

УДК 517.9

Моделирование управлением нелинейным объектом 3-го порядка с оптимальной стабилизацией конечного состояния

© В. В. Афонин¹, С. М. Мурюмин², А. В. Мускатиньев³

Аннотация. Рассматривается задача оптимальной стабилизации для нелинейных объектов управления 3-го порядка, описываемых обыкновенными дифференциальными уравнениями с постоянными коэффициентами. Оптимальная стабилизация понимается в смысле минимизации квадратичного функционала для линеаризованного объекта управления. Линеаризация осуществляется на каждом шаге численного интегрирования нелинейной системы дифференциальных уравнений и рассчитывается матрица оптимального регулятора. Управление в виде обратной связи по состоянию прикладывается к нелинейному объекту на каждом шаге численного интегрирования. Приводятся результаты моделирования с построением переходных процессов систем, замкнутых на оптимальный регулятор.

Ключевые слова: оптимальная стабилизация, аффинные системы управления, системы обыкновенных дифференциальных уравнений, матрица оптимального регулятора, линейно-квадратичная задача оптимального управления, обратная связь, переходный процесс, система Лоренца

1. Постановка задачи

Задача стабилизации динамических объектов достаточно актуальна. Известны как теоретические результаты по этому вопросу [5], [7], [10], [11], так и чисто прикладные [9]. Рассмотрение линейно-квадратичной задачи оптимального управления отражено в учебных пособиях для вузов, например, в [4],[7],[12]. Численное моделирование задач управления обычно проводится в системе MATLAB [1], [2], [3], [4], [6]. Результаты моделирования для данной статьи получены также с помощью MATLAB (версии R14b).

Задача стабилизации рассматривается для так называемых аффинных систем управления, у которых управление входит в описание объекта линейно [10]. Математическая модель аффинной стационарной системы со скалярным управлением представляется в виде

Рассмотрим множество всех систем дифференциальных уравнений вида

$$\frac{dX(t)}{dt} = A(X(t)) + B(X(t))u(t),$$

где
 $A(X(t)) = [a_1(X(t)), a_2(X(t)), \dots, a_n(X(t))]^T$, – векторная функция с элементами a_i ,
 $B(X(t)) = [b_1(X(t)), b_2(X(t)), \dots, b_n(X(t))]^T$, – векторная функция с элементами b_i ,
 $X(t) = [x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t)]^T$, – вектор состояния.

¹ Доцент кафедры автоматизированных систем обработки информации и управления, Мордовский государственный университет имени Н. П. Огарева, г. Саранск; afoninvv@fet.mrsu.ru

² Доцент кафедры прикладной математики, дифференциальных уравнений и теоретической механики, Мордовский государственный университет имени Н. П. Огарева, г. Саранск; korspa@yandex.ru

³ Доцент кафедры электроники и нанoeлектроники, Мордовский государственный университет имени Н. П. Огарева, г. Саранск; muskatav@mail.ru

В общем случае стационарную аффинную систему можно записать в следующем виде [10]:

$$\frac{dx}{dt} = A(x) + B(x)u, \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad u \in \mathbb{R}^m,$$

где векторная функция

$$A(x) = (a_1(x), a_2(x), \dots, a_n(x))^T,$$

$B(x) = \|b_{ij}(x)\|$ – функциональная матрица типа $n \times m$ с элементами $b_{ij}(x)$.

Задача стабилизации определяется как перевод системы управления из заданного начального состояния в нулевое состояние. При этом управление выражается в виде обратной связи по состоянию системы. При решении задачи оптимальной стабилизации управление должно быть выбрано так, чтобы при произвольном начальном условии $X(0)$ минимизировать квадратичный функционал вида

$$I = \int_0^{\infty} (X(t)^T Q X(t) + U(t)^T R U(t)) \rightarrow \min,$$

где Q – положительно-определенная симметрическая матрица действительных чисел размера $n \times n$, R – положительно-определенная симметрическая матрица действительных чисел размера $m \times m$, T – символ транспонирования. На управление ограничений не наложено.

Решение задачи оптимальной стабилизации имеет вид

$$U(t) = -R^{-1} B^T P X(t),$$

где P – ($n \times n$) симметрическая матрица, положительно-определенное решение нелинейного матричного алгебраического уравнения Риккати

$$PA + A^T P - PBR^{-1}B^T P + Q = 0.$$

Предполагается, что все переменные состояния доступны для измерения.

Авторами предлагается решать задачу оптимальной стабилизации для нелинейных объектов в несколько этапов. Сначала проверяется управляемость данной нелинейной системы [3], где имеется программный код. Затем осуществляется линеаризация нелинейной аффинной системы [4], проверяется возможность управления по первому приближению. В рассматриваемых ниже примерах часть полюсов или все полюса линеаризованной системы лежат в правой полуплоскости комплексной плоскости корней. Приведем этапы предлагаемого подхода.

1. Проверка на управляемость нелинейной системы [3].
2. Линеаризация нелинейной системы и проверка возможности управления по первому приближению [4].
3. Задание весовых матриц квадратичного функционала.
4. Интегрирование системы нелинейных дифференциальных уравнений, описывающих объект управления [4].
5. В темпе интегрирования (на каждом шаге) осуществлять линеаризацию системы управления и решать задачу оптимальной стабилизации для линеаризованной системы – рассчитывать линейный оптимальный регулятор.

6. Замыкание нелинейной системы на линейный оптимальный регулятор, определяемый на каждом шаге интегрирования.
7. Построение переходных процессов в нелинейной системе. Численно оценивать вектор конечного состояния.

2. Моделирование управления нелинейными объектами 3-го порядка

Рассмотрим несколько объектов управления, которые взяты из [8], [10], [11], и применим к ним указанный выше подход для решения задачи стабилизации. В [10], [11] рассматриваются алгоритмы синтеза управлений, обеспечивающих стабилизацию аффинных систем. Алгоритмы достаточно сложны, управления нелинейным образом зависят от переменных состояния системы. В [8] решаются задачи быстрогодействия для нелинейных объектов. Для каждого примера приводятся весовые матрицы квадратичного функционала и начальные и конечные вектора состояний.

Пример 1. Система Рёсслера с управлением [10]. Описание объекта управления имеет следующий вид:

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= -x_2 - x_3, \\ \dot{x}_2 &= x_1 + ax_2, \\ \dot{x}_3 &= c + x_3(x_1 - b) + u, \end{aligned}$$

где a , b , c – положительные постоянные параметры.

Значения начального вектора состояния:

$$x_1(0) = 6; \quad x_2(0) = 7; \quad x_3(0) = 8.$$

Значения конечного вектора состояния:

$$x_1(8) = -0.13913; \quad x_2(8) = 0.034098; \quad x_3(8) = -0.175265.$$

Матрица Q квадратичного функционала:

$$\begin{matrix} 234 & 0 & 0 \\ 0 & 468 & 0 \\ 0 & 0 & 702 \end{matrix}$$

Матрица R квадратичного функционала: 0.0130.

Переходные процессы в замкнутой системе показаны на рис. 1.

Пример 2. Тепловой объект [8]. Объект состоит из аппарата, объем которого необходимо нагреть до определенной температуры. Описание объекта управления:

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= u - x_1, \\ \dot{x}_2 &= x_1, \\ \dot{x}_3 &= (x_2 - x_2^2) - x_3, \end{aligned}$$

После достижения необходимой температуры нередко требуется ее стабилизировать.

Значения начального вектора состояния:

$$x_1(0) = 2; \quad x_2(0) = -3; \quad x_3(0) = 4.$$

В результате стабилизации значения конечного вектора состояния:

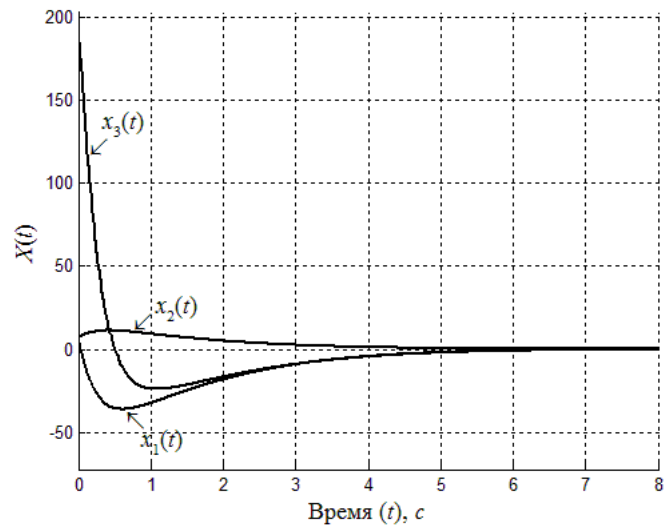


Рис. 1: Переходной процесс в системе Рёсслера с управлением

$$x_1(10) = 8.3772e - 05; \quad x_2(10) = -5.75051e - 05; \quad x_3(10) = 9.6394e - 06.$$

Матрица Q квадратичного функционала:

$$\begin{array}{ccc} 1.3000 & 0 & 0 \\ 0 & 2.6000 & 0 \\ 0 & 0 & 3.9000 \end{array}$$

Матрица R квадратичного функционала: 0.3000.

Переходные процессы в замкнутой системе показаны на рис. 2.

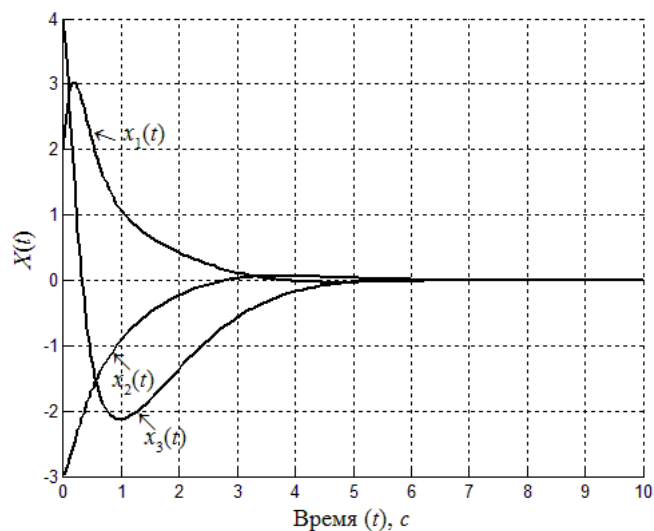


Рис. 2: Переходной процесс в системе Рёсслера с управлением

Пример 3. Система Лоренца с одним управлением [10], [11]. Описание объекта управ-

ления имеет следующий вид:

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= -\sigma x_2 + \sigma x_3, \\ \dot{x}_2 &= rx_1 - x_2 - x_1x_3 + u, \\ \dot{x}_3 &= x_1 * x_2 - bx_3, \end{aligned}$$

где σ , b , r – положительные постоянные параметры.

Как и в [10], [11] примем следующие значения параметров:

$$\sigma = 10; \quad b = \frac{8}{3}; \quad r = 28.$$

Значения начального вектора состояния:

$$x_1(0) = -10; \quad x_2(0) = 5; \quad x_3(0) = 8.$$

В результате стабилизации значения конечного вектора состояния:

$$x_1(2) = -0.0003252; \quad x_2(2) = -0.000238088; \quad x_3(2) = 0.0436865.$$

Матрица Q квадратичного функционала:

$$\begin{array}{ccc} 1.0000 & 0.5000 & 0.3333 \\ 0.5000 & 1.0000 & 0.6667 \\ 0.3333 & 0.6667 & 1.0000 \end{array}$$

Матрица R квадратичного функционала: 0.2300.

Переходные процессы в замкнутой системе показаны на рис. 3.

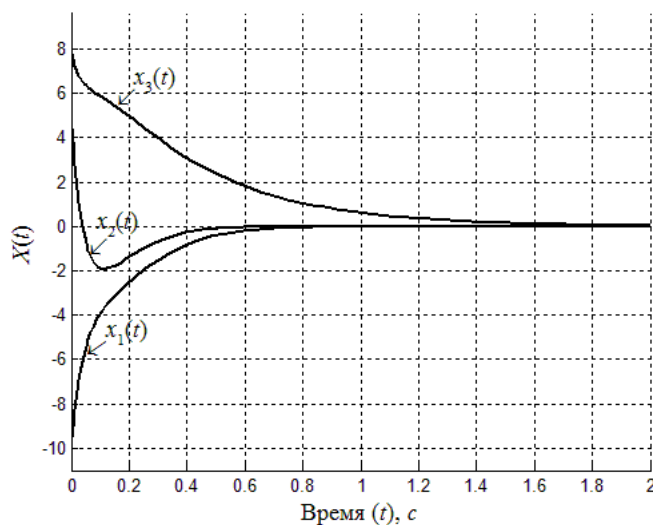


Рис. 3: Переходной процесс в системе Рёсслера с управлением

Пример 4. Система Лоренца с двумя управлениями [10]. Описание объекта управления имеет следующий вид:

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= -10(x_1 - x_2), \\ \dot{x}_2 &= -x_1x_3 - x_2 + u_1x_1, \\ \dot{x}_3 &= x_1x_2 - u_2x_3, \end{aligned}$$

В [10] приведено решение со следующими начальными условиями:

$$x_1(0) = 3; \quad x_2(0) = -4; \quad x_3(0) = -1.$$

Для решения данного примера использовался прием полной линеаризации на каждом шаге интегрирования системы дифференциальных уравнений. В результате переходные процессы получены практически, как и в [10].

Матрица Q квадратичного функционала:

$$\begin{array}{ccc} 1.3000 & 0 & 0 \\ 0 & 2.6000 & 0 \\ 0 & 0 & 3.9000 \end{array}$$

Матрица R квадратичного функционала:

$$\begin{array}{cc} 15 & 0 \\ 0 & 30 \end{array}$$

Значения конечного вектора состояния:

$$\begin{aligned} x_1(5) &= 5.74015e - 07; \\ x_2(5) &= 7.43603e - 08; \\ x_3(5) &= 0.413952. \end{aligned}$$

Переходные процессы в замкнутой системе показаны на рис. 4.

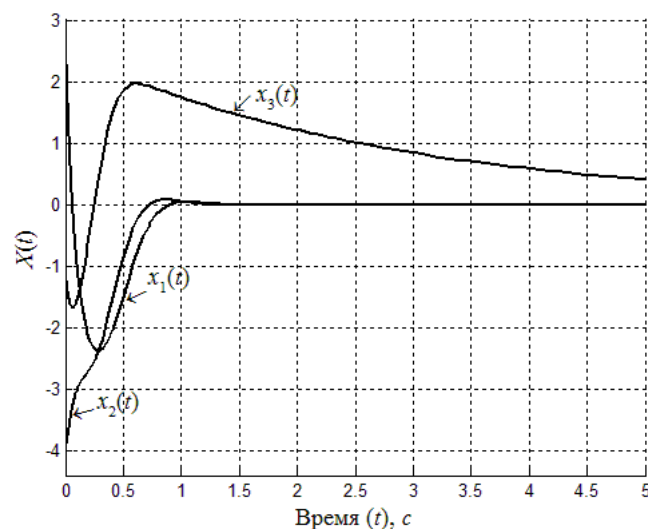


Рис. 4: Переходной процесс в системе Рёсслера с управлением

3. Заключение

Предложенный подход оптимальной стабилизации нелинейных систем носит эвристический характер. Но с его помощью значительно проще выполнить численное моделирование, получение переходных процессов в замкнутой системе. При этом упрощается возможная техническая реализация оптимальных регуляторов, поскольку стабилизирующее управление является линейным относительно переменных состояния нелинейного объекта управления. Процессы стабилизации можно регулировать весовыми матрицами квадратичного функционала.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Афонин В.В., Мурюмин С.М., “Соотношения оптимальности в линейно-квадратичной задаче управления”, *Журнал Средневолжского математического общества*, **16:2** (2014), 118–120.
2. Афонин В.В., “Вывод нелинейного объекта третьего порядка на заданное движение”, *Вестник Мордовского университета, серия «Физико-математические науки»*, 2014, № 4, 52–54.
3. Афонин В.В., “Анализ управляемости нелинейных аффинных систем управления в системе MATLAB”, *Вестник Мордовского университета, серия «Физико-математические науки»*, 2012, № 2, 177–181.
4. Афонин В.В., Федосин С.А., Иконников С.Е., “Основы теории управления : лабораторный практикум”, 2008, 244.
5. Зубер И.Е., *Добавление, в книге Балонин Н. А. Новый курс теории управления движением*, Изд-во СПбГУ, СПб., 2000.
6. Андриевский Б.Р., Фрадков А.Л., *Избранные главы теории автоматического управления с примерами на языке MATLAB*, Наука, Саранск, 2000.
7. *Синтез регуляторов систем автоматического управления*, **3**, 2-е изд, перераб. и доп., ред. Пупков К.А., Егупова Н.Д., Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, М., 2004.
8. Олейников В.А., *Оптимальное управление технологическими процессами в нефтяной и газовой промышленности*, Недра, Л., 1982.
9. Мускатиныйев А.А., Мускатиныйев А.В., “Патент на полезную модель 49281 RU, МПК G01 R 31/26. Устройство для измерения токов утечки силовых полупроводниковых приборов”, 2005, 2.
10. Краснощёченко В.И., Крищенко А.П., *Нелинейные системы : геометрические методы анализа и синтеза*, Изд-во МГТУ им. Н. Э. Баумана, М., 2005.
11. *Современная прикладная теория управления : Синергетический подход в теории управления*, ред. Колесников А.А., Изд-во ТРТУ, Таганрог, 2000.
12. Душин С.Е., Зотов Н.С., Имаев Д.Х., *Теория автоматического управления: учеб. для вузов*, 2, ред. Яковлев В.Б., Высш. шк., М., 2005.

Modeling of nonlinear control object 3-th order with optimal stabilization of the final state

© V. V. Afonin⁴, S. M. Murjumin⁵, A. V. Muskatinev⁶

Abstract. We consider the problem of optimal stabilization of nonlinear control objects 3-th order, described by ordinary differential equations with constant coefficients. Optimal stabilization is understood in the sense of minimization of a quadratic functional for the linearized control object. The linearization is performed at each step of numerical integration of nonlinear system of differential equations and calculated the matrix of the optimal regulator. Management in the form of state feedback is applied to non-linear object at each step of numerical integration. The results of simulation with plotting transient systems and the closed-loop optimal controller.

Key Words: optimal stabilization, affine control systems, a system of ordinary differential equations, matrix optimal controller, linear-quadratic optimal control problem, feedback, the transition process, Lorenz system

⁴ Associate Professor in the Department of automated systems of information processing and management, Mordovian State University after N.P. Ogarev, Saransk; korspa@yandex.ru

⁵ Associate Professor in the Department of applied mathematics, differential equations and theoretical mechanics, Mordovian State University after N.P. Ogarev, Saransk; korspa@yandex.ru

⁶ Associate Professor in the Department of electronics and nanoelectronics, Mordovian State University after N.P. Ogarev, Saransk; muskatav@mail.ru