УДК 519.3:62-50

Приближенное решение системы нелинейных интегральных уравнений с запаздывающим аргументом и приближенное вычисление функционала качества

© Т. К. Юлдашев [1] С. М. Овсяников[2]

Аннотация. Рассмотрены вопросы приближенного решения системы нелинейных интегральных уравнений Вольтерра с нелинейным запаздывающим аргументом и случайной непрерывной вектор-функцией и приближенного вычисления функционала качества при известном управлении. Поставленная задача сведена к рассмотрению случайного управления, ограниченного по модулю вектором-константой и с критерием нелинейного вида. Использован случай, когда переменные принимают натуральные значения. Задача заменяется с её суммарным аналогом. Для каждого набора заданной координаты и управления задача сведена к случайной системе суммарных уравнений с запаздыванием. Доказано существование и единственность решения этой системы суммарных уравнений. При этом использован метод последовательных приближений в сочетании его с методом сжимающих отображений. Получена оценка для допускаемой погрешности по состоянию приближенного решения суммарной задачи. Далее доказано, что последовательность дискретных управлений является минимизирующей последовательностью для этой задачи. В качества примера рассматриваемой системы интегральных уравнений составлена простейшая математическая модель производственного процесса компании, производящего n видов продукции.

Ключевые слова: Интегральное уравнение Вольтерра, нелинейное запаздывание, оптимальное управление, случайное приближенное решение, математическая модель экономики.

Современные методы решения задач управления в значительной степени основываются на концепции оптимальности, что определяет широкое применение методов и алгоритмов теории оптимизации при проектировании и совершенствовании систем управления. Многие задачи управления формулируются как конечномерные оптимизационные задачи. К таким задачам относятся и задачи адаптивных систем управления [1] – [4].

Теория оптимального управления для систем с распределенными параметрами получила бурное развитие. К системам с распределенными параметрами относятся задачи аэрогазодинамики, химических реакций, диффузии, фильтрации, процессов горения, нагрева и т.д. [5] – [10].

Разрабатываются эффективные численные методы и программные средства для решения задач динамики и управления. При приближенном решении задач оптимального управления используются широкий спектр разных методов [11] – [20].

В данной работе рассматриваются вопросы приближенного решения задачи оптимального управления для одной системы нелинейных случайных интегральных уравнений с нелинейным запаздывающим аргументом и с нелинейным критерием оптимальности.

[1] Доцент кафедры высшей математики, Сибирский государственный аэрокосмический университет имени академика М. Ф. Решетнева, г. Красноярск, tursunbay@rambler.ru

[2] Магистрант института информатики и телекоммуникации, Сибирский государственный аэрокосмический университет имени академика М. Ф. Решетнева, г. Красноярск, s.ovsianikov@yandex.ru

1. Постановка задачи

Пусть управляемый процесс на отрезке D_T описывается системой нелинейных интегральных уравнений вида

$$\vartheta(t) = \int\limits_{t_0}^{t} K\left(t, s, u(s), \vartheta\left[s - \tau\left(s, u(s), \int\limits_{t_0}^{s} H(s,\theta)\vartheta(\theta)d\theta\right)\right], \xi(s)\right) ds \tag{1.1}$$

с условием

$$\vartheta(t) = \phi(t),\ t \in \big[-\eta; t_0\big], \tag{1.2}$$

где $K(t,s,u,\vartheta,\xi) \in C\big(D_T^2 \times U \times V \times \Omega\big)$, $\xi(t) \in \Omega$ – случайный процесс с непрерывными траекториями в $\Re^n$, $0 < \tau\big(t, u(t), \vartheta(t)\big)$ – непрерывная вектор-функция запаздывания, такая, что $t-\tau\big(t,u(t),\vartheta(t)\big) \geq t_0-\eta$, $0<\eta = const$, $\varphi(t) \in C\big[-\eta; t_0\big]$ – начальная вектор-функция, $\int\limits_{t_0}^{t} \big|H(t,s)\big|ds < \infty$, $0 < u(t) \in U$ – управляющая вектор-функция, $U \in \Re^n$, $V \in \Re^n$, $\Omega \in \Re^n$ – случайные ограниченные замкнутые множества, $D_T^2 \equiv D_T \times D_T$, $D_T \equiv \big[t_0; T\big]$, $0 < t_0 < T < \infty$.

Задача 1. Найти случайное состояние $\vartheta^\star(t)$ – решение задачи (1.1), (1.2) при известных управляющих воздействиях

$$u^\star(t) \in \big\{u^\star : \big|u^\star(t)\big| \leq M_0 \in \Re^n,\, t \in D_T\big\},$$

что доставляют минимум функционалу

$$J[u(t)] = \int_{t_0}^{T} \tau\left(t, u(t), \int\limits_{t_0}^{t} H(t,s)\vartheta(s)ds\right) dt.$$

Отметим, что данная работа является дальнейшим развитием работы [21]. В [22] изучены вопросы разрешимости случайных нелинейных интегральных уравнений Вольтерра первого рода.

2. Дискретный аналог задачи 1

Вместо случайной системы нелинейных интегральных уравнений (1.1) рассмотрим её суммарный аналог

$$\vartheta(k) = \sum_{\mu=k_0}^{k-1} K\left(k, \mu, u(\mu), \vartheta\left[\mu - \tau\left(\mu, u(\mu), \sum_{\nu=k_0}^{\mu-1} H(\mu,\nu)\vartheta(\nu)\right)\right], \xi(\mu)\right) \tag{2.1}$$

при условии

$$\vartheta(k) = \phi(k),\ k \in D_1, \tag{2.2}$$

где случайная вектор-функция $K(k,\mu,u,\vartheta,\xi)$ определена для всех $k \in D_k \equiv \Big\{k_0 \leq \mu \leq k \leq k_1\Big\}$, $k - \tau\big(k, u(k), \vartheta(k)\big) \geq k_0 - \eta$, $\phi(k)$ определена для всех $k \in D_1 \equiv \Big\{k_0 - \eta \leq k \leq k_0\Big\}$, $\eta > 0$, $\sum\limits_{\mu=k_0}^{k-1} |H(k,\mu)| < \infty$, $\xi(k)$ – целочисленная случайная вектор-функция, а k_0, k и k_1 – натуральные числа.

Задача 2. Найти случайное состояние $\vartheta^\star(k)$ – решение задачи (2.1), (2.2) при известных управляющих воздействиях

$$u^\star(k)\in\left\{u^\star:\left|u^\star(k)\right|\le M_0^\star,\ k\in D_k\right\},$$

что доставляют минимум функционалу

$$J[u]=\sum_{k=k_0}^{k_1-1}\tau\left(k,u(k),\sum_{\mu=k_0}^{k-1}H(k,\mu)\vartheta(\mu)\right). \tag{2.3}$$

В данной работе вместо задачи 1 будем рассматривать суммарную задачу 2.

3. Однозначная разрешимость системы суммарных уравнений (2.1)

В дальнейшем все соотношения понимаем в смысле почти наверное. Обозначим через A множество всех случайных величин ω. Очевидно, что $P(A)=1$. Для всех $\omega\in A$ мы используем следующие обозначения: $Bnd(M(\omega))$ – класс целочисленных вектор-функций, ограниченных по норме с положительным случайным вектором $M(\omega)$; $Lip\Big\{L(\omega)_{|u,v,\dots}\Big\}$ – класс вектор-функций, удовлетворяющих условию Липшица по переменным $u,v,\dots$ с положительной случайной матрицей $L(\omega)$. В качестве нормы на множестве D_k для произвольной целочисленной вектор-функции $x(k,\omega)$ мы будем брать евклидову норму

$$\|x(k,\omega)\|=\sum_{i=1}^{n}\max\left\{|x(k,\omega)|:k\in D_k\right\}.$$

Т е о р е м а 3.1. *Пусть выполняются следующие условия:*

1. $f(k,\mu,u,\vartheta,\xi)\in Bnd\big(M(\omega)\big)\cap Lip\left\{L_1(k,\mu,\omega)_{|\vartheta}\right\}$, *где* $0<M(\omega)$ *– случайный постоянный вектор,* $0<L_1(k,\mu,\omega)$ *– случайная матрица-функция;*

2. $0<\alpha=\max\left\{\sum\limits_{\mu=k_0}^{k-1}L_1(k,\mu,\omega):k\in D_k\right\}<\infty$;

3. $\tau(k,u,\vartheta,\omega)\in Lip\left\{L_2(\omega)_{|\vartheta}\right\}$, *где* $0<L_2(\omega)$ *– случайная постоянная матрица;*

4. $0<\beta=\max\left\{\sum\limits_{\mu=k_0}^{k-1}|H(k,\mu)|:k\in D_k\right\}<\infty$;

5. $0<\gamma=\max\Big\{|\phi(k)|:k\in D_1\Big\}<\infty$;

6. $\left|\vartheta(k,\omega)-\vartheta(\mu,\omega)\right|\le L_3(\omega)\left|k-\mu\right|$, $0<L_3(\omega)$ *- случайная постоянная матрица;*

7. $\rho_{max}<1$, *где* ρ_{max} *– наибольшее собственное значение случайной матрицы* $Q(\omega)=\alpha\Big(E+\beta L_2(\omega)L_3(\omega)\Big)$, E *– единичная матрица.*

Тогда система суммарных уравнений (2.1) при фиксированных значениях управления $u(k,\omega)$ *имеет единственное решение на множестве* D_k.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Используем метод последовательных приближений в сочетании его с методом сжимающих отображений. Рассмотрим следующий итерационный процесс Пикара:

$$\vartheta_0(k,\omega)=\phi(k_0,\omega),\ r=0,1,2,\dots;\ \vartheta_{r+1}(k,\omega)=$$
$$=\sum_{\mu=k_0}^{k-1}K\left(k,\mu,u(\mu,\omega),\vartheta_r\left[\mu-\tau\left(\mu,u(\mu,\omega),\sum_{\nu=k_0}^{\mu-1}H(\mu,\nu)\vartheta_r(\nu,\omega)\right),\omega\right],\xi(\mu)\right). \tag{3.1}$$

В силу первого условия теоремы для нулевого приближения из (3.1) справедлива следующая оценка
$$\left\|\vartheta_0(k,\omega)\right\| \le \gamma < \infty. \tag{3.2}$$

В силу условий теоремы, с учетом (3.2) из (3.1) для первого приближения имеем оценку
$$\left\|\vartheta_1(k,\omega) - \vartheta_0(k,\omega)\right\| \le \gamma + M(\omega)(k_1 - k_0 - 1). \tag{3.3}$$

Теперь для произвольного натурального числа $k > 1$, в силу условий теоремы, из (3.1) по индукции получаем
$$\left\|\vartheta_{r+1}(k,\omega) - \vartheta_r(k,\omega)\right\| \le$$
$$\le \max\left\{\sum_{\mu=k_0}^{k-1} L_1(k,\mu,\omega)\left|\vartheta_r\left[\mu - \tau\left(\mu, u(\mu,\omega), \sum_{\nu=k_0}^{\mu-1} H(\mu,\nu)\vartheta_r(\nu,\omega)\right),\omega\right] -\right.\right.$$
$$\left.\left.-\vartheta_{r-1}\left[\mu - \tau\left(\mu, u(\mu,\omega), \sum_{\nu=k_0}^{\mu-1} H(\mu,\nu)\vartheta_{r-1}(\nu,\omega)\right),\omega\right]\right| : k \in D_k\right\} \le$$
$$\le \max\left\{\sum_{\mu=k_0}^{k-1} L_1(k,\mu,\omega)\left\|\vartheta_r(\mu,\omega) - \vartheta_{r-1}(\mu,\omega)\right\| : k \in D_k\right\} +$$
$$+\max\left\{\sum_{\mu=k_0}^{k-1} L_1(k,\mu,\omega)\left\|\vartheta_{r-1}\left[\mu - \tau\left(\mu, u(\mu,\omega), \sum_{\nu=k_0}^{\mu-1} H(\mu,\nu)\vartheta_r(\nu,\omega)\right),\omega\right] -\right.\right.$$
$$\left.\left.-\vartheta_{r-1}\left[\mu - \tau\left(\mu, u(\mu,\omega), \sum_{\nu=k_0}^{\mu-1} H(\mu,\nu)\vartheta_{r-1}(\nu,\omega)\right),\omega\right]\right\| : k \in D_k\right\} \le$$
$$\le \max\left\{\sum_{\mu=k_0}^{k-1} L_1(k,\mu,\omega)\left\|\vartheta_r(\mu,\omega) - \vartheta_{r-1}(\mu,\omega)\right\| : k \in D_k\right\} +$$
$$+\max\left\{L_3(\omega)\sum_{\mu=k_0}^{k-1} L_1(k,\mu,\omega)\left|\tau\left(\mu, u(\mu,\omega), \sum_{\nu=k_0}^{\mu-1} H(\mu,\nu)\vartheta_r(\nu,\omega)\right) -\right.\right.$$
$$\left.\left.-\tau\left(\mu, u(\mu,\omega), \sum_{\nu=k_0}^{\mu-1} H(\mu,\nu)\vartheta_{r-1}(\nu,\omega)\right)\right| : k \in D_k\right\} \le$$
$$\le \max\left\{\sum_{\mu=k_0}^{k-1} L_1(k,\mu,\omega)\left\|\vartheta_r(\mu,\omega) - \vartheta_{r-1}(\mu,\omega)\right\| : k \in D_k\right\} +$$
$$+\max\left\{L_2(\omega)L_3(\omega)\sum_{\mu=k_0}^{k-1} L_1(k,\mu,\omega)\times\right.$$
$$\left.\times\left|\sum_{\nu=k_0}^{\mu-1} H(\mu,\nu)\vartheta_r(\nu,\omega) - \sum_{\nu=k_0}^{\mu-1} H(\mu,\nu)\vartheta_{r-1}(\nu,\omega)\right| : k \in D_k\right\} \le$$
$$\le \max\left\{\sum_{\mu=k_0}^{k-1} L_1(k,\mu,\omega)\left(E + L_2(\omega)L_3(\omega)\sum_{\nu=k_0}^{\mu-1} H(\mu,\nu)\right)\left\|\vartheta_r(\mu,\omega) - \vartheta_{r-1}(\mu,\omega)\right\| : k \in D_k\right\}.$$

Отсюда имеем

$$\left\|\vartheta_{r+1}(k,\omega)-\vartheta_r(k,\omega)\right\|\le\rho_{max}\cdot\left\|\vartheta_r(k,\omega)-\vartheta_{r-1}(k,\omega)\right\|<\left\|\vartheta_r(k,\omega)-\vartheta_{r-1}(k,\omega)\right\|. \quad (3.4)$$

Из (3.3) и (3.4) следует, что оператор в правой части (2.1) является сжимающим. Следовательно, система суммарных уравнений (2.1) при фиксированных значениях управления $u(k,\omega)$ имеет единственное решение на множестве D_k.
Доказательство закончено.

Теорема 3.2. *Пусть выполняются условия теоремы 3.1. Тогда при фиксированных значениях управления* $u(k,\omega)$ *справедлива оценка*

$$\left\|\vartheta(k,\omega)-\vartheta_r(k,\omega)\right\|\le\frac{\lambda_{max}}{1-\rho_{max}}, \quad (3.5)$$

где λ_{max} – наибольшее собственное значение случайной матрицы $\big[Q(\omega)\big]^r\Big[\gamma+M(\omega)\big(k_1-k_0-1\big)\Big]$, $\lambda_{max}\to 0$ при $r\to\infty$.

Доказательство. Для разности $\vartheta(k,\omega)-\vartheta_r(k,\omega)$ с учетом (3.3) и (3.4) имеем оценку

$$\begin{gathered}\left|\vartheta(k,\omega)-\vartheta_r(k,\omega)\right|\le\\ \le\left|\vartheta(k,\omega)-\vartheta_{r+1}(k,\omega)\right|+\left|\vartheta_{r+1}(k,\omega)-\vartheta_r(k,\omega)\right|\le\\ \le Q(\omega)\left|\vartheta(k,\omega)-\vartheta_{r+1}(k,\omega)\right|+\Big[Q(\omega)\Big]^r\Big[\gamma+M(\omega)(k_1-k_0-1)\Big].\end{gathered}$$

Отсюда имеем (3.5).
Доказательство закончено.

Следствие 3.1. *Пусть выполняются условия теоремы 3.2. Тогда имеет место следующее соотношение*

$$\lim_{r\to\infty}\left\|\vartheta(k,\omega)-\vartheta_r(k,\omega)\right\|=0. \quad (3.6)$$

4. Вычисление функционала качества

С учетом последовательностей функций (3.1) и (3.3) функционал (2.3) запишем в виде

$$J_r[u]=\sum_{k=k_0}^{k_1-1}\tau\left(k,u(k,\omega),\sum_{\mu=k_0}^{k-1}H(k,\mu)\vartheta(\mu,\omega)\right). \quad (4.1)$$

Теорема 4.1. *Пусть выполняются условия теоремы 3.2. Тогда имеет место следующее предельное соотношение*

$$\lim_{r\to\infty}\left|J[u]-J_r[u]\right|=0. \quad (4.2)$$

Доказательство. В силу условий теоремы, с учетом (3.5) из (2.3) и (4.1) получаем следующую оценку

$$\left|J[u]-J_r[u]\right|\le L_2(\omega)\sum_{\mu=k_0}^{k-1}H(k,\mu)\left|\vartheta(\mu,\omega)-\vartheta_r(\mu,\omega)\right|\le$$

$$\leq \frac{\beta L_2(\omega)\Big[Q(\omega)\Big]^r \Big[\gamma + M(\omega)(k_1 - k_0 - 1)\Big]\Big(k_1 - k_0 - 1\Big)}{E - Q(\omega)}.$$

Из последней оценки переходом к пределу при $r \to \infty$ получаем справедливость (4.2). Доказательство закончено.

Пусть $u^\star(k,\omega)$ – оптимальное допустимое управление в задаче 2. Предполагается, что для этого оптимального управления справедлива следующая оценка

$$\Big\|u^\star(k,\omega) - u^\star_r(k,\omega)\Big\| \leq \delta_r(k,\omega),\ \lim_{r\to\infty} \delta_r(k,\omega) = 0. \tag{4.3}$$

Из (1.1), (2.3) , (3.1) и (4.1) приходим к следующим соотношениям:

$$\vartheta^\star(k,\omega) =$$

$$= \sum_{\mu=k_0}^{k-1} K\left(k, \mu, u^\star(\mu,\omega), \vartheta^\star\left[\mu - \tau\left(\mu, u^\star(\mu,\omega), \sum_{\nu=k_0}^{\mu-1} H(\mu,\nu)\vartheta^\star(\nu,\omega)\right), \omega\right], \xi(\mu)\right); \tag{4.4}$$

$$\vartheta^\star_0(k,\omega) = \phi(k_0,\omega),\ r = 0,1,2,\ldots;\ \vartheta^\star_{r+1}(k,\omega) =$$

$$= \sum_{\mu=k_0}^{k-1} K\left(k, \mu, u^\star(\mu,\omega), \vartheta^\star_r\left[\mu - \tau\left(\mu, u^\star(\mu,\omega), \sum_{\nu=k_0}^{\mu-1} H(\mu,\nu)\vartheta^\star_r(\nu,\omega)\right), \omega\right], \xi(\mu)\right); \tag{4.5}$$

$$J[u^\star] = \sum_{k=k_0}^{k_1-1} \tau\left(k, u^\star(k,\omega), \sum_{\mu=k_0}^{k-1} H(k,\mu)\vartheta^\star(\mu,\omega)\right); \tag{4.6}$$

$$J_r[u^\star] = \sum_{k=k_0}^{k_1-1} \tau\left(k, u^\star(k,\omega), \sum_{\mu=k_0}^{k-1} H(k,\mu)\vartheta^\star_r(\mu,\omega)\right); \tag{4.7}$$

$$J_r[u^\star_r] = \sum_{k=k_0}^{k_1-1} \tau\left(k, u^\star_r(k,\omega), \sum_{\mu=k_0}^{k-1} H(k,\mu)\vartheta^\star_r(\mu,\omega)\right). \tag{4.8}$$

Теорема 4.2. *Пусть выполняются условия теоремы 4.1. Если*

$$\tau\big(k, u^\star, \vartheta^\star\big) \in Lip\Big\{L_2(\omega)\Big|_{u^\star,\vartheta^\star}\Big\}$$

и выполняется условие (4.3), то имеет место следующее соотношение

$$\lim_{r\to\infty}\Big|J[u^\star] - J_r[u^\star_r]\Big| = 0. \tag{4.9}$$

Доказательство. Формулы (3.6) и (4.2) в случае (4.4) — (4.7) выглядят так

$$\lim_{r\to\infty}\Big\|\vartheta^\star(k,\omega) - \vartheta^\star_r(k,\omega)\Big\| = 0, \tag{4.10}$$

$$\lim_{r\to\infty}\Big|J[u^\star] - J_r[u^\star]\Big| = 0. \tag{4.11}$$

Рассмотрим оценку разности $J[u^\star_r] - J_r[u^\star_r]$. В силу условия теоремы, из (4.7) и (4.8) получаем

$$\Big|J[u^\star_r] - J_r[u^\star_r]\Big| \leq L_2(\omega)\left[\Big\|u^\star(k,\omega) - u^\star_r(k,\omega)\Big\| + \Big\|\vartheta^\star(k,\omega) - \vartheta^\star_k(k,\omega)\Big\|\right]. \tag{4.12}$$

С учетом (4.3) и (4.10) из (4.12) получаем, что справедливо соотношение

$$\lim_{r\to\infty}\Big|J[u_r^\star]-J_r[u_r^\star]\Big|=0. \tag{4.13}$$

Так как

$$\Big|J[u^\star]-J_r[u_r^\star]\Big|\le\Big|J[u^\star]-J_r[u^\star]\Big|+\Big|J[u_r^\star]-J_r[u_r^\star]\Big|,$$

то, переходя к пределу при $r\to\infty$, с учетом (4.11) и (4.13) получаем (4.9).
Доказательство закончено.

5. Заключение

Аналитическое решение задач оптимального управления процессами, описываемыми интегральными уравнениями с нелинейным запаздывающим аргументом, очень сложно. Поэтому на практике используются приближенные методы построения программного и синтезирующего оптимального управления. В данной работе рассматриваются вопросы приближенного решения задачи оптимального управления для одной нелинейной случайной системы интегральных уравнений Вольтерра с нелинейным запаздывающим аргументом и с нелинейным критерием оптимальности. При этом используются итерации (4.5) и (4.8). Доказывается сходимость последовательности функционала качества (4.8). В качества примера для уравнения (1.1) составляется математическая модель экономики производственной компании.

6. Приложение

Пример математической модели. Рассмотрим производственный процесс одной компании в условиях рыночных отношений. Пусть компания производит n видов продукции и $u_i(t)$ – объем i-й продукции компании, реализованной к моменту времени $t,\ i=\overline{1,n}$. Её доход к данному моменту времени t составляет

$$y_i(t)=p_i(t)u_i(t),\ i=\overline{1,n}, \tag{6.1}$$

где $p_i(t)$ – рыночная цена реализации i-й продукции производимой компанией в момент времени t.

Из (6.1) видно, что если цена реализации продукции возрастает, то и доход компании тоже возрастает к данному моменту времени t. Но, повышение цены может отрицательно отражаться в скорости реализации товара, производимой компанией.

Путем дифференцирования формулы (6.1) по времени t находим скорость реализации i-й продукции

$$y_i'(t)=p_i'(t)u_i(t)+p_i(t)u_i'(t),\ i=\overline{1,n}, \tag{6.2}$$

где $p_i'(t)$ – тенденция формирования ценообразования i-й продукции.

Нас интересует случай, когда $y_i'(t)>0$, то есть с течением времени все больше и больше продукций реализуются. Из формулы (6.2) видно, что это зависит от тенденции формирования ценообразования $p_i'(t)$ и скорости выпуска продукции $u_i'(t)$. Но, $p_i'(t)$ определяется из равновесия спроса и предложения на i-ю продукцию на рынке к моменту времени $t,\ i=\overline{1,n}$.

Скорость выпуска i-й продукции определяется из следующего соотношения

$$u_i'(t)=\alpha_i(t)z_i\big(t-\tau_i(t)\big),\ i=\overline{1,n}, \tag{6.3}$$

где $z_i(t)$ – функция инвестиции, направленных на расширение производства i-й продукции, $\alpha_i(t)$– коэффициент эффективности использования инвестиции, $0 < \alpha_i(t) < 1$, $0 < t_0 < \tau_i(t) < t$. Если функция запаздывания $\tau_i(t)$ меньше будет, то это способствует тому, что скорость выпуска i-й продукции больше становится. Если $\tau_i(t) = t$, то процесс инвестирования будет останавливаться. Очевидно, что запаздывание $\tau_i(t)$ зависит от объема продукций $u(t) = \big(u_1(t), u_2(t), \ldots, u_n(t)\big)$ и скорости реализации производимой компанией продукции $y'(t) = \big(y'_1(t), y'_2(t), \ldots, y'_n(t)\big)$ к моменту времени t

$$\tau_i(t) = \tau_i\big(t, u(t), y'(t)\big),\ i = \overline{1, n}.$$

Тогда формула (6.3) приобретает вид

$$u'_i(t) = \alpha_i(t) z_i\Big(t - \tau_i\big(t, u(t), y'(t)\big)\Big),\ i = \overline{1, n}. \tag{6.4}$$

Величина инвестиций $z_i(t)$ является частью дохода

$$z_i(t) = q_i(t) y_i(t),\ i = \overline{1, n}, \tag{6.5}$$

где $q_i(t)$ – доля прибыли в составе дохода от реализации i-й продукции, $0 < q_i(t) < 1$. Величина $q_i(t)$ характеризует рентабельность производства i-й продукции.

Подставляя (6.5) в (6.4), получаем

$$u'_i(t) = \alpha_i(t) q_i\Big(t - \tau_i\big(t, u(t), y'(t)\big)\Big) y_i\Big(t - \tau\big(t, u(t), y'(t)\big)\Big),\ i = \overline{1, n}. \tag{6.6}$$

Из формулы (6.6) следует, что величина скорости выпуска i-й продукции $u'_i(t)$ взаимосвязана с величиной рентабельности производства этой продукции. Запаздывание τ_i характеризуется величиной продукций, накопленных в складах предприятия, и скоростью выпуска продукции к данному моменту времени t.

Подстановка (6.6) в (6.2) дает нам следующую систему дифференциальных уравнений

$$y'_i(t) = p'_i(t) u_i(t) + \beta_i(t) q_i\Big(t - \tau_i\big(t, u(t), y'(t)\big)\Big) y_i\Big(t - \tau\big(t, u(t), y'(t)\big)\Big),\ i = \overline{1, n}, \tag{6.7}$$

где $\beta_i(t) = p_i(t)\alpha_i(t)$, $0 < \beta_i(t) < 1$, $0 < q_i(t) < 1$ – известные функции, $y_i(t)$ – неизвестная функция, $u_i(t)$– функция управления,

$$t - \tau_i\big(t, u(t), y'(t)\big) \geq t_0 - \eta,\ 0 < \eta = const.$$

В системе уравнений (6.7) учтем фактор внешнего воздействия $f_i(t)$. Отметим, что фактор внешнего воздействия чаще всего зависит от дохода самой компании. Если учтем случайных внешних факторов, то система дифференциальных уравнений (6.7) приобретает вид

$$\begin{aligned} y'_i(t) = p'_i(t) u_i(t) + \beta_i(t) q_i\Big[t - \tau_i\big(t, u(t), y'(t)\big)\Big] \times \\ \times y_i\Big[t - \tau_i\big(t, u(t), y'(t)\big)\Big] + f_i(t, y(t), \xi(t)),\ i = \overline{1, n}, \end{aligned} \tag{6.8}$$

где $\xi(t)$ – случайный процесс с непрерывными траекториями в $\Re^n$.

Систему дифференциальных уравнений (6.8) будем рассматривать при начальном условии

$$y'_i(t) = \varphi_i(t),\ t \in [-\eta, t_0],\ 0 < \eta = const,\ i = \overline{1, n}.$$

На большом временном отрезке $\Big[t-\tau_i\big(t,u(t),y'(t)\big);t\Big]$ максимизировать доход компании практически невозможно. Поэтому этот вопрос решается путем минимизации функции запаздывания $\tau_i\big(t,u(t),y'(t)\big)$, управляя объемом продукции на отрезке времени D_T.

Примем обозначение $y_i'(t)=\vartheta_i(t)$. Тогда с учетом начального условия имеем

$$y_i(t)=\varphi_i(t_0)+\int\limits_{t_0}^{t}\vartheta_i(s)ds,\ i=\overline{1,n}.$$

В этом случае система дифференциальных уравнений (6.8) приобретает вид системы интегральных уравнений Вольтерра

$$\vartheta_i(t)=p_i'(t)u_i(t)+\beta_i(t)q_i\Big[t-\tau_i\big(t,u(t),\vartheta(t)\big)\Big]\times$$

$$\times\left[\varphi_i(t_0)+\int\limits_{t_0}^{t}\vartheta_i\Big[s-\tau_i\big(s,u(s),\vartheta(s)\big)\Big]ds\right]+f_i\left(t,\varphi_i(t_0)+\int\limits_{t_0}^{t}\vartheta_i(s)ds,\xi(t)\right)$$

с условием $\vartheta_i(t)=\varphi_i(t),\ t\in[-\eta,t_0],\ 0<\eta=const,\ i=\overline{1,n}$.

Список литературы

1. Александров А. Г., *Оптимальные и адаптивные системы*, Высшая школа, М., 1989, 263 с.

2. Андреев Ю. Н., *Управление конечномерными линейными объектами*, Наука, М., 1976, 424 с.

3. Вязгин В. А., Федоров В. В., *Математические методы автоматизированного проектирования*, Высшая школа, М., 1989, 184 с.

4. Куропаткин П. В., *Оптимальные и адаптивные управления*, Наука, М., 1980, 228 с.

5. Бутковский А. Г., *Теория оптимального управления системами с распределенными параметрами*, Наука, М., 1965, 474 с.

6. Евтушенко Ю. Г., *Методы решения экстремальных задач и их применение в системах оптимизации*, Наука, М., 1982, 432 с.

7. Егоров А. И., *Оптимальное управление тепловыми и диффузионными процессами*, Наука, М., 1978, 464 с.

8. Лионс Ж. Л., *Оптимальное управление системами, описываемыми уравнениями с частными производными*, Мир, М., 1972, 412 с.

9. Лурье К. А., *Оптимальное управление в задачах математической физики*, Наука, М., 1975, 480 с.

10. Рапопорт Э. Я., *Оптимальное управление системами с распределенными параметрами*, Высшая школа, М., 2009, 680 с.

11. Кротов В. Ф., Гурман В. И., *Методы и задачи оптимального управления*, Наука, М., 1973, 448 с.

12. Срочко В. А., *Итерационные методы решения задач оптимального управления*, Физматлит, М., 2000, 160 с.

13. Тятюшкин А. И., *Численные методы и программные средства оптимизации управляемых систем*, СО "Наука", Новосибирск, 1992, 193 с.

14. Федоренко Р. П., *Приближенное решение задач оптимального управления*, Наука, М., 1978, 488 с.

15. Юлдашев Т. К., “Об одной задаче оптимального управления для нелинейного псевдогиперболического уравнения”, *Моделирование и анализ информационных систем*, **20**:5 (2013), 78 – 89.

16. Юлдашев Т. К., “Приближенное решение задачи оптимального управления для нелинейного псевдопараболического уравнения”, *Вестн. ВоронежГУ. Серия: Системный анализ и информационные технологии*, 2014, № 1, 45 – 51.

17. Юлдашев Т. К., “Приближенное решение точечной подвижной задачи оптимального управления для нелинейного гиперболического уравнения”, *Моделирование и анализ информационных систем*, **21**:3 (2014), 106 – 120.

18. Юлдашев Т. К., “Нелинейная точечная задача оптимального управления для псевдопараболического уравнения”, *Вестн. ВоронежГУ. Серия: Системный анализ и информационные технологии*, 2014, № 3, 9 – 16.

19. Юлдашев Т. К., “Приближенное решение нелинейного параболического и обыкновенного дифференциального уравнений и приближенный расчет функционала качества при известных управляющих воздействиях”, *Проблемы управления*, 2014, № 4, 2 – 8.

20. Юлдашев Т. К., “О построении приближений для оптимального управления в квазилинейных уравнениях с частными производными первого порядка”, *Матем. теория игр и её приложения*, **6**:3 (2014), 105 – 119.

21. Юлдашев Т. К., “Приближенное решение дифференциальных уравнений с нелинейным запаздыванием и приближенное вычисление функционала качества при известном управлении”, *Журн. средневолжского мат. общества*, **16**:4 (2014), 75 – 84.

22. Юлдашев Т. К., Артыкова Ж. А., “Случайные интегральные уравнения Вольтерра первого рода с нелинейной правой частью”, *Сб. «Предельные теоремы теории вероятностей и их приложения»*, 2005, 204 – 206.

Approximate solving the system of nonlinear integral equations with delay argument and approximate calculation of functionality of quality

© T. K. Yuldashev[3] S. M. Ovsianikov[4]

Abstract. It is considered the questions of approximate solving of differential equations with nonlinear delay and of approximate calculation of functionality of quality at known operating influences. This problem is involved the control bounded by a constant and is contained it as nonlinear function into equation and into functionality of quality. It is considered the case when the variables are integer values. The problem is changed to its discrete analog. For each set of given coordinate and controls the initial value problem is reduced to a summary equation with nonlinear delay. It is proved the existence and uniqueness of solution of the summary equation. It is used the method of successive approximations, combined it with the method of compressing maps. It is estimated the permissible error with respect to state of approximation solution of initial value difference problem. Further it is proved that discrete control sequence is minimizing for the considering problem. As an example it is constructed a simple dynamical model of the economy in the form of differential equations with delay time, which is considered in this paper. This model takes into account the relationship of volume of production and income in certain conditions of market pricing.

Key Words: Volterra integral equation, nonlinear delay, optimal control, random approximate solution, mathematical model of economics.

[3] Associate professor of Higher Mathematics Chair, M. F. Reshetnev Siberian State Aerospace University, Krasnoyarsk, tursunbay@rambler.ru

[4] Graduate Student, Institut of Informatics and Telecommunication , M. F. Reshetnev Siberian State Aerospace University, Krasnoyarsk, s.ovsianikov@yandex.ru