dx + \frac{\frac{1}{2} - \int_0^{\frac{1}{2}} (\sum_{i=4}^{\infty} \varepsilon_i \sigma_i(x))dx - \int_0^{\frac{1}{2}} \sigma_2(x)dx}{\int_0^{\frac{1}{2}} \sigma_3 dx} \int\limits_0^{\frac{1}{2}} \sigma_3(x)dx + \int\limits_0^{\frac{1}{2}} \sigma_2(x)dx + (c - \frac{1}{2}) = c$. Таким образом, $g(c) = c$ для $c \in [\frac{1}{2}; 1]$.

Покажем, что суперпозиция $\psi = g \circ \varphi$ является гладкой функцией на U.

Для начала заметим, что $grad\ \psi = g' \cdot grad\ \varphi$, это нам пригодится для дальнейших рассуждений.

Так как на множестве $U \setminus K$ функция ψ является гладкой как суперпозиция гладких функций, то нам осталось показать, что функция ψ — гладкая на множестве K.

Рассмотрим любую точку $a \in K$ и локальную карту (U_a, h_a), где $h_a : U_a \to \mathbb{R}^n$ — диффеоморфизм, отображающий некоторую окрестность $U_a \in U$[9] точки a в $\mathbb{R}^n$, причем точка a переходит в точку $O(0,0)$. Сначала покажем дифференцируемость. Если функция $\psi_a = \psi(h_a^{-1}(x))$ дифференцируема в точке O, то функция ψ дифференцируема в точке a. При этом функция ψ_a дифференцируема в точке O и имеет частные производные, равные нулю в этой точке, тогда и только тогда, когда $\lim\limits_{s \to O} \frac{\psi_a(s)}{\rho(s,O)} = 0$, где $s \in \mathbb{R}^n$ и ρ евклидова метрика в $\mathbb{R}^n$, определенная формулой $\rho(s_1, s_2) = \sqrt{(x_{1_1} - x_{2_1})^2 + (x_{1_2} - x_{2_2})^2 + \cdots + (x_{1_n} - x_{2_n})^2}$ для $s_1, s_2 \in \mathbb{R}^2$. Проверка равенства $\lim\limits_{s \to O} \frac{\psi_a(s)}{\rho(s,O)} = 0$ и завершит доказательство дифференцируемости.

Введем на $\mathbb{R}^n$ метрику d_a формулой $d_a(s_1, s_2) = d(h_a^{-1}(s_1), h_a^{-1}(s_2))$ для $s_1, s_2 \in \mathbb{R}^n$. В силу [5] (лекция 15), метрики ρ и d_a эквивалентны в некоторой компактной окрестности $U(O)$ точки O, то есть существуют константы $0 < c_1 \leq c_2$ такие, что

$$\forall s_1, s_2 \in U(O): \ c_1 d_a(s_1 s_2) \leq \rho(s_1, s_2) \leq c_2 d_a(s_1, s_2).$$

Для $s \in U(O)$ положим $w = h_a^{-1}(s)$ и $c = \varphi(h_a^{-1}(s)) = \varphi(w)$. Тогда $\lim\limits_{s \to O} \frac{\psi_a(s)}{\rho(s,O)} = \lim\limits_{s \to O} \frac{\psi(h_a^{-1}(s))}{c_1 d(h_a^{-1}(s), a)} = \lim\limits_{w \to a} \frac{\psi(w)}{c_1 d(w,a)} = \lim\limits_{w \to a} \frac{g(\varphi(w))}{c_1 d(w,a)} = \lim\limits_{w \to a} \frac{g(c)}{c_1 d(w,a)} < \lim\limits_{w \to a} \frac{\alpha(c)}{\beta(c) c_1 d(w,a)} \leq \lim\limits_{w \to a} \frac{d^2(w,a)}{c_1 d(w,a)} =$

[9] Окрестность выберем таким образом, чтобы $\forall w \in U_a : \varphi(w) < \frac{1}{8}$

$\lim\limits_{w\to a}\frac{d(w,a)}{c_1}=0$.

Теперь покажем, что частные производные $(\psi_a)'_{x_i}$, $i=1,\dots,n$ непрерывны в точке O, то есть $\lim\limits_{s\to O}(\psi_a)'_{x_i}(s)=0,\ i=1,\dots,n$, что эквивалентно $\lim\limits_{s\to O}|grad\ \psi_a(s)|=0$. Обозначим через $J_{h_a^{-1}}$ якобиан отображения h_a^{-1}, через $||J_{h_a^{-1}}||$ — его норму, подчиненную евклидовой норме вектора в $\mathbb{R}^2$ и через B константу такую, что $||J_{h_a^{-1}}(s)||\leq B$ для всех точек s в некоторой окрестности точки O. Тогда $\lim\limits_{s\to O}|grad\ \psi_a(s)|=\lim\limits_{s\to O}|J_{h_a^{-1}}(s)\cdot g'(c)\cdot grad\ \varphi(w)|\leq$ $\lim\limits_{s\to O}||J_{h_a^{-1}}(s)||\cdot|g'(c)|\cdot|grad\ \varphi(w)|\leq\lim\limits_{s\to O}B\cdot\frac{\alpha(c)}{\beta(c)}\cdot|grad\ \varphi(w)|\leq\lim\limits_{w\to a}B\cdot\frac{d^2(w,a)}{|grad\ \varphi(w)|}\cdot|grad\ \varphi(w)|\leq$ $\lim\limits_{w\to a}B\cdot d^2(w,a)=0$.

Таким образом, функция ψ — гладкая на U.

Доказательство закончено.

3. Построение энергетической функции для диффеоморфизмов из класса G

В этом разделе мы докажем следующую теорему.

Теорема 1.1. *Любой диффеоморфизм $f\in G$ обладает энергетической функцией.*

Доказательство. Пусть V — компонента связности множества $M\setminus(\mathcal{A}\cup\mathcal{R})$ такая, что $\partial V=A\cup R$, где $A\in\mathcal{A}$, $R\in\mathcal{R}$. Для доказательства теоремы 1.1. достаточно построить энергетическую функцию $\varphi: cl\ V\to[0,1]$ для f^{k_f}.

Согласно работе [3] существует диффеоморфизм $\chi:\mathbb{T}^2\times(0,2)\to V$ такой, что расслоение на двумерные торы $\{T_t=\chi(\mathbb{T}^2\times\{t\}), t\in(0,2)\}$ является f^{k_f}-инвариантным. Определим функцию $\varphi: cl\ V\to[0,2]$ следующим образом:

$$\varphi(z)=\begin{cases} t,\ \text{если}\ z\in T_t;\\ 0,\ \text{если}\ z\in A;\\ 2,\ \text{если}\ z\in R;\end{cases}$$

По построению функция φ является гладкой на V, непрерывной на $cl\ V$, убывающей вдоль траекторий системы, а также не имеет критических точек на множестве M. Положим $U_A=\chi(\mathbb{T}^2\times(0,1])\cup A$ и $\varphi_A=\varphi|_{U_A}$. Из леммы 2.1. следует, что существует функция $g_{_A}:[0,1]\to[0,1]$, такая что функция $\psi_{_A}=g_{_A}\circ\varphi_{_A}$ является энергетической функцией на U_A для f^{k_f}. Положим $U_R=\chi(\mathbb{T}^2\times(1,2])\cup R$ и $\varphi_R=2-\varphi|_{U_R}$. Из леммы 2.1. следует, что существует функция $g_{_R}:[0,1]\to[0,1]$, такая что функция $\psi_{_R}=g_{_R}\circ\varphi_{_R}$ является энергетической функцией на U_A для f^{-k_f}. Так как функции $g_{_A}$ и $g_{_R}$ являются тождественными на отрезке $[\frac{1}{2},1]$, то функция

$$\psi(z)=\begin{cases}\varphi_{_A}(z),\ \text{если}\ z\in U_A;\\ 2-\varphi_{_R}(z),\ \text{если}\ z\in U_R;\end{cases}$$

является искомой энергетической функцией на $cl\ V$ для диффеоморфизма f^{k_f}.

Доказательство закончено.

Список литературы

1. Brown A. Nonexpanding attractors: conjugacy to algebraic models and classification in 3-manifolds. // Journal of Modern Dynamics. 2010. V. 4, 517–548.

2. Гринес В.З., Медведев В.С., Жужома Е.В., “О поверхностных аттракторах и репеллерах на 3-многообразиях.”, *Мат. зам.*, **78**:6 (2005), 813 – 826.

3. Grines V., Levchenko Y., Medvedev V., Pochinka O., “The topological classification of structural stable 3-diffeomorphisms with two-dimensional basic sets”, *Nonlinearity*, **28** (2015), 4081–4102.

4. Kaplan J., Mallet-Paret J., Yorke J., “The Lapunov dimension of nonwhere diffferntiable attracting torus”, *Ergod. Theor. Dynam. Syst.*, **2** (1984), 261–81.

5. Постников М. М., “Лекции по геометрии. Семестр V. Риманова геометрия”, *М.: Факториал*, 1998.

Construction of an energy function for A-diffeomorphisms of two-dimensional non-wandering sets on 3-manifolds

© V. Z. Grines[10]; M. K. Noskova[11]; O. V. Pochinka[12]

Abstract. In this paper we consider the A-diffeomorphisms of closed orientable 3-manifolds. Assuming that the non-wandering set of the diffeomorphism consists of basic sets whose topological dimension is two, it is proved that it has the energy function.

Key Words: energy function, basic set, Anosov diffeomorphism

[10] Professor of Department of fundamental mathematics, Higher School of Economics, Nizhny Novgorod; vgrines@yandex.ru

[11] Master of the department of numerical and functional analysis, Lobachevsky State University, Nizhny Novgorod; mknoskova@yandex.ru

[12] Professor of Department of fundamental mathematics, Higher School of Economics, Nizhny Novgorod; olga-pochinka@yandex.ru