УДК 512.917+513.9

Аппроксимация максимальных мер для счетных топологических марковских цепей с мероморфной дзета-функцией

© **М. И. Малкин**[1]

Аннотация. Рассматриваются счетные топологические марковские цепи (ТМЦ). Предполагается, что степени матрицы переходов ТМЦ имеют конечные следы и, следовательно, для ТМЦ корректно определена динамическая дзета-функция Артина-Мазура. Предполагается также, что выполнены два условия: 1) радиус сходимости дзета-функции у подсистем ТМЦ, соответствующих подматрицам с достаточно большими номерами состояний, больше радиуса сходимости $r(A)$ дзета-функции исходной ТМЦ с матрицей переходов A, и 2) дзета-функция ТМЦ мероморфна в некотором диске радиуса, большего $r(A)$. Данные условия выполняются, в частности, для счетных ТМЦ, являющихся символическими моделями одномерных кусочно-монотонных отображений с положительной топологической энтропией. В работе показано, что при данных условиях неразложимая ТМЦ имеет единственную меру максимальной энтропии, причем эта мера аппроксимируется (в слабой топологии) мерами максимальной энтропии, сосредоточенными на конечных ТМЦ – подсистемах исходной системы.

Ключевые слова: топологические марковские цепи, топологтческая энтропия, динамическая дзета-функция, максимальные меры

1. Введение

Данная статья продолжает исследования автора (см. [8], [9]) по вопросам динамических и эргодических свойств счетных топологических марковских цепей. Топологические марковские цепи могут служить символическими моделями для различных классов динамических систем с гиперболической структурой, включая неравномерно гиперболические и частично гиперболические системы, в случае, когда фазовое пространство таких систем допускает марковское разбиение (возможно, счётное). К таким классам относятся системы, удовлетворяющие аксиоме А, гиперболические бильярды, геометрические модели аттрактора Лоренца, одномерные кусочно-монотонные отображения с положительной топологической энтропией и др. (см. [1], [3],[4], [11], [2], [6]). Ф. Хофбауэр показал (см. [5]), что для кусочно-монотонного, кусочно-непрерывного отображения f интервала I с положительной топологической энтропией можно построить конечную или счётную ТМЦ (Ω_A, σ) с матрицей переходов A, такую, что $f : I \to I$ топологически сопряжено с отображением сдвига $\sigma : \Omega_A \to \Omega_A$. Тем самым, изучение топологических и эргодических свойств одномерных кусочно-монотонных отображений с положительной топологической энтропией сводится к рассмотрению счётных топологических марковских цепей.

В отличие от конечных топологических марковских цепей, фазовое пространство счетной ТМЦ некомпактно и поэтому возникают проблемы при обобщении результатов теории конечных марковских цепей — теории Перрона-Фробениуса. Для неразложимой бесконечной матрицей переходов A соответствующая ТМЦ топологически транзитивна, и в этом случае, как следует из работ Д. Вер-Джонса и Б.М. Гуревича (см. [16], [14], [15]), результаты теории Перрона-Фробениуса частично обобщаются. Однако для ТМЦ с бесконечной матрицей переходов, даже в случае её неразложимости, некоторые важные эргодические

[1] Доцент кафедры дифференциальных уравнений и математического анализа, Нижегородский государственный университет им. Н.И.Лобачевского, Нижний Новгород; malkin@unn.ru

свойства, известные для конечных ТМЦ, могут не выполняться. Б.М. Гуревич показал,что свойством бесконечной матрицы, отвечающим за существование меры с максимальной энтропией, является R-положительность матрицы переходов, где R — параметр сходимости матрицы, совпадающий (см. [15], [8]) с радиусом сходимости $r(A)$ дзета-функции и со значением $exp(-h_{top}(A)$, где $h_{top}(A)$ — топологическая энтропия ТМЦ. В статье автора [9] доказано, что это важное свойство R-положительности имеет место для неразложимых ТМЦ, у которых дзета-функция обладает естественными свойствами (см. свойства (*) и (**) ниже). Тем самым, в силу этого результата и результатов Гуревича, при указанных условиях ТМЦ обладает единственной мерой с максимальной энтропией. В данной статье при этих же условиях мы доказываем аппроксимационные свойства меры с максимальной энтропией, а именно, будет доказано, что эта мера аппроксимируется (в слабой топологии) мерами максимальной энтропии, сосредоточенными на конечных ТМЦ — подсистемах исходной системы. Этот результат имеет значение с вычислительной точки зрения, поскольку для конечных ТМЦ имеются алгоритмы вычисления максимальных мер по собственным значениям и собственным векторам соответствующих матриц.

Перейдем к формулировке указанных условий на класс матриц, определяющих счетные ТМЦ. Рассматриваются счетные ТМЦ с неразложимыми матрицами переходов A. Условия, накладываемые на A, следующие. Предполагается, что любая степень матрицы переходов имеет конечный след, т.е. для любого k $N_k(A) = \sum_{i=1}^{\infty} a_{i,i}^{(k)} < \infty$. Легко видеть, что $N_k(A)$ равно числу неподвижных точек отображения $\sigma^k|\Omega_A$. Тем самым, для ТМЦ корректно определена динамическая дзета-функция Артина-Мазура $\zeta_A(z)$:

$$\zeta_A(z) = exp(\sum_{k=1}^{\infty} \frac{N_k(A)z^k}{k}). \tag{1.1}$$

Кроме того, предполагается, что радиус сходимости дзета-функции у подсистем ТМЦ, соответствующих подматрицам с достаточно большими номерами состояний, больше радиуса сходимости $r(A)$ дзета-функции исходной ТМЦ; точнее, предполагается, что

$$\lim_{n\to\infty} r(\hat{A}|_n) > r(A), \qquad (*)$$

где $\hat{A}|_n$ — это подматрица матрицы A, у которой (бесконечное) индексное множество есть $\{n, n+1, \ldots\}$. Данное условие означает, что "хвостовая"подматрица матрицы переходов становится всё более разреженной, когда индексы принимают достаточно большие значения. Второе условие, которое мы будем предполагать выполненным, состоит в следующем:

$$\zeta_{\hat{A}|_n}(z) \text{ мероморфна в диске } |z| < r(A) + \varepsilon_0 \text{ для некоторого } \varepsilon_0 > 0 \text{ при всех } n \qquad (**)$$

Отметим, что указанные условия являются естественными, т.к. они выполняются для счетных ТМЦ, являющихся символическими моделями одномерных кусочно-монотонных отображений с положительной топологической энтропией. Более того, для таких отображений условие (**) на самом деле выполняется в более сильной форме (см. [5]), а именно, можно показать мероморфность указанных дзета-функций в открытом единичном диске. В настоящей работе показано, что при данных условиях меры с максимальной энтропией ν_n, соответствующие ТМЦ с подматрицами $A|_n$ с индексным множеством $\{1, 2, ..., n\}$, сходятся в слабой топологии при $n \to \infty$ к единственной мере с максимальной энтропией μ^* ТМЦ (Ω_A, σ). Тем самым, мероморфность дзета-функции гарантирует возможность существенного продвижения в теории Перрона-Фробениуса в случае бесконечных матриц.

2. Предварительные сведения и результаты

Приведем необходимые для дальнейшего определения и результаты из [8], [9]. Рассмотрим бесконечную матрицу $A = (a_{i,j})_{i,j=1}^{\infty}$ из нулей и единиц. Данной матрице следующим образом ставится в соответствие счетная топологическая марковская цепь (ТМЦ). Пусть $\mathbf{N} = \{1, 2, \ldots\}$ — множество символов (алфавит) и пусть $\Omega_A \subset \mathbf{N}^{\mathbf{Z}}$ — множество всех бесконечных в обе стороны последовательностей $\underline{x} = (x_n)_{n=-\infty}^{+\infty}$ натуральных чисел, для которых при всех $n \in \mathbf{Z}$ выполняется

$$a_{x_n, x_{n+1}} = 1.$$

Метрика ρ на пространстве Ω_A вводится так:

$$\rho(\underline{x}, \underline{y}) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{1}{2^{|n|}} \mid \frac{1}{x_n} - \frac{1}{y_n} \mid . \tag{2.1}$$

ТМЦ (Ω_A, σ) есть топологическое (метрическое) пространство Ω_A, на котором действует отображение сдвига $\sigma \colon \Omega_A \to \Omega_A$, задаваемое формулой $\sigma(\underline{x}) = \underline{y}$, где $y_n = x_{n+1}$ для всех $n \in \mathbf{Z}$. Очевидно, метрика ρ согласована с топологией прямого (тихоновского) произведения на пространстве $\mathbf{N}^{\mathbf{Z}}$; здесь предполагается, что множество $\mathbf{N}$ наделено дискретной топологией.

Таким образом, пространство Ω_A некомпактно. Чтобы компактифицировать Ω_A, рассмотрим расширенный алфавит с дополнительным символом ∞, т.е. $\overline{\mathbf{N}} = \mathbf{N} \bigcup \{\infty\}$. Метрика на $\overline{\mathbf{N}}$ задается по формуле $d(n,m) = \mid \frac{1}{n} - \frac{1}{m} \mid$, где естественно предполагается, что $\frac{1}{\infty} = 0$. Далее рассматривается замыкание пространства Ω_A в $\overline{\mathbf{N}}^{\mathbf{Z}}$, т.е. $\overline{\Omega}_A = Clos(\Omega_A)$. Легко видеть, что на пространство $\overline{\Omega}_A$ корректно продолжается метрика ρ, задаваемая формулой (1), и, кроме того, $\overline{\Omega}_A$ является σ-инвариантным.

Мы всюду без ограничения общности предполагаем, что A — бесконечная матрица из нулей и единиц, не имеющая ни нулевых строк, ни нулевых столбцов (иначе соответствующий символ следует исключить из алфавита). Далее, мы предполагаем, что для матрицы A определены (конечны) все положительные степени, т.е. A^k, i.e. $a_{i,j}^{(k)} < +\infty$ при любых i, j, k. Для $I \subset \mathbf{N}$ мы обозначаем через $A|_I$ подматрицу матрицы A с индексным множеством I. Для простоты записи мы обозначаем через $A|_n$ конечную подматрицу $A|_{\{1,2,\ldots,n\}}$, а через $\hat{A}|_k$ — бесконечную подматрицу $A|_{\{k,k+1,\ldots\}}$.

Матрица A называется неразложимой, если для любых $i, j \in \mathbf{N}$ найдется натуральное число k такое, что $a_{i,j}^{(k)} > 0$. В противном случае матрица A разложима. Точно так же, как и в случае конечных ТМЦ (см., например, [12]), доказывается, что неразложимость матрицы A эквивалентна транзитивности системы (Ω_A, σ). Для неразложимой матрицы A обозначим через $d = d(A)$ её индекс цикличности (период). В случае $d > 1$ множество индексов $\mathbf{N}$ можно разбить на d подмножеств $I_1, I_2, \ldots I_d$ так, что для любых двух индексов $i \in I_s, j \in I_t$ будет существовать $k > 0$, удовлетворяющее условию $a_{i,j}^{(k)} > 0$, в том и только в том случае, когда $k \equiv (s-t) \mathbf{mod}\ d$.

Пусть $h(A)$ — топологическая энтропия сдвига σ на компактификации $\overline{\Omega}_A$. Для конечной матрицы B обозначим через $h(B)$ топологическую энтропию ограничения $h(\sigma|\Omega_B)$. Б.М. Гуревич показал (см. [14], [15]), что для неразложимой матрицы A существует последовательность конечных неразложимых подматриц $A|_{J_n}$, такая, что

$$J_n \subset J_{n+1} \text{ для всех } n, \ \bigcup J_n = \mathbf{N} \tag{2.2}$$

и выполняется

$$h(A) = \lim_{n\to\infty} h(A|_{J_n}) = \lim_{n\to\infty} h(A|_n). \tag{2.3}$$

В работе [7] доказано, что равенство $h(A) = \lim_{n\to\infty} h(A|_n)$ справедливо и для разложимых матриц. Для разложимой матрицы A и индекса $i \in \mathbf{N}$ обозначим через $I(i)$ максимальное подмножество (возможно, пустое) $J \subset \mathbf{N}$ такое, что $i \in J$ и матрица $A|_J$ неразложима, т.е.

$$I(i) = \{j \in \mathbf{N}\colon \exists k_1 > 0, \exists k_2 > 0 \text{ т.ч. } a_{ij}^{(k_1)} > 0, a_{ji}^{(k_2)} > 0\}.$$

Обозначим для простоты матрицу $A|_{I(i)}$ через A_i. Заметим, что если множество $I(i)$ конечно, то $\overline{\Omega}_{A_i} = \Omega_{A_i}$, где запись $\overline{\Omega}_{A_i}$ означает замыкание множества Ω_{A_i} в пространстве $\overline{\Omega}_A$.

В работе [7] показано также, что неблуждающее множества компактификации $(\overline{\Omega}_A, \sigma)$ имеет следующее разложение (в формулировке использовано обозначение $(\infty) = (\ldots\infty\infty\infty\ldots) \in \overline{\mathbf{N}}^{\mathbf{Z}}$):

Теорема 2.1. *Неблуждающее множество отображения сдвига σ на компактификации $\overline{\Omega}_A$ представляется в виде*

$$NW(\sigma|\overline{\Omega}_A) = (\bigcup \overline{\Omega}_{A_i}) \bigcup P,$$

где $P = (\infty)$, когда индексное множество $I(i)$ конечно для всех i, и $P = \emptyset$ в противном случае.

Нам потребуются некоторые соотношения для производящих функций, ассоциированных с матрицей A. Для произвольных индексов i, j эти функции определяются следующим образом):

$$T_{i,j}(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_{i,j}^{(k)} z^k; \quad F_{i,j}(z) = \sum_{k=0}^{\infty} f_{i,j}^{(k)} z^k; \quad L_{i,j}(z) = \sum_{k=0}^{\infty} l_{i,j}^{(k)} z^k \tag{2.4}$$

где $a_{i,j}^{(0)} = \delta_{i,j}; f_{i,j}^{(0)} = l_{i,j}^{(0)} = 0; a_{i,j}^{(1)} = f_{i,j}^{(1)} = l_{i,j}^{(1)} = a_{i,j}$

$$a_{i,j}^{(k+1)} = \sum_n a_{i,n}^{(k)} a_{n,j}; \quad f_{i,j}^{(k+1)} = \sum_{n\neq j} a_{i,n} f_{n,j}^{(k)}; \quad l_{i,j}^{(k+1)} = \sum_{n\neq i} l_{i,n}^{(k)} a_{n,j}$$

Справедливы соотношения (см. [16]):

$$T_{i,i}(z) = 1/(1 - F_{i,i}(z)) = 1/(1 - L_{i,i}(z)) \tag{2.5}$$

$$T_{i,j}(z) = T_{i,i}(z) \cdot L_{i,j}(z) = F_{i,j}(z) \cdot T_{j,j}(z), \quad (i \neq j) \tag{2.6}$$

$$F_{i,j}(z) = za_{i,j}(1 - F_{j,j}(z)) + z\sum_{k=0}^{\infty} a_{i,k} F_{k,j}(z); \; L_{i,j}(z) = z\sum_{k=0}^{\infty} L_{i,k}(z) a_{k,j} + za_{i,j}(1 - L_{i,i}(z)) \tag{2.7}$$

$$\sum_{k=0}^{\infty} L_{i,k}(z) F_{k,i}(z) = z\frac{dF_{ii}(z)}{dz} - F_{ii}(z) \cdot (1 - F_{ii}(z)) \tag{2.8}$$

Мы будем также обозначать данные функции $T_{i,j}(A,z), F_{i,j}(A,z), L_{i,j}(A,z)$, когда требуется подчеркнуть зависимость от A. Напомним некоторые свойства неразложимых матриц (см. [16]). Для любых $i, j \in \mathbf{N}$ существует предел $\lim(a_{i,j}^{(k)})^{-1/k}$, когда $k \to \infty$, находясь в таком подмножестве индексов I_m, для которого не все степени $a_{i,j}^{(k)}$ равны нулю.

Этот предел, скажем, R, не зависит от i, j и, кроме того, он равен радиусу сходимости ряда $\sum_{k=1}^{\infty} a_{i,j}^{(k)} z^k$. Число $R = R(A)$ называется *параметром сходимости* матрицы A.

Неразложимая матрица A с параметром сходимости R называется R-*рекуррентной*, если ряд $\sum_{k=1}^{\infty} a_{i,j}^{(k)} R^k$ расходится, т.е. $T_{i,j}(R) = \infty$. Если, кроме того, $a_{i,j}^{(k)} R^k$ не стремится к нулю при $k \to \infty$, то A называется R-*положительной* (и это определение корректно, т.к. не зависит от i, j в силу неразложимости матрицы A).

Пусть $r(A)$ — радиус сходимости дзета-функции, т.е. $r(A) = (\overline{\lim}_{k\to\infty} \sqrt[k]{N_k(A)})^{-1}$. Имеют место следующие свойства.

Л е м м а 2.1. [8] *Если A — неразложимая бесконечная матрица, то $r(A) \leq R(A) < 1$.*

Обобщением на разложимые матрицы является следующая лемма.

Л е м м а 2.2. [8] *Для бесконечной матрицы A выполняется*

$$r(A) \leq \exp(-h(A)). \tag{2.9}$$

Л е м м а 2.3. [8] *Последовательность дзета-функций $\zeta_{A|_n}(z)$ при $n \to \infty$ сходится к $\zeta_A(z)$ равномерно в любом диске $|z| \leq r_0 < r(A)$.*

Обозначим через $R_{i,j} = R_{i,j}(A)$ радиус сходимости ряда $T_{i,j}(z)$ (здесь в случае разложимой матрицы A параметр сходимости R_{ij} может зависеть от i, j).

Л е м м а 2.4. [8] *Для любых $i, j \in \mathbf{N}$ последовательность $T_{i,j}(A|_n, z)$ сходится равномерно к $T_{i,j}(z)$ в любом замкнутом диске $|z| \leq R_0$, where $R_0 < R_{i,j}$.*

Для произвольной матрицы B (над $\mathbf{C}$) обозначим через $B^*_{i,j}$ подматрицу, которая получается из B удалением i-ой строки и j-го столбца. Аналогично, для подмножеств $I, J \subset \mathbf{N}$ пусть $B^*_{I,J}$ обозначает матрицу, которая получается из B удалением строк и столбцов с индексами, принадлежащими I и J соответственно. Из этих определений нетрудно получить соотношение:

$$\zeta_A(z) = \zeta_{A^*_{i,i}}(z) \cdot T_{ii}(z). \tag{2.10}$$

Теперь рассмотрим бесконечные подматрицы $\hat{A}|_n = A|_{\{n,n+1\ldots\}}$. Очевидно, что $r(\hat{A}|_n) \leq r(\hat{A}|_{n+1})$ при всех n. Мы будем использовать естественное ограничение на матрицу A, определяемое условием:

$$\lim_{n\to\infty} r(\hat{A}|_n) > r(A). \qquad (*)$$

Основная теорема о совпадении инвариантов энтропийного типа для счетных ТМЦ с матрицей переходов, удовлетворяющей условию $(*)$, состоит в следующем:

Т е о р е м а 2.2. [8] *Если матрица переходов A удовлетворяет условию $(*)$, то*

$$r(A) = \exp(-h(A)) = \lim_{n\to\infty} r(A|_n) = \inf_j R_{j,j}(A) = \inf_i R(A_i) = \inf_i r(A_i),$$

и более того, все нижние грани в указанных соотношениях достигаются.

Теперь будем предполагать, что выполнено и второе условие — условие (**)

$$\zeta_{\hat{A}|_n}(z) \text{ мероморфна в диске } |z| < r(A) + \varepsilon \text{ для некоторого } \varepsilon > 0 \text{ при всех } n \qquad (**)$$

Будем говорить, что бесконечная матрица B (над $\mathbf{C}$) имеет сходящийся определитель, если последовательность определителей $\det B|_n$ сходится.

Л е м м а 2.5. *([8]) Для любой точки z_0 из открытого круга сходимости ряда ζ_A матрица $E - z_0 A$ имеет сходящийся определитель (здесь E — единичная матрица); более того, выполняется*

$$\det(E - z_0 A) = \frac{1}{\zeta_A(z_0)} \tag{2.11}$$

Л е м м а 2.6. *([8]) Для любых $i, j \in \mathbf{N}$ и любой точки z_0 из диска $|z| \leq \min(R_{j,i}(A), r(A))$ матрица $(E - zA)^*_{i,j}$ имеет сходящийся определитель. Более того, выполняется*

$$\det(E - zA)^*_{i,j} = (-1)^{i+j} T_{j,i}(z) \det(E - zA). \tag{2.12}$$

Используя следующие обозначения

$$\Delta_{i,j}(z) = (-1)^{i+j} \det(E - zA)^*_{i,j}; \quad \Delta(z) = det(E - zA)$$

можно записать соотношение последней леммы в виде

$$\Delta_{i,j}(z) = T_{j,i}(z) \cdot \Delta(z). \tag{2.13}$$

Т е о р е м а 2.3. *([9]) Пусть A — неразложимая матрица периода d с параметром сходимости R и пусть для A выполняются условия $(*)$ и $(**)$. Тогда*
i) A является R-положительной матрицей;
ii) дзета-функция $\zeta_A(z)$ имеет ровно d полюсов на окружности $|z| = R$, а именно, $z_j = R\exp(2\pi ij/d), j = 0, 1, \ldots, d-1$, и все эти полюса простые.

3. Аппроксимация максимальных мер

Таким образом, в силу теоремы 2.3. мы имеем неразложимую ТМЦ с R-положительной матрицей A, и поэтому, как следует из результатов Б.М. Гуревича, данная ТМЦ (Ω_A, σ) обладает единственной мерой μ^* с максимальной энтропией. Нам потребуются следующие леммы о свойствах производящих функций $F_{i,j}(z)$ и $L_{i,j}(z)$.

Л е м м а 3.1. *Если неразложимая матрица A удовлетворяет условиям $(*)$ и $(**)$, то*
i) радиус R_1, сходимости ряда $F_{1,1}(z)$ больше, чем R;
ii) при любом $k \in \mathbf{N}$ ряды $F_{k,1}(z)$ и $L_{1,k}(z)$ сходятся в открытом диске $|z| < R_1$;
iii) функция $\sum_{k=0}^{\infty} F_{k,1}(z) L_{1,k}(z)$ голоморфна в диске $|z| < R_1$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Как следует из доказательства теоремы 2.3. (см. [9]), функция $T_{1,1}(z)$ мероморфна в диске $|z| < r(A) + \varepsilon_0$, а значит, в этом диске мероморфна и функция $F_{1,1}(z) = 1 - (T_{1,1}(z))^{-1}$. Отсюда следует, что $F_{1,1}(z)$ не имеет полюсов на окружности circle $|z| = R$. Таким образом, первое утверждение доказано.

Докажем второе утверждение. Для этого рассмотрим тождество (2.7) при $i = j = 1$ для вещественных значений $z \in (0, R)$. Тогда для ненулевых элементов $a_{1,k_0} \neq 0$ будем иметь $F_{k_0,1}(z) \neq \infty$ и далее применим (2.7) при $i = k_0, j = 1$. Если $a_{k_0,k_1} \neq 0$, то $F_{k_1,1}(z) \neq \infty$ при всех $z \in (0, R_1)$. По индукции получаем, учитывая неразложимость матрицы A, что значение $F_{k,1}(z)$ конечно при всех $k \in \mathbf{N}, z \in (0, R_1)$. Поскольку все коэффициенты степенного ряда $F_{k,1}(z)$ неотрицательны, второе утверждение леммы относительно $F_{k,1}(z)$ доказано. Аналогичный результат справедлив относительно $L_{1,k}(z)$ в силу второго соотношения в тождестве (2.7).

Третье утверждение леммы следует из второго утверждения и соотношения (2.8) при $i = 1$.

Доказательство закончено.

Замечание 3.1. *Аналогичные утверждения справедливы, если зафиксировать $m_0 \in \mathbf{N}$ и заменить $F_{k,1}(z)$ и $L_{1,k}(z)$ на $F_{k,m_0}(z)$ и $L_{m_0,k}$, соответственно.*

Лемма 3.2. *Если неразложимая матрица A удовлетворяет условиям $(*)$ и $(**)$, то*

$$\lim_{n\to\infty} F_{j,i}(A|_n, z) = F_{j,i}(A, z) \tag{3.1}$$

при всех $i, j \in \mathbf{N}$ и всех значениях z в диске $|z| < R_i$, где $R_i > R$ — радиус сходимости ряда $F_{i,i}(A, z)$; более того, сходимость данного ряда равномерная на любом компактном подмножестве этого диска.

Результат данной леммы следует из леммы 8 работы [8] (так как коэффициенты ряда $F_{j,i}(A|_n, z)$ стабилизируются и становятся равными коэффициентам ряда $F_{j,i}(A, z)$.

Лемма 3.3. *Если неразложимая матрица A удовлетворяет условиям $(*)$ и $(**)$, то*

$$\lim_{n\to\infty} \Delta_{i,j}(A|_n, z) = \Delta_{i,j}(A, z) \tag{3.2}$$

для всех $i, j \in \mathbf{N}$ и всех значений z в диске $|z| < R_i'$, где $R_i' = \min(r(A^*_{i,i}), R_i) > R$, а R_i — радиус сходимости ряда $F_{ii}(A, z)$; более того, сходимость данного ряда равномерная на любом компактном подмножестве этого диска.

Доказательство. При $i = j$ результат следует из леммы 2.5. в применении к матрице A^*_{ii}. В этом случае $\Delta_{i,i}(A, z) = 1/\zeta_{A^*_{ii}}(z)$ и требуемое равенство выполняется для всех z из диска $|z| < r(A^*_{ii})$ (заметим, что его радиус больше, чем R).

При $i \neq j$ из (2.6) и (2.13) получаем

$$\Delta_{i,j}(z) = \Delta_{i,i}(z) \cdot F_{j,i}(z) \tag{3.3}$$

В применении к матрице A, из равенства 3.3 следует сходимость ряда $\Delta_{i,j}(A, z)$ в диске $|z| < R_i'$, так как правая часть 3.3 в силу доказанного, представляет собой ряд, сходящийся в этом диске. В применении к матрице $A|_n, n \to \infty$, равенство (3.3) доказывает лемму.

Доказательство закончено.

Лемма 3.4. *Если неразложимая матрица A удовлетворяет условиям $(*)$ и $(**)$, то*

i) для достаточно больших n у матрицы $A|_n$ максимальное собственное значение равно $1/r(A|_n)$, причем это собственное значение простое;

ii) компоненты левого и правого собственных векторов $\overline{\alpha}^{(n)} = (\alpha_i^{(n)})_{i=1}^n, \overline{\beta}^{(n)} = (\beta_i^{(n)})_{i=1}^n$, соответствующих собственному значению $1/r(A|_n)$ of $A|_n$ и нормированных согласно равенству $\alpha_1^{(n)} = \beta_1^{(n)} = 1$, при $n \to \infty$ сходятся к компонентам левого и правого собственных векторов, соответствующим собственному значению $1/R$ иатрицы A.

Доказательство. Первое утверждение следует из теоремы Фробениуса-Перрона и результата работы [7] для нетранзитивных ТМЦ.

Пусть $\overline{\beta} = (F_{i,1}(A,R))_{i=1}^{\infty}$. В силу рекуррентности матрицы A имеем, что $\overline{\beta}$ — ее правый собственный вектор, соответствующий собственному значению $1/R$ (см. равенство (2.7)). Покажем, что $\overline{\beta}^{(n)} \to \overline{\beta}$ при $n \to \infty$.

Имеем

$$\lim_{n\to\infty} \Delta_{1,1}(A|_n, r(A|_n)) = \Delta_{1,1}(A,R) = \frac{1}{\zeta_{A^*_{1,1}}(R)} > 0$$

(здесь мы пользуемся доказанной ранее равномерной сходимостью и тем фактом, что $r(A|_n) \to R$). Далее, заметим, что для любой конечной $n \times n$ матрицы B, имеющей собственное значение $\lambda \neq 0$, такое, что $\Delta_{1,1}(B, \frac{1}{\lambda}) \neq 0$, вектор $\Delta_{1,i}(B, \frac{1}{\lambda}))_{i=1}^{n}$ является собственным. Поэтому для достаточно больших n вектор $\Delta_{1,i}(A|_n, r(A|_n))_{i=1}^{n}$ — правый собственный вектор матрицы $A|_n$, соответствующий собственному значению $1/r(A|_n)$. Таким образом, для таких n и $i = 1, \ldots, n$ из нормировки $\beta_1^{(n)} = 1$ и равенства (2.13) следует, что

$$\beta_i^{(n)} = \frac{\Delta_{1,i}(A|_n, r(A|_n))}{\Delta_{1,1}(A|_n, r(A|_n))} = F_{i,1}(A|_n, r(A|_n)) \tag{3.4}$$

Отсюда, учитывая равномерную сходимость, получаем результат леммы для правых собственных векторов. Результат для левых собственных векторов аналогичен: $\alpha_i^{(n)} \to L_{1,i}(A,R)$ when $n \to \infty$.

Доказательство закончено.

Теперь мы докажем основной результат работы для меры с максимальной энтропией μ^* системы (Ω_A, σ), аппроксимируемой максимальными мерами конечных ТМЦ $(\Omega_{A|_n}, \sigma)$. Поскольку $1/r(A|_n)$ есть простое собственное значение матрицы $A|_n$ для достаточно больших n, ТМЦ $(\Omega_{A|_n}, \sigma)$ имеет единственную меру с максимальной энтропией. Эта мера сосредоточена на Ω_{H_n}, где H_n — единственная подматрица матрицы $A|_n$ с параметром сходимости $r(A|_n)$. Пусть ν_n — продолжение этой меры на Ω_A, т.е. $\nu_n(D) = \nu_n(D \bigcap \Omega_{A|_n}) = \nu_n(D \bigcap \Omega_{H_n})$ для всех борелевских множеств $D \subset \Omega_A$.

Теорема 3.1. *Если неразложимая матрица A удовлетворяет условиям $(*)$ и $(**)$, то последовательность ν_n сходится в слабой топологии к единственной мере μ^* с максимальной энтропией ТМЦ (Ω_A, σ).*

Доказательство. В силу теоремы 2.1. достаточно доказать, что $\lim_{n\to\infty} \nu_n(B) = \mu^*(B)$ для всех цилиндрических множеств $B \subset \Omega_A$. Пусть $B = [j_0, \ldots, j_m]_N^{N+m}$ и пусть n_0 выбрано так, что при $n > n_0$ индексное множество H_n содержит числа $1, 2, \ldots, \max(j_0, \ldots, j_m)$). Пусть $\overline{\alpha}^{(n)}, \overline{\beta}^{(n)}$ — собственные векторы (левый и правый), соответствующие собственному значению $1/r(A|_n)$ of $A|_n$ с нормировкой $\alpha_1^{(n)} = \beta_1^{(n)} = 1$. Тогда

$$\nu_n(B) = \nu_n(B \bigcap \Omega_{H_n}) = \frac{\alpha_{j_0}^{(n)} \cdot \beta_{j_m}^{(n)}}{\sum_{k=1}^{n} \alpha_k^{(n)} \beta_k^{(n)}} (r(A|_n))^m; \qquad \mu^*(B) = \frac{\alpha_{j_0}\beta_{j_m}}{\sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k \beta_k} R^m$$

Тогда из формулы (3.4) (и аналогичной формулы для левых собственных векторов) имеем:

$$\beta_k^{(n)} = F_{k,1}(A|_n, r(A|_n)); \quad \alpha_k^{(n)} = L_{1,k}(A|_n, r(A|_n))$$

При нормировке собственных векторов $\overline{\alpha}, \overline{\beta}$ согласно условию $\alpha_1 = \beta_1 = 1$, в силу леммы 3.4. получим: $\beta_k = F_{k,1}(A,R), \alpha_k = L_{1,k}(A,R)$ и $\beta_k^{(n)} \to \beta_k$, $\alpha_k^{(n)} \to \alpha_k$. Таким образом, остается показать, что $\sum_{k=1}^{n} \alpha_k^{(n)} \beta_k^{(n)} \to \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k \beta_k$ при $n \to \infty$.

Зафиксируем x_0, где $R < x_0 < R_1$. Тогда из третьего утверждения леммы 3.1. следует, что ряд $\sum_{k=1}^{\infty} F_{k,1}(A, x_0)L_{1,k}(A, x_0)$ сходится. Для достаточно больших n имеем: $r(A|_n) < x_0$ и

$$\beta_k^{(n)} = F_{k,1}(A|_n, r(A|_n)) \leq F_{k,1}(A, r(A|_n)) \leq F_{k,1}(A, x_0)$$

при всех $k = 1, \ldots, n$. Аналогично, $\alpha_k^{(n)} \leq L_{1,k}(A, x_0)$. Тогда по теореме Лебега о сходимости ограниченных функций получаем результат теоремы.
Доказательство закончено.

Работа выполнена при поддержке РФФИ, грант 15-01-03687.

Список литературы

1. R. Bowen, *Equlibrium states and the ergodic theory of Anosov diffeomorphisms Lecture Notes Math.*, Springer-Verlag, Berlin-N.Y., 1975.

2. W. de Melo, S. van Strien, *One-Dimensional Dynamics*, Springer-Verlag, New York, 1993.

3. L. A. Bunimovich, N. I. Chernov, Ya. G. Sinai, “Markov partitions for two-dimensional hyperbolic billiards”, *Uspekhi Matem. Nauk*, **45** (1990), 97–134.

4. Y. Guivarch, J. Hardy, “Theorem limites pour une classe de chaines de Marcov et applications aux classe de chaines de Marcov et applications aux diffeomorphismes d’Anosov”, *Ann. Inst. H.Poincare Probab. Statist.*, **24** (1988), 73–98.

5. F. Hofbauer, “On intrinsic ergodicity of piecewise monotone transformations with positive entropy”, *Israel J. Math.*, **34** (1979), 213–236.

6. M. Malkin, “On continuity of entropy of discontinuous mappings of the interval in Selecta Mathematica Sovietica”, **8** (1989), 131–139.

7. М.И. Малкин, “Разложение неблуждающего множества для нетранзитивных счетных топологических марковских цепей”, *Журнал СВМО*, **15** (2013), 49–54.

8. М.И. Малкин, “Инварианты энтропийного типа для нетранзитивных счетных топологических марковских цепей”, *Журнал СВМО*, **15** (2013), 148–155.

9. М.И. Малкин, “Хаотическое поведение счетных топологических марковских цепей с мероморфной дзета-функцией”, *0 Журнал СВМО*, **16** (2014), 175–183.

10. J.Milnor, W.Thurston, *Dynamical Systems, Proc., 1986-87 (J.C.Alexander,Ed.). Lec. Notes Math.*, **1342**, Springer-Verlag, Berlin-N.Y., 1988.

11. В.С. Афраймович, В.В. Быков, Л.П. Шильников, “О притягивающих негрубых предельных множествах типа аттрактора Лоренца”, *Труды ММО*, **44** (1982), 150–212.

12. А.Б. Каток, Б. Хассельблат, *Введение в современную теорию динамических систем*, Факториал, М., 1999.

13. M.-C.Li, M.Malkin, “Smooth symmetric and Lorenz models for unimodal maps”, *Int. Jour. of Bifurcation and Chaos*, **13** (2003), 3353–3372.

14. Б.М. Гуревич, “Топологическая энтропия счетной цепи Маркова”, *ДАН СССР*, **187** (1969), 715–718.

15. Б.М. Гуревич, “Энтропия сдвига и марковские меры в пространстве счетного графа”, *ДАН СССР*, **192** (1970), 963–965.

16. D. Vere-Jones, “Ergodic properties of nonnegative matrices”, *Pacific Journ. Math.*, **22** (1967), 361–386.

Approximation of maximal measures for countable topological Markov chains with meromorphic zeta function

© **M.I. Malkin**[2]

Abstract. Countable topological Markov chains (TMC) are considered. It is assumed that powers of the transition matrix of TMC have finite traces and so, for TMC, the dynamical (Artin-Mazur) zeta-function is well defined. It is also assumed that the following two conditions are fulfilled: 1) the raduis of convergence of TMC associated with submatrices with big indexes is bigger than $r(A)$, the the raduis of convergence of the initial countable transition matrix A, 2) zeta-function of the TMC is meromorphic in a disc of radius bigger than $r(A)$. Such conditions are satisfied, in particular, for countable TMC being symbolic models of one dimensional piecewise monotonic maps with positive topological entropy. In the paper it is shown that under these condition, an irreducible TMC has a unique measure with maximal entropy, which can be approximated (in the weak topology) by maximal measures of finite TMCs as subsistems of the initial one.

Key Words: Topological Markov chains, topological entropy, dynamical zeta-function, maximal measures

[2] Associate Professor of department of differential equations and mathematical analysis, Lobachevsky State University of Nizhny Novgorod, Nizhny Novgorod; malkin@unn.ru