УДК 517.9

Топологически псевдокогерентные диффеоморфизмы 3-многообразий

© В. З. Гринес[1], О. В. Починка[2], А. А. Шиловская[3]

Аннотация. В настоящей работе рассматривается класс топологически псевдокогерентных гомеоморфизмов 3-многообразий. Такие отображения являются топологически когерентными всюду кроме конечного числа окружностей. Доказывается, что каждый гомеоморфизм рассматриваемого класса топологически сопряжен полупрямому произведению псевдоаносовского гомеоморфизма и грубого преобразования окружности

Ключевые слова: Топологическая псевдокогерентность, псевдоаносовский гомеоморфизм, топологическая сопряженность

1. Введение

В настоящей работе изучается динамика гомеоморфизмов f из класса G, заданных на гладком замкнутом 3-многообразии M^3, таких что:

- неблуждающее множество $NW(f)$ является объединением двумерных ручно вложенных ориентированных поверхностей рода $p > 1$ и таких, что для некоторого $k \geq 1$ каждая поверхность является инвариантным аттрактором или репеллером[4] для f^k;
- ограничение f на $NW(f)$ является экспансивным отображением[5].

Изучение гомеоморфизмов данного типа представляет интерес в связи с тем, что они хотя и не обладают свойством структурной устойчивости, тем не менее они объемлюще Ω-сопряжены с модельными гомеоморфизмами из класса Φ (определение и соответсвующий результат см. ниже), в сколь угодно малой окрестности каждого из которых существует структурно устойчивый гомеоморфизм с неблуждающим множеством, состоящим из конечного числа одномерных базисных множеств и конечного числа периодических точек. Последнее объясняется тем, что в силу работ [18] и [16] ограничение некоторой степени исходного гомеоморфизма на каждую из поверхностей топологически сопряжено с псевдоаносовским гомеоморфизмом, из которого согласно [14] с помощью хирургической операции может быть построен структурно устойчивый диффеоморфизм двумерной поверхности с одномерным тривиальным аттрактором (репеллером) и конечным числом источников.

[1] Профессор кафедры численного и функционального анализа, ННГУ им. Н.И. Лобачевского, г. Нижний Новгород; vgrines@yandex.ru

[2] Профессор кафедры фундаментальной математики, НИУ ВШЭ, г. Нижний Новгород; olga-pochinka@yandex.ru

[3] Аспирант кафедры численного и функционального анализа, ННГУ им. Н.И. Лобачевского, г. Нижний Новгород; a.shilovskaia@gmail.com

[4] Напомним, что инвариантное множество $\mathcal{B}$ гомеоморфизма g называется *аттрактором*, если существует замкнутая окрестность U множества $\mathcal{B}$ такая, что $g(U) \subset int\ U$, $\bigcap\limits_{j \geq 0} g^j(U) = \mathcal{B}$. Аттрактор для гомеоморфизма g^{-1} называется *репеллером* гомеоморфизма g.

[5] Гомеоморфизм f компактного метрического пространства (X, d) на себя называется *экспансивным*, если существует число $c > 0$ (*константа экспансивности*) такое, что для любых точек $x, y \in X$ существует $n \in \mathbb{Z}$ такое, что $d(f^n(x), f^n(y)) > c$.

Таким образом, результаты настоящей работы можно рассматривать как первый шаг в решении задачи топологической классификации структурно устойчивых диффеоморфизмов на 3-многообразиях, неблуждающие множества которых содержат одномерные базисные множества, принадлежащие объединению инвариантных ручно вложенных ориентируемых замкнутых поверхностей отрицательной эйлеровой характеристики.

Диффеоморфизмы с базисными множествами, топологическая размерность которых равна трем, были полностью изучены в конце 60-х годов прошлого века, а именно, было доказано, что они являются диффеоморфизмами Аносова, а многообразие M^3 есть трехмерный тор T^3. В работах [6], [22] Фрэнкса и Ньюхауса была получена топологическая классификация таких диффеоморфизмов (перевод работ смотри в [23]).

Один из первых результатов о топологической классификации A-диффеоморфизмов 3-мерного тора с двумерным неблуждающим множеством получен в работе [7], в которой рассматривались диффеоморфизмы n-мерного тора T^n, неблуждающие множества которых содержат ориентируемые растягивающиеся аттракторы коразмерности 1. Авторами было доказано, что действие таких диффеоморфизмов в группе гомологий тора является гиперболическим, а достижимая изнутри граница аттрактора состоит из двух граничных точек и их неустойчивых многообразий. Более того, были найдены необходимые и достаточные условия топологической сопряженности ограничений двух таких диффеоморфизмов на аттракторы коразмерности один. В дальнейшем изучение диффеоморфизмов с гиперболическими аттракторами коразмерности 1 было продолжено в работах Плыкина Р.В. [26], [27], [14]. В [26] и [27] была изучена топология многообразия, допускающего диффеоморфизмы с ориентируемыми растягивающимися аттракторами коразмерности 1 и доказано, что компактификация устойчивого многообразия аттрактора гомеоморфна n-тору, а каждый диффеоморфизм на этом многообразии топологически сопряжен DA-диффеоморфизму.

Изучение A-диффеоморфизмов трехмерных многообразий, неблуждающие множества которых содержат двумерные базисные множества, было продолжено в начале 2000-х годов. В работах [8], [9] Гринес и Жужома получили топологическую классификацию структурно-устойчивых диффеоморфизмов на M^n с ориентируемыми растягивающимися аттракторами (сжимающимися репеллерами) коразмерности 1 и доказали, что многообразие M^n гомотопно тору T^n (при $n \neq 4$ многообразие гомеоморфно тору T^n). В случае $n = 3$ была получена топологическая классификация диффеоморфизмов без требования ориентируемости базисных множеств.

Другой тип базисных множеств рассмотрен в работе [10], а именно, авторами было показано, что если базисное множество двумерно и лежит на двумерной поверхности (оно было названо поверхностным), то оно совпадает с носителем и является объединением конечного числа многообразий, каждое из которых ручно вложено в M^3 и гомеоморфно тору T^2, а ограничение некоторой степени диффеоморфизма на носитель сопряжено с гиперболическим автоморфизмом тора T^2. В силу Плыкина [25] такие базисные множества являются аттракторами и репеллерами. В серии работ [11], [12], [13] начиная с 2012 г. рассматривались A-диффеоморфизмы, заданные на замкнутых многообразиях размерности три, в предположении, что их нетривиальные двумерные базисные множества являются поверхностными. Для указанных диффеоморфизмов была изучена структура многообразия, построен класс модельных диффеоморфизмов, найдены топологические инварианты и проведена топологическая классификация.

В силу А.Брауна ([5]) любое двумерное базисное множество на 3-многообразии является либо растягивающимся аттрактором (сжимающимся репеллером), либо множеством, гомеоморфным двумерному тору, при этом ограничение сопряжено с гиперболическим автоморфизмом тора. Таким образом, вопрос о топологической классификации структурно устойчивых диффеоморфизмов с двумерными базисными множествами полностью решен.

Изучению диффеоморфизмов на M^3, неблуждающее множество которых содержит одномерные базисные множества, не лежащие на инвариантных замкнутых поверхностях, посвящен целый ряд работ [2], [3], [4], [29], [15] Бонатти, Боте, Вильямса, Жужомы, Исаенковой и др. При этом в работах [3], [4], [29], [15] базисные множества являлись одномерными растягивающимися аттракторами или сжимающимися репеллерами и не лежали на поверхностях, а диффеоморфизмы не были структурно устойчивыми. Вопрос существования структурно устойчивых диффеоморфизмов такого типа (с растягивающимся аттрактором) до сих пор остается открытым.

В работе [2] Х.Бонатти и Н. Гельман был изучен класс структурно устойчивых диффеоморфизмов, неблуждающее множество которого состоит в точности из одного одномерного аттрактора и одного репеллера, каждый из которых лежит на двумерной поверхности с непустым краем. Подчеркнем, что вопрос о топологической классификации вышеописанных диффеоморфизмов также не рассматривался.

2. Формулировка результатов

Пусть имеется гомеоморфизм f, заданный на M^3, и такой, что:

1) существует число $k \in \mathbb{Z}$ и конечное число двумерных ручно вложенных ориентируемых замкнутых поверхностей $\mathcal{B}_1 \dots \mathcal{B}_m$, $m \geq 1$, объединение которых содержит множество неблуждающих точек;

2) для некоторого $k \geq 1$ каждая поверхность является аттрактором или репеллером для f^k.

Предложение 2.1. *Для гомеоморфизма f множество $M^3 \setminus \bigcup\limits_{i=1}^{m} \mathcal{B}_i$ имеет m компонент связности, замыкание каждой из которых гомеоморфно $M^2 \times [0;1]$, где M^2 ориентируемая поверхность рода $p \geq 0$, и граница каждой компоненты состоит в точности из одного аттрактора и репеллера.*

Из утверждения 2.1 следует, что $m \geq 2$.

Предложение 2.2. *Если многообразие M^3 допускает гомеоморфизм f, удовлетворяющий условиям 1), 2) выше, то оно является локально-тривиальным расслоением*[6] *над окружностью со слоем гомеоморфным поверхности M^2.*

Пусть теперь f гомеоморфизм из класса G. Тогда все аттракторы и репеллеры, содержащие неблуждающее множество, гомеоморфны замкнутой поверхности M^2. Обозначим через $\mathcal{A}$ $(\mathcal{R})$ объединение притягивающих (отталкивающих) поверхностей. На каждой такой поверхности гомеоморфизм f^k топологически сопряжен с псевдоаносовским гомеоморфизмом.

Напомним, что гомеоморфизм $h : M^2 \to M^2$ называется *псевдоаносовским отображением (pA-гомеоморфизмом)*, если на поверхности M^2 существует пара h-инвариантных трансверсальных слоений F^s, F^u с множеством седловых особенностей S и трансверсальными мерами μ^s, μ^u такая, что:

[6] Локально тривиальным расслоением называется четверка (E, B, F, p), где E, B, F — пространства, а $p : E \to B$ отображение такое, что любая точка $x \in B$ обладает такой окрестностью $U \subset B$, что $p^{-1}(U) \approx U \times F$; более того, существует гомеоморфизм $\varphi : p^{-1}(U) \to U \times F$. Будем называть E тотальным пространством, B — базой, F — слоем.

1) каждая седловая особенность из S имеет не менее трех сепаратрис;

2) существует число $\lambda > 1$ такое, что $\mu^s(h(\alpha)) = \lambda\mu^s(\alpha)$ $(\mu^u(h(\alpha)) = \lambda^{-1}\mu^u(\alpha))$ для любой дуги α, трансверсальной F^s (F^u).

Слоения F^s, F^u называются *устойчивым и неустойчивым* соответсвенно, а число λ – *дилатацией* f.

Для гомеоморфизма $f \in G$ обозначим через $\mathcal{S}$ множество седловых особенностей. Для каждой точки $x \in (\mathcal{A} \cup \mathcal{R}) \setminus \mathcal{S}$ определим устойчивое $W^s(x)$ и неусточивое $W^u(x)$ многообразия следующим образом:
$W^s(x) = \{y \in M^3 : d(f^n(x), f^n(y)) \to 0, n \to \infty\}$, и $W^u(x) = \{y \in M^3 : d(f^n(x), f^n(y)) \to 0, n \to -\infty\}$.

Определение 2.1. *Гомеоморфизм $f \in G$ называется топологически псевдокогерентным, если выполняются следующие условия:*

1. *в каждой компоненте связности V множества $M^3 \setminus (\mathcal{A} \cup \mathcal{R})$, содержащей аттрактор $A \subset \mathcal{A}$ и репеллер $R \subset \mathcal{R}$ в своем замыкании существует конечное число дуг $l_1, \dots, l_r$, каждая из которых имеет в точности две граничные точки, одна из которых принадлежит $\mathcal{A} \cap \mathcal{S}$, другая $\mathcal{R} \cap \mathcal{S}$, и множества $\{W^s(x), x \in A\}, \{W^u(y), y \in R\}$ являются слоениями на $V \setminus (l_1 \cup \dots \cup l_r)$;*

2. *если пересечение $W^s(x) \cap W^u(y)$ не пусто для некоторых точек $x \in \mathcal{A}, y \in \mathcal{R}$, то каждая компоненты связности пересечения $W^s(x) \cap W^u(y)$ является открытой дугой, имеющей в точности две граничные точки, одна из которых принадлежит $\mathcal{A}$, другая $\mathcal{R}$;*

3. *на M^3 существует непрерывное f-инвариантное одномерное слоение $\mathcal{L}_f$, каждый слой которого есть объединение замыканий всех дуг, определенных в 1.*

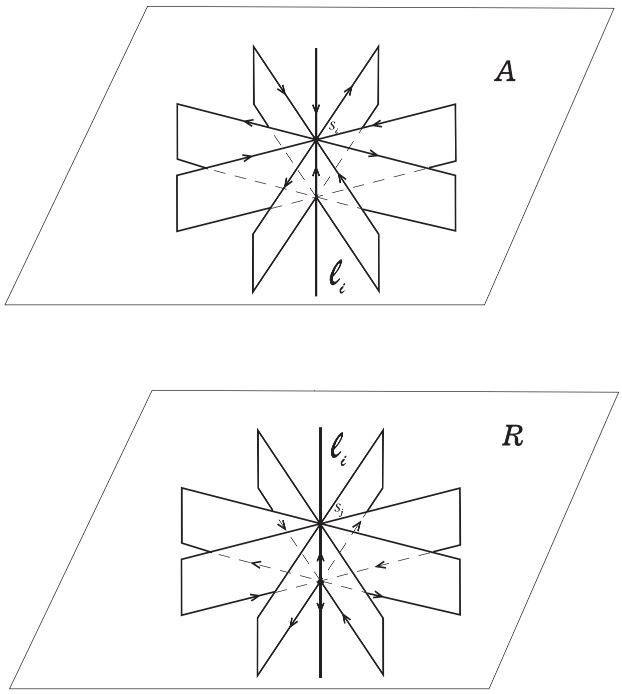

Рисунок **2.1**

Устойчивые и неустойчивые слоения в окрестности особенности

Опишем класс Φ модельных топологически псевдокогерентных гомеоморфизмов, которые являются локально прямым произведением псевдоаносовского гомеоморфизма P и грубого преобразования φ окружности $\mathbb{S}^1$.

Для построения моделей рассмотрим окружность $\mathbb{S}^1 = \{e^{i2\pi r} = (cos2\pi r, sin2\pi r) \in \mathbb{R}^2 : r \in \mathbb{R}\}$ и обозначим через $\pi : \mathbb{R} \to \mathbb{S}^1$ естественную проекцию, заданную формулой $\pi(r) = e^{i2\pi r}$. Введем следующие отображения:
$\psi_m : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ сдвиг на единицу времени потока $\dot{r} = \sin(2\pi m r)$, $m \in \mathbb{N}$;
$\chi_{k,l} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ диффеоморфизм, заданный формулой $\chi_{k,l}(r) = r - \frac{l}{k}$, $k \in \mathbb{N}$ — период, $l \in \{1 \dots k-1\}$;
$\tilde{\varphi} = \chi_{k,l}\psi_{n\cdot k} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.
Тогда корректно определен структурно устойчивый диффеоморфизм $\varphi = \pi\tilde{\varphi}\pi^{-1} : \mathbb{S}^1 \to \mathbb{S}^1$, неблуждающее множество которого состоит из $2n$ гиперболических орбит периода k.

Используя $\tilde{\varphi}(z,r)$ и гомеоморфизм $J : M^2 \to M^2$ такой, что $JP = PJ$, построим модельный диффеоморфизм ϕ на многообразии $M_J = (M^2 \times \mathbb{R})/\Gamma$, где циклическая группа Γ образована отображением $\gamma(z,r) = (J(z), r-1)$.

Обозначим за $\tilde{\phi} : M^2 \times \mathbb{R} \to M^2 \times \mathbb{R}$ отображение, задаваемое следующим образом $\tilde{\phi}(z,r) = (J(z), \tilde{\varphi}(r))$. Для $\tilde{\phi}$ выполняется равенство $\tilde{\phi}\gamma = \gamma\tilde{\phi}$. Отсюда следует, что можно задать на M_J диффеоморфизм $\phi : M_J \to M_J$, коммутирующий с $\gamma(z,r) = (J, r-1)$, либо с γ^{-1}, как $\phi = p_J\tilde{\phi}p_J^{-1}$, где p_J — естественная проекция $M^2 \times \mathbb{R} \to M_J$.

Определение 2.2. *Будем говорить, что гомеоморфизм $\phi : M_J \to M_J$ является локально прямым произведением P и φ, если $\phi = p_J\tilde{\phi}p_J^{-1}$, и писать $\phi = P \otimes \varphi$.*

Обозначим через Φ множество всех таких локально прямых произведений.

Теорема 2.1. *Любой топологически псевдокогерентный гомеоморфизм из класса G топологически сопряжен некоторому гомеоморфизму из класса модельных гомеоморфизмов Φ.*

Благодарности. Работа выполнена в рамках Программы фундаментальных исследований НИУ ВШЭ в 2015 году (проект «Динамические системы и их приложения») при частичной финансовой поддержке РФФИ (гранты 13-01-12452 офи-м2, 15-01-03687 А) и РНФ (грант 14-41-00044).

Список литературы

1. Арансон С. Х., Гринес В. З., “Топологическая классификация каскадов на замкнутых двумерных многообразиях”, *УМН*, **45**:1(271) (1990), 3–32.

2. H. Bonatti, N. Guelman, “Axiom A diffeomorphisms which are derived from Anosov flows”, *Journal of Modern Dynamics*, **4**:1 (2010), 1–63.

3. H. Bothe, “The ambient structure of expanding attractors. I. Local triviality, tubular neighdorhoods”, *Math. Nachr.*, **107** (1982), 327–348.

4. H. Bothe, “The ambient structure of expanding attractors, II. Solenoids in 3-manifolds”, *Math. Nachr.*, **112** (1983), 69–102.

5. A. Brown., “Nonexpanding attractors: conjugacy to algebraic models and classification in 3-manifolds”, *Journal of Modern Dynamics*, **4** (2010), 517–548.

6. J. Franks, “Anosov Diffeomorphisms on Tori”, *Transactions of the American Mathematical Society*, **145** (1969), 117–124.

7. Гринес В.З., Жужома Е.В., “О топологической классификации ориентируемых аттракторов на n-мерном торе”, *УМН*, **34**:4(208) (1979), 185–186.

8. Гринес В.З., Жужома Е.В., “Структурно устойчивые диффеоморфизмы с базисными множествами коразмерности один”, *Изв. РАН. Сер. матем.*, **66**:2 (2002), 3–66.

9. V. Grines, E. Zhuzhoma, “On structurally stable diffeomorphisms with codimension one expanding attractors”, *Trans. Amer. Math. Soc.*, **357** (2005), 617–667.

10. Гринес В.З., Медведев В.С., Жужома Е.В., “О поверхностных аттракторах и репеллерах на 3-многообразиях”, *Мат. зам.*, **78**:6 (2005), 813-826.

11. Гринес В. З., Левченко Ю.А., “О топологической классификации диффеоморфизмов трехмерных многообразий с двумерными поверхностными аттракторами и репеллерами”, *Доклады Академии Наук*, **447**:2 (2012), 127–129.

12. Grines V., Levchenko Yu., Medvedev V., Pochinka O., “On the Dynamical Coherence of Structurally Stable 3-diffeomorphisms”, *Regular and Chaotic Dynamics*, **19**:4 (2014), 506–512.

13. Гринес В. З., Левченко Ю.А., Починка О. В., “О топологической классификации диффеоморфизмов на 3-многообразиях с поверхностными двумерными аттракторами и репеллерами”, *Нелинейная динамика*, **10**:1 (2014), 17–33.

14. Жиров А.Ю., Плыкин Р.В., “Соответствие между одномерными гиперболическими аттракторами диффеоморфизмов поверхностей и обобщенными псевдоаносовскими диффеоморфизмами”, *Матем. заметки*, **58**:1 (1995), 149–152.

15. Жужома Е.В., Исаенкова Н.В., “О классификации одномерных растягивающихся аттракторов”, *Матем. заметки*, **86**:3 (2009), 360–370.

16. K. Hiraide, “Expansive homeomorphisms of compact surfaces are pseudo-Anosov”, *Osaka Journal of Mathematics*, **27**:1 (1990), 117–162.

17. Э. Кэссон, С. Блейлер, *Теория автоморфизмов поверхностей по Нильсену и Терстону*, пер. с англ. А.Ю. Жирова, ред. Д. В. Аносов, М., 1998, XVI+112 с.

18. J. Lewowicz, “Expansive homeomorphisms of surfaces”, *Bol. Soc. Brasil. Mat.(N.S.)*, **20**:1 (1989), 113–133.

19. А.Г. Майер, “Грубое преобразование окружности в окружность”, *Уч.Зап.ГГУ*, 1939, № 12, 215–229.

20. R. Mane, “Expansive homeomorphisms and topological dimension”, *Trans. Amer. Math. Soc.*, **252** (1979), 313–319.

21. J. Nielsen, “Untersuchungen zur Topologie der geschlossenen zweiseitigen Fl?chen”, *Acta Math.*, **50** (1927), 189–358.

22. S. E. Newhouse, “On Codimension One Anosov Diffeomorphisms”, *American Journal of Mathematics*, **92**:3 (1970), 761-770.

23. Ньюхаус Ш.Е., “Об У-диффеоморфизмах коразмерности один”, *Гладкие динамические системы*, **4** (1977), 87-98.

24. T. O’Brien, W. Reddy, “Each compact orientable surface of positive genus admits an expansive homeomorphism”, *Pacific Journal of Mathematics*, **35**:3 (1970), 737–741.

25. Плыкин Р.В., “О топологии базисных множеств диффеоморфизмов С.Смейла”, *Матем. сборник*, **84**:2 (1971), 301–312.

26. Плыкин Р.В., “О гиперболических аттракторах диффеоморфизмов”, *УМН*, **35**:3(213) (1980), 94–104.

27. Плыкин Р.В., “О геометрии гиперболических аттракторов гладких каскадов”, *УМН*, **39**:6(240) (1984), 75–113.

28. W.P. Thurston, “On the geometry and dynamics of diffeomorphisms of surfaces”, *Bull. Amer. Math. Soc. (N.S.)*, **19**:2 (1988), 417–431.

29. R.F. Williams, “One-dimensional non-wandering sets”, *Topology*, **6** (1967), 473–487.

Topogically pseudocoherent diffeomorphisms of 3-manifolds

© V. Z. Grines[7], O. V. Pochinka[8], A. A. Shilovskaya[9]

Abstract. In this paper, we consider a class of topologically pseudocoherent homeomorphisms of 3-manifolds. These mappings are topologically pseudocoherent everywhere except finite number of circles. We prove that every homeomorphism from the considered class is topologically conjugate to the semidirect product of a pseudoanosov homeomorphism and a rough circle transform.

Key Words: Topological pseudocoherence, pseudoanosov homeomorphism, topological conjugacy.

[7] Professor of Department of numerical and functional analysis, Lobachevsky State University, Nizhny Novgorod; vgrines@yandex.ru

[8] Professor of Department of fundamental mathematics, Higher School of Economics, Nizhny Novgorod; olga-pochinka@yandex.ru

[9] Postgraduate of the Department numerical and functional analysis, Lobachevsky State University, Nizhny Novgorod; a.shilovskaia@gmail.com