УДК 517.9

Энергетическая функция и топологическая классификация потоков Морса-Смейла на поверхностях

© **Е. Я. Гуревич[1], Е. Д. Куренков[2]**

Аннотация. В работе вводится понятие согласованной эквивалентности энергетических функций Морса-Ботта для потоков Морса-Смейла на поверхностях и доказывается, что согласованная эквивалентность энергетических функций является необходимым и достаточным условием топологической эквивалентности таких потоков. Предлагаемый результат устраняет неточность в доказательстве аналогичного факта К. Мейером, замеченную А.А. Ошемковым и В.В. Шарко.

Ключевые слова: структурно-устойчивые потоки на поверхностях, потоки Морса-Смейла, топологическая классификация, функция Ляпунова.

1. Введение

Работа является продолжением работы [3], где сформулирован результат и приведена история вопроса. В настоящей работе уточняются формулировки и приводится детальное доказательство анонсированного результата.

Напомним, что непрерывная функция $\varphi : M^n \to \mathbb{R}$ называется *функцией Ляпунова* потока f^t на M^n, если она удовлетворяет следующим условиям:

1. $\varphi(f^t(x)) < \varphi(x)$ для любой блуждающей точки $x \in M^n$ и любого $t > 0$.
2. $\varphi(f^t(x)) = \varphi(x)$ для любой неблуждающей точки $x \in M^n$.

Из работы Ч. Конли [2] следует, что непрерывная функция Ляпунова существует для любого гладкого потока. Из работы В. Вильсона и Дж. Йорке [7] следует, что любой структурно-устойчивый поток обладает *энергетической функцией*, то есть гладкой функцией Ляпунова, множество критических точек которой совпадает с неблуждающим множеством системы[3].

Напомним, что точка $p \in M^n$ называется *критической точкой* C^2-гладкой функции $\varphi\colon M^n \to \mathbb{R}$, если $\frac{\partial\varphi}{\partial x_i}|_p = 0$ для любого $i \in 1,...,n$ в локальных координатах $x_1,...,x_n$ в окрестности точки p. Число отрицательных (нулевых) собственных значений матрицы Гессе в критической точке p будем называть *индексом* (*степенью вырождения*) этой точки и обозначать i_p (k_p).

Обозначим через Δ множество всех критических точек функции $\varphi : M^n \to \mathbb{R}$ и через $\Delta_k \subset \Delta$ — множество критических точек функции φ, для которых степень невырожденности равна k. Функция $\varphi : M^n \to \mathbb{R}$ называется *функцией Морса*, если $\Delta = \Delta_0$ (то есть все ее критические точки невырождены). Функция φ называется *функцией Морса-Ботта*, если множество Δ есть объединение конечного числа гладких подмногообразий

[1] Доцент кафедры фундаментальной математики, Национальный исследовательский университет Высшая школа экономики; elena _ gurevich@list.ru.

[2] Студент факультета экономики, Национальный исследовательский университет Высшая школа экономики; eugene2402@mail.ru.

[3] В работе [7] доказано, что для любого гладкой потока f^t существует гладкая функция Ляпунова, множество критических точек которой совпадает с цепно-рекуррентным множеством этого потока. Для структурно-устойчивого потока цепно-рекуррентное множество совпадает с неблуждающим множеством.

$C_1, ..., C_l$ многообразия M^n и гессиан в каждой критической точке $p \in C_i$ невырожден в направлении, нормальном к подмногообразию C_i, $i \in \{1, ..., l\}$.

Для функции Морса-Ботта справедливо следующее утверждение, называемое леммой Морса-Ботта (см., например, [1]).

Предложение 1.1. *Пусть $\varphi : M^n \to \mathbb{R}$ — функция Морса-Ботта, C — ее критическое подмногообразие размерности d и $p \in C$ — произвольная точка. Тогда существует окрестность $U_p \in M^n$ точки p и диффеоморфизм $g : U_p \to \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^{n-d}$ такие, что:*

1. $g(p) = 0$;
2. $g(U_p \cap C) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^{n-d} | \ y = 0\}$;
3. $\varphi(g^{-1}(x, y)) = \varphi(C) - y_1^2 - y_2^2 - ... - y_{i_p}^2 + y_{i_p+1}^2 + ... + y_{n-d}^2$,

причем значение $\varphi(C)$ одно и то же для всех точек $p \in C$.

Напомним, что гладкий поток f^t на многообразии M^n называется *потоком Морса-Смейла*, если его неблуждающее множество $\Omega(f^t)$ состоит из конечного числа гиперболических состояний равновесия и конечного числа гиперболических замкнутых траекторий, а устойчивые и неустойчивые многообразия различных состояний равновесия и периодических решений пересекаются трансверсально. Поток Морса-Смейла без замкнутых траекторий называется *градиентно-подобным потоком.*

Из работы [6] С. Смейла (Th B) следует, что для любого градиентно-подобного потока f^t на M^n существует энергетическая функция $\varphi : M^n \to [0, n]$ со следующими свойствами:

1. Функция φ является функцией Морса.
2. $\varphi(p) = dim\ W_p^u$ для любого состояния равновесия $p \in \Omega(f^t)$.

К. Мейер в работе [4] доказал, что для произвольного потока Морса-Смейла f^t на M^n существует C^∞-гладкая энергетическая функция $\varphi : M^n \to [0, n]$ следующими свойствами:

1. Функция φ является функцией Морса-Ботта.
2. Множество Δ_0 совпадает с множеством всех неподвижных точек потока f^t, множество Δ_1 совпадает с множеством предельных циклов.
3. $\varphi(p) = dim\ W_p^u$ для любого состояния равновесия $p \in \Omega(f^t)$.
4. $\varphi(x) = 0(2)$ для любой точки x, принадлежащей устойчивому (неустойчивому) предельному циклу.

Будем называть функцию, построенную Мейером, *энергетической функцией Морса-Ботта* потока Морса-Смейла.

Пусть γ — предельный цикл потока f^t периода τ_γ, $x_0 \in \gamma$ — произвольная точка, $x_1 = f^{t_1}(x_0), x_2 = f^{t_2}(x_0)$, $0 < t_1 < t_2 < \tau_\gamma$. Точки x_0, x_1, x_2 задают ориентацию предельного цикла γ, которую будем называть *ориентацией, индуцированной потоком* f^t. Пусть γ' — предельный цикл потока f'^t, на котором определена ориентация, индуцированная потоком f'^t. Будем говорить, что гомеоморфизм $h : \gamma \to \gamma'$ является сохраняющим ориентацию, если ориентация на предельном цикле γ', определенная точками $h(x_0), h(x_1), h(x_2)$, совпадает с ориентацией, индуцированной потоком f'^t.

Определение 1.1. *Пусть f^t, f'^t — потоки Морса-Смейла, φ, φ' — энергетические функции Морса-Ботта потоков f^t и f'^t соответственно. Функции φ, φ' называются согласованно эквивалентными, если существуют гомеоморфизмы $H\colon M^n \to M^n$ и $\chi\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ такие, что:*

1. *гомеоморфизм χ является сохраняющим ориентацию;*
2. *$f'H = \chi f$;*
3. *для любого предельного цикла $\gamma \in \Delta_1$ ограничение $H|_\gamma$ гомеоморфизма H на γ является сохраняющим ориентацию.*

Основной результат работы заключается в следующей теореме.

Теорема 1.1. *Для того, чтобы два потока Морса-Смейла f^t и f'^t, заданные на ориентируемом многообразии M^2, были топологически эквивалентными, необходимо и достаточно, чтобы их энергетические функции Морса-Ботта φ и φ' были согласованно эквивалентными.*

Работа выполнена в рамках Программы фундаментальных исследований НИУ ВШЭ в 2015 году (проект «Динамические системы и их приложения») при частичной финансовой поддержке РФФИ (гранты 13-01-12452 офи-м2, 15-01-03687 А). Авторы благодарят В.З. Гринеса и О.В. Починку за внимание к работе и полезные обсуждения.

2. Окрестность замкнутой траектории

Пусть f^t — поток Морса-Смейла на многообразии M^2 и γ — его устойчивый предельный цикл. Из существования энергетической функции Морса-Ботта φ и утверждения 1.1. следует, что существует замкнутая окрестность $N_\gamma(\varepsilon)$ предельного цикла γ, имеющая структуру локально-тривиального расслоения над окружностью со слоем отрезок (диффеоморфная либо кольцу $\mathbb{S}^1 \times [-\varepsilon, \varepsilon]$, либо листу Мебиуса) и оснащенная парой гладких трансверсальных слоений $\{S_r\}_{r\in[0,\varepsilon]}$, $\{R_s\}_{s\in\gamma}$ со следующими свойствами:

1. $S_r \subset \varphi^{-1}(r)$ для любого $r \in [0, \varepsilon]$; $S_0 = \gamma$. Если $r > 0$, и N_γ ориентируема, то S_r — пара непересекающихся окружностей. Если $r > 0$ и $N_\gamma(\varepsilon)$ не ориентируема, то S_r — одна окружность.
2. R_s является объединением пары траекторий градиентного потока $-grad\varphi$ функции φ, и точки $s \in \gamma$, принадлежащей замыканию этих траекторий.
3. для любой пары s, r $(r \neq 0)$ пересечение $S_r \cap R_s$ трансверсально и состоит в точности из двух точек, причем в ориентируемом случае каждая компонента связности S_r пересекается с R_s ровно в одной точке.

Лемма 2.1. *Существует такое $\varepsilon > 0$, что для любого $s \in \gamma$ слой R_s является дугой без контакта для потока $f^t|_{N_\gamma(\varepsilon)}$.*

Доказательство. Пусть $N_\gamma(\tilde\varepsilon)$ — окрестность, определенная выше. Из теоремы о трубке тока (см., например, теорему 1.1 в книге [5]) следует, что для любой точки $s \in \gamma$ существует такая окрестность $U_s \subset N_\gamma(\tilde\varepsilon)$, что дуга $R_s \cap U_s$ является дугой без контакта для ограничения потока f^t на U_s. В силу компактности дуги γ существует конечное число точек $s_1, ..., s_k \subset \gamma$ таких, что множество $\{U_{s_i} \cap \gamma\}_{i \in \{1,...,k\}}$ образует покрытие дуги γ. Тогда существует ε такое, что окрестность $N_\gamma(\varepsilon) \subset \bigcup\limits_{i=1}^{n} U_{s_i}$.

Доказательство закончено.

Далее всюду будем предполагать, что окрестность $N_\gamma(\varepsilon)$ предельного цикла удовлетворяет заключению леммы 2.1. и будем опускать ε в обозначении этой окрестности: $N_\gamma = N_\gamma(\varepsilon)$.

Положим $\widetilde{N}_\gamma = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | \ |y| \leqslant \varepsilon\}$, $\Pi = \{(x, y) | \ 0 \leqslant x < 1, |y| \leqslant \varepsilon\}$.

Пусть N_γ ориентируема. Тогда она гомеоморфна кольцу $\mathbb{S}^1 \times [-\varepsilon, \varepsilon]$ и существует накрытие $p_+ \colon \widetilde{N}_\gamma \to N_\gamma$, обладающее следующими свойствами:

1. ограничение $p_+|_\Pi : \Pi \to N_\gamma$ отображения p_+ на множество Π является взаимно-однозначным;

2. $p_+(x + k, y) = p_+(x, y)$ для любых $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ и $k \in \mathbb{Z}$;

3. для любого отрезка $I_x \subset \Pi$, параллельного оси Oy и проходящего через точку $x \in OX$ выполняется $p_+(I_x) = R_{p+(x,0)}$;

4. для любой прямой $L_y \subset \Pi$, параллельной оси Ox и проходящей через точку $y \in Oy$, выполняется $p_+(L_y \cup L_{-y}) = S_y$.

Пусть N_γ неориентируема. Тогда она диффеоморфна листу Мебиуса и существует накрытие $p_- \colon \widetilde{N}_\gamma \to N_\gamma$, обладающее следующими свойствами:

1. ограничение $p_-|_\Pi : \Pi \to \gamma$ отображения p_- на множество Π является взаимно-однозначным;

2. $p_-(x + k, y) = p_-(x, (-1)^k y)$ для любых $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ и $k \in \mathbb{Z}$;

3. для любого отрезка $I_x \subset \Pi$, параллельного оси Oy и проходящего через точку $x \in OX$ выполняется $p_-(I_x) = R_{p-(x,0)}$;

4. для любой прямой $L_y \subset \Pi$, параллельной оси Ox и проходящей через точку $y \in Oy$ выполняется $p_-(L_y \cup L_{-y}) = S_y$.

Обозначим через $\tilde{f}^t_\delta$ поток в $\widetilde{N}_\gamma$, накрывающий поток $f^t|_{N_\gamma}$, $\delta \in \{+, -\}$.

Для определенности предположим, что при обходе замкнутой траектории γ в направлении возрастания времени соответствующее значение x в накрывающем пространстве $\widetilde{N}_\gamma$ растет. Тогда каждая траектория потока $\tilde{f}^t_\delta$, лежащая выше оси Ox, является графиком убывающей функции, а каждая траектория потока $\tilde{f}^t_\delta$ лежащая ниже оси Ox, является графиком возрастающей функции.

Лемма 2.2. *Пусть N_γ — окрестность замкнутой траектории, определенная в лемме 2.1.. И пусть $\eta, \theta \in \partial N_\gamma$ — две произвольные различные точки на границе этой окрестности, причем в случае ориентируемой N_γ точки η и θ принадлежат разным компонентам связности границы ∂N_γ. Тогда существует дуга без контакта $c \in N_\gamma$, соединяющая точки η и θ.*

Доказательство. Рассмотрим ориентируемый случай. Обозначим через $\tilde{\eta}, \tilde{\theta}$ такие точки в Π, что $p_\delta(\tilde{\eta}) = \eta$, $p_\delta(\tilde{\theta}) = \theta$. Для определенности будем считать, что $\tilde{\eta} = (x_\eta, \varepsilon)$, $\tilde{\theta} = (x_\theta, -\varepsilon)$ и $\tilde{\eta}$ лежит левее $\tilde{\theta}$ (см. рис. 1, а)). Рассуждения в случае, когда точка $\tilde{\eta}$ лежит правее точки $\tilde{\theta}$, будут аналогичными.

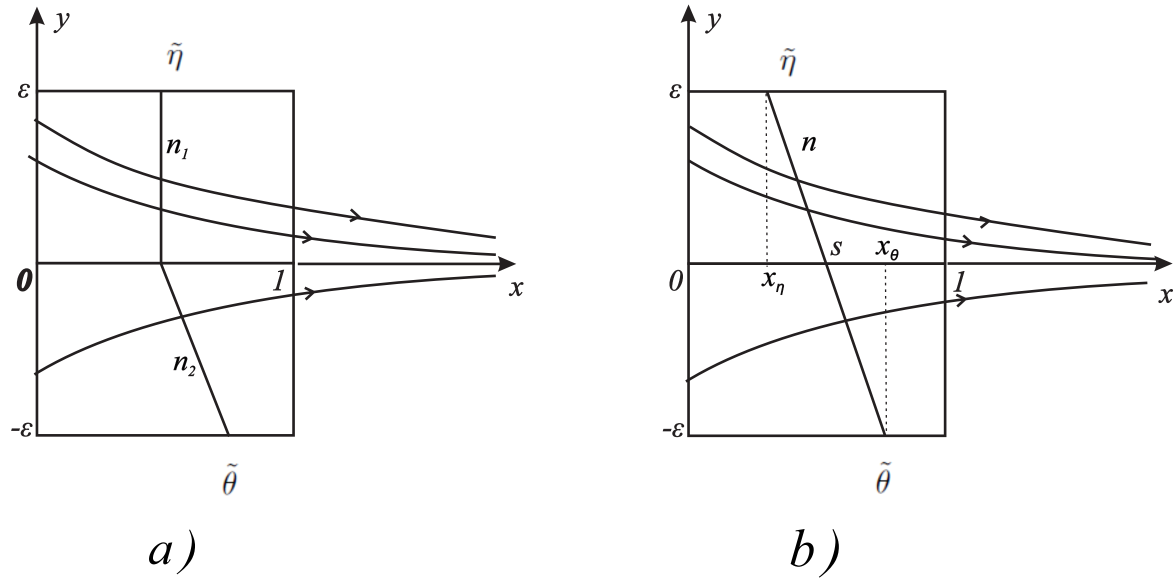

Рис. 1: а) построение дуги без контакта в лемме 2.2.; б) построение слоения в лемме 2.3.

Построим дугу $n\subset\Pi'$, соединяющую точки $\tilde\eta$ и $\tilde\theta$, и являющуюся дугой без контакта для потока $\tilde f^t_\delta$. Тогда дуга $p_\delta(n)$ будет искомой дугой c. Дугу n получим как объединение двух отезков прямых n_1, n_2. Отрезок n_1 соединяет точки $\tilde\eta$ и $(x_\eta,0)$, отрезок n_2 соединяет точки $(x_\eta,0)$ и $\tilde\theta$. Отрезок n_1 является дугой без контакта для потока $\tilde f^t_\delta$ в силу того, что он принадлежит прообразу некоторого слоя R_s слоения $\{R_s\}$, определенного в лемме 2.1.. Отрезок n_2 будет являться дугой без контакта в силу того, что является графиком монотонно убывающей функцией, в то время как все траектории потока $\tilde f^t_\delta$, лежащие ниже оси Ox, являются графиками возрастающих функций.

В случае неориентируемой окрестности N_γ достаточно заметить, что всегда можно выбрать такую область $\Pi'=\{(x,y)\mid k\leqslant x<k+1, |y|\leqslant\varepsilon\}$, $0\leqslant k<1$, что точки $\tilde\eta,\tilde\theta\in\Pi'$ такие, что $p_\delta(\tilde\eta)=\eta$, $p_\delta(\tilde\theta)=\theta$, принадлежат разным прямым $y=\pm\varepsilon$. Дальнейшие рассуждения аналогичны рассуждениям для первого случая.
Доказательство закончено.

Представим ориентируемую окрестность N_γ в виде объединения двух замкнутых колец N_1 и N_2, каждое из которых ограничено замкнутой траекторией γ и одной из компонент связности границы ∂N_γ. Обозначим через $D_1\subset N_1$, $D_2\subset N_2$ компоненты связности границы ∂N_γ. Зафиксируем на окружностях D_1, D_2 ориентацию, согласованную с ориентацией предельного цикла, индуцированной потоком f^t. А именно, если при обходе предельного цикла γ в направлении, задаваемой его ориентацией, окрестность N_i остается справа (слева), то при обходе окружности D_i в направлении, заданном её ориентацией, окрестность N_i остается слева (справа).

Лемма 2.3. *Пусть N_γ — ориентируемая окрестность, удовлетворяющая заключению леммы 2.1.. Тогда для любого сохраняющего ориентацию гомеоморфизма $\Gamma\colon D_1\to D_2$ существует непрерывное слоение $\{T_s\}_{s\in\gamma}$ такое, что*

1. *каждый слой T_s пересекает окружность D_i в единственной точке, причем $T_s\cap D_2=\Gamma(T_s\cap D_1)$;*
2. *для каждого $i\in\{1,2\}$ и каждого $c\in[0,\varepsilon]$ пересечение $T_s\cap N_i\cap\varphi^{-1}(c)$ состоит ровно из одной точки.*

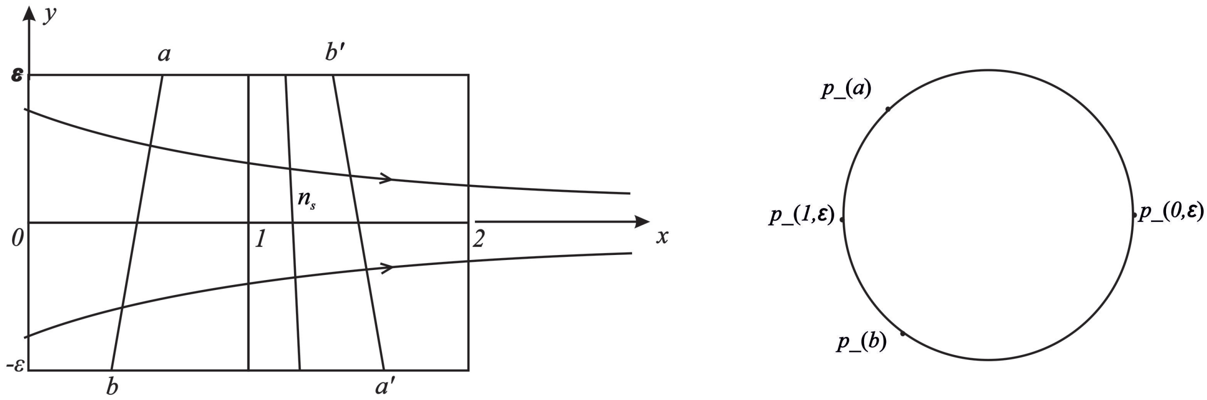

Рис. 2: Построение слоения в лемме 2.4.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Обозначим точку $(0,\varepsilon)$ за a. На полуинтервале $[(0,-\varepsilon);(1,-\varepsilon))$ необходимо найдется единственная точка b с координатами $(x_b,-\varepsilon)$ такая, что $p_+(a)=\Gamma(p_+(b))$. Пусть точка a' имеет координаты $(1,\varepsilon)$, а точка b' — координаты $(x_b+1,-\varepsilon)$. Обозначим за T параллелограмм с вершинами a,a',b',b В накрывающем пространстве отображение Γ индуцирует гомеоморфизм $\widetilde{\Gamma}\colon [a,a']\to[b,b']$.

Обозначим через n отрезок, принадлежащий трапеции T, соединяющий точки $d\in[a,a']$ и $\widetilde{\Gamma}(d)\in[b,b']$, положим $\tilde{s}=n\cap Ox$, $s=p_-(\tilde{s})$, $T_s=p_-(n)$. Дуга T_s удовлетворяет условию 1) по построению. Условие 2) следует из определения накрытия p_+ и того факта, что отрезок n пересекается с каждой прямой L_y, параллельной оси Ox, ровно в одной точке. Никакие две дуги $T_s,T_{s'}$, определенные таким образом, не пересекаются в силу того, что $\widetilde{\Gamma}$ переводит отрезок $[a,a']$ в отрезок $[b,b']$ с сохранением ориентации.
Д о к а з а т е л ь с т в о з а к о н ч е н о.

Л е м м а 2.4. *Пусть N_γ — неориентируемая окрестность, удовлетворяющая заключению леммы 2.1.. Пусть гомеоморфизм $\Gamma\colon \partial N_\gamma\to\partial N_\gamma$ не имеет неподвижных точек и является инволюцией. Тогда существует слоение $\{T_s\}_{s\in\gamma}$ такое, что:*

1. *каждый слой T_s пересекает ∂N_γ ровно в двух точках η_s и $\theta_s=\Gamma(\eta_s)$;*
2. *для каждого $c\in(0,\varepsilon]$ и каждого $s\in\gamma$ пересечение $T_s\cap\varphi^{-1}(c)$ состоит ровно из двух точек, а пересечение $T_s\cap\varphi^{-1}(0)$ — ровно из одной точки.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Обозначим за $l_1^+\subset\widetilde{N}_\gamma$ отрезок, соединяющий точки $(0,\varepsilon)$ и $(1,\varepsilon)$, а за l_1^- — отрезок, соединяющий точки $(0,-\varepsilon)$ и $(1,-\varepsilon)$ (см. рис. 2.). Покажем, что на отрезке l_1^+ имеется такая точка a, что на отрезке l_1^- имеется точка b, удовлетворяющая соотношению $p_-(b)=\Gamma(p_-(a))$. Предположим, что таких точек нет. Тогда дуга $p_-(0,\varepsilon)p_-(a)p_-(1,\varepsilon)$ окружности ∂N_γ гомеоморфизмом Γ отображается в себя. По теореме Брауэра отображение Γ будет иметь неподвижную точку, что противоречит условию леммы.

Пусть точка a имеет координаты (x_a,ε), а точка b — $(x_b,-\varepsilon)$. Обозначим через a' точку с координатами $(x_a+1,-\varepsilon)$, а через b' — точку с координатами (x_b+1,ε) и через T трапецию с вершинами a,b',a',b. Отметим, что $p_-(a)=p_-(a')$, $p_-(b)=p_-(b')$ и $p_-|_{T\setminus a'b'}\colon T\setminus a'b'\to N_\gamma$ является взаимно однозначным отображением.

Покажем, что гомеоморфизм Γ сюрьективно переводит дугу $p_-(a)p_-(0,\varepsilon)p_-(b)$ в дугу $p_-(a)p_-(1,\varepsilon)p_-(b)$. Заметим, что, поскольку гомеоморфизм Γ не имеет неподвижных точек, то он необходимо сохраняет ориентацию окружности ∂N_γ, так как любой меняющий ориентацию гомеоморфизм окружности имеет ровно две неподвижные точки. Это означает, что при движении по дуге $p_-(a)p_-(0,\varepsilon)p_-(b)$ произвольной точки от $p_-(a)$ к $p_-(b)$ ее образ при гомеоморфизме g опишет дугу $p_-(a)p_-(1,\varepsilon)p_-(b)$ в направлении от $p_-(b)$ к $p_-(a)$. Таким образом, в накрывающем пространстве отображение Γ индуцирует гомеоморфизм $\widetilde{\Gamma}\colon ab' \to ba'$ отрезка $[a,b]'$ на отрезок $[b,a']$.

Обозначим через n отрезок, принадлежащий трапеции T, и соединяющий точки $d \in [a,b']$ и $\widetilde{\Gamma}(d) \in [b,a']$, положим $\tilde{s} = n \cap Ox$, $s = p_-(\tilde{s})$, $T_s = p_-(n)$. Дуга T_s удовлетворяет условию 1) по построению. Условие 2) следует из определения накрытия p_- и того факта, что отрезок n пересекается с каждой прямой L_y, параллельной оси Ox, ровно в одной точке. Никакие две дуги $T_s, T_{s'}$, определенные таким образом, не пересекаются в силу того, что $\widetilde{\Gamma}$ переводит отрезок $[a,b']$ в отрезок $[b,a']$ с сохранением ориентации.
Доказательство закончено.

3. Доказательство теоремы 1.1..

Необходимость.

Пусть потоки f^t и f'^t топологически эквивалентны, то есть существует гомеоморфизм $h\colon M \to M$, переводящий траектории потока f^t в траектории потока f'^t с сохранением ориентации на траекториях. Построим гомеоморфизмы $H\colon M \to M$ и $\chi\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, сопрягающие энергетические ξ- функции φ и φ' данных потоков.

Так как у функций φ и φ' значения в любой критической точке x совпадают с размерностью неустойчивого многообразия $dim\ W^u_x$, то гомеоморфизм χ можно положить равным тождественному.

Положим $M_1 = M^2 \backslash \Delta_1$, и $M'_1 = M^2 \backslash \Delta'_1$ и определим вспомогательный гомеоморфизм $g_1\colon M_1 \to M'_1$ следующим образом. Пусть $x \in M_1$ — произвольная точка, отличная от состояния равновесия, l_x — траектория потока f^t, проходящая через точку x, $x' = h(x)$ и $l'_{x'} = h(l_x)$. Произвольной точке $y \in l_x$ поставим в соответствие точку $y' \in l'_{x'}$ такую, что $\varphi(y) = \varphi'(y')$ и положим $g_1(y) = y'$. Построенное отображение продолжим по непрерывности на множество состояний равновесия потока f^t.

Пусть $\mathbb{N}_0$ ($\mathbb{N}_2$) — совокупность попарно непересекающихся окрестностей устойчивых (неустойчивых) замкнутых траекторий потока f^t, удовлетворяющих заключению леммы 2.1.. Так как гомеоморфизм g_1 переводит линии уровня функции φ в линии уровня функции φ', то не уменьшая общности можно считать, что граница ∂N_γ любой окрестности $N_\gamma \subset \mathbb{N}_0 \cup \mathbb{N}_2$ переводится отображением g_1 в границу $\partial N'_{\gamma'}$ окрестности $N'_{\gamma'}$ замкнутой траектории γ' потока f'^t, также удовлетворяющей заключению леммы 2.1.. Определим гомеоморфизм g_0 на множестве $\mathbb{N}_0$ следующим образом. Пусть γ — устойчивый предельный цикл потока f^t, а $N_\gamma \subset \mathbb{N}_0$ — его окрестность. На границе ∂N_γ положим $g_0|_{\partial N_\gamma} = g_1$. Определим гомеоморфизм g_0 на внутренности окрестности N_γ. Возможны 2 случая.

1) N_γ и $N'_{\gamma'}$ ориентируемы. Слоение $\{R_s\}_{s\in\gamma}$, определенное в лемме 2.1., устанавливает гомеоморфизм $\Gamma\colon D_1 \to D_2$ между компонентами связности границы ∂N_γ. Тогда гомеоморфизм $g_1 \circ \Gamma \circ g_1^{-1}|_{D'_1}\colon D'_1 \to D'_2$ устанавливает соответствие между компонентами связности границы окрестности $N'_{\gamma'}$ замкнутой траектории γ'. В силу леммы 2.3. существует слоение $\{T'_s\}_{s\in\gamma'}$, такое, что для любой точки $x \in D_1$ найдется слой $T'_{s'}$, соединяющий пару точек $x' = g_1(x)$ и $y' = g_1(\Gamma(x))$. Это в свою очередь означает, что отображение $g_1|_{\partial N_\gamma}$ устанавливает взаимно-однозначное соответствие g_* между слоениями $\{R_s\}$ и $\{T'_s\}$ и гомеоморфизм из γ в γ'. Для произвольной точки $s \in \gamma$ положим

$g_0(s)=g_*(R_s)\cap\gamma'$. Теперь определим отображение g_0 внутри окрестностей N_1, N_2 . Каждой точке $p\in R_s\cap int\ N_i$ поставим в соответствие точку $q\in T'_{g_0(s)}\cap int\ N_i$ такую, что $\varphi(p)=\varphi'(q)$ и положим $g_0(p)=q$.

2) N_γ и $N'_{\gamma'}$ неориентируемы. Слоение $\{R_s\}_{s\in\gamma}$, определенное в лемме 2.1., задает гомеоморфизм $\Gamma\colon\partial N_\gamma\to N_\gamma$ такой, что $\Gamma\circ\Gamma=id$, и, кроме того, Γ не имеет неподвижных точек. Тогда гомеоморфизм $g_1\circ\Gamma\circ g_1^{-1}|_{\partial N'_{\gamma'}}$ удовлетворяет условиям леммы 2.4.. Действительно, $(g_1\circ\Gamma\circ g_1^{-1})\circ(g_1\circ\Gamma\circ g_1^{-1})=id$, и $g_1\circ\Gamma\circ g_1^{-1}$ не имеет неподвижных точек, так как в противном случае неподвижные точки имелись бы у отображения Γ . По лемме 2.4. существует слоение $\{T'_s\}_{s\in\gamma'}$ окрестности $N'_{\gamma'}$, такое, что для любой точки $x\in\partial N_\gamma$ найдется слой $T'_{s'}$, соединяющий пару точек $x'=g_1(x)$ и $y'=g_1(\Gamma(x))$. Это, в свою очередь означает, что отображение $g_1|_{\partial N_\gamma}$ устанавливает взаимно-однозначное соответствие g_* между слоями R_s и T'_s. Для произвольной точки $s\in\gamma$ положим $g_0(s)=g_*(R_s)\cap\gamma'$. Точка $s\in\gamma$ ($s'=g_0(s)$) делит слой R_s ($T'_{s'}$) на две компоненты связности $R_{s,1}, R_{s,2}$ ($T'_{s,1}, T'_{s,2}$). Пусть нумерация выбрана так, что $T'_{s,i}\cap\partial N'_{\gamma'}=g_1(R_{s,i}\cap\partial N_\gamma)$, $i\in\{1,2\}$. Каждой точке $p\in R_{s,i}$ поставим в соотвествие точку $q\in T'_{g_0(s),i}$ такую, что $\varphi(p)=\varphi'(q)$, $i\in\{1,2\}$, и положим $g_0(p)=q$.

Аналогичным образом определим гомеоморфизм g_2 на совокупности $\mathbb{N}_2$ окрестностей неустойчивых замкнутых траекторий. Искомый гомеоморфизм H определим следующей формулой

$$H(x)=\begin{cases} g_1(x), \text{ если } x\in M^2\setminus(\mathbb{N}_0\cup\mathbb{N}_2);\\ g_i(x), \text{ если } x\in\mathbb{N}_i,\ i\in\{0,2\}.\end{cases}$$

Покажем, что построенный гомеоморфизм $g_0: N_\gamma\to N'_{\gamma'}$ сохраняет ориентацию предельных циклов γ,γ' , индуцированную потоками f^t, f'^t соответственно. Слоение $\{R_s\}_{s\in\gamma}$ ($\{T'_s\}_{s\in\gamma'}$) позволяет задать ориентацию границы ∂N_γ ($\partial N'_{\gamma'}$), индуцированную ориентацией предельного цикла γ (γ') как в ориентируемом, так и в неориентируемом случае. Если при обходе γ (γ') в направлении траектории потока мы пересекаем точки $s_1,s_2,s_3\in\gamma$ ($s'_1,s'_2,s'_3\in\gamma'$) в порядке s_1,s_2,s_3 (s'_1,s'_2,s'_3), то на границе введем такую ориентацию, при которой слои R_{s_1},R_{s_2},R_{s_3} ($T'_{s'_1},T'_{s'_2},T'_{s'_3}$) пересекаются в соответствующем порядке при движении вдоль границы ∂N_γ ($\partial N'_{\gamma'}$). Отметим, что в ориентируемом случае данный подход эквивалентен определению, данному ранее (стр. 19).

Отображение h переводит окрестность N_γ предельного цикла γ в окрестность предельного цикла γ' с границей $h(\partial N_\gamma))$ таким образом, что γ переходит в γ' с сохранением ориентации. На границе ∂N_γ рассмотрим ориентацию, индуцированную ориентацией предельного цикла γ . Отображение $h|_{\partial N_\gamma}$ индуцирует ориентацию границы $h(\partial N_\gamma)$, согласованную с ориентацией предельного цикла γ' . Рассмотрим отображение $\widetilde{H}\colon h(\partial N_\gamma)\to\partial N'_{\gamma'}$, переводящее точку пересечения траектории l потока f'^t с кривой $h(\partial N_\gamma)$ в точку пересечения траектории l с кривой $\partial N'_{\gamma'}$. Отображение $\widetilde{H}$ индуцирует ориентацию границы $\partial N'_{\gamma'}$, согласованную с ориентацией предельного цикла γ' . Заметим, что $H|_{\partial N_\gamma}=\widetilde{H}\circ h_{\partial N_\gamma}$. Следовательно, отображение $H_{\partial N_\gamma}$ индуцирует ориентацию границы $\partial N'_{\gamma'}$, согласованную с ориентацией γ' . Таким образом, H переводит замкнутую траекторию γ в замкнутую траекторию γ' с сохранением ориентации.

Достаточность.

Пусть существуют гомеоморфизмы $H\colon M^2\to M^2$ и $\chi\colon\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ из определения согласованной эквивалентности энергетических ξ -функций. Построим гомеоморфизм $h\colon M^2\to M^2$, переводящий траектории потока f^t в траектории потока f'^t с сохранением ориентации на траекториях.

Положим $M_1=M^2\setminus\Delta_1$, и $M'_1=M^2\setminus\Delta'_1$ и определим вспомогательный гомеоморфизм $g_1\colon M_1\to M'_1$ следующим образом. Положим $g_1|_{\varphi^{-1}(1)}\equiv H$. Пусть $x\in\varphi^{-1}(1)$ —

произвольная точка, отличная от состояния равновесия, l_x — траектория потока f^t, проходящая через точку x, $x' = H(x)$ и $l'_{x'}$ — траектория потока f'^t, проходящая через точку x'. Поставим в соответствие произвольной точке $y \in l_x$ точку $y' \in l'_{x'}$ так, чтобы выполнялось соотношение $\varphi(y) = \varphi'(y')$ и положим $g_1(x) = y$. Определим отображение g_1 на сепаратрисах седловых состояний равновесия. Для произвольного седлового состояния равновесия $\sigma \in \varphi^{-1}(1)$ — положим $\sigma' = H(\sigma) = g_1(\sigma)$. Пусть U_σ — окрестность точки σ, не содержащая предельных циклов и состояний равновесий потока f^t, отличных от σ. Выберем такое $\varepsilon > 0$, что пересечение $U_\sigma \cap \varphi^{-1}(1+\varepsilon)$ не пусто и состоит в точности из двух компонент связности. Тогда каждая из этих компонет связности пересекается ровно с одной неустойчивой сепаратрисой седла σ, причем в единственной точке. Аналогично определим окрестность $U'_{\sigma'}$ точки σ' и проходящую через нее линию уровня $\varphi'^{-1}(1+\varepsilon)$.

Так как каждая из точек $U_\sigma \cap \varphi^{-1}(1+\varepsilon)$ является предельной лишь для одной компоненты связности линии уровня, то отображение g_1 единственным образом доопределяется в этой точке до непрерывного отображения, устанавливающего, кроме того, взаимно однозначное соответствие между множеством всех неустойчивых сепаратрис седловых точек потока f^t и множеством всех неустойчивых сепаратрис седловых точек потока f'^t. Это позволяет доопределить построенное отображение на множество всех неустойчивых сепаратрис. Аналогично определим искомое отображение g_0 на множестве всех устойчивых сепаратрис и продолжим по непрерывности построенное отображение на множество всех состояний равновесия потока f^t.

Пусть $\mathbb{N}_0$ ($\mathbb{N}_2$) — совокупность попарно непересекающихся окрестностей устойчивых (неустойчивых) замкнутых траекторий потока f^t, удовлетворяющих заключению леммы 2.1.. Так как гомеоморфизм g_1 переводит линии уровня функции φ в линии уровня функции φ', то не уменьшая общности можно считать, что граница ∂N_γ любой окрестности $N_\gamma \subset \mathbb{N}_0 \cup \mathbb{N}_2$ переводится отображением g_1 в границу $\partial N'_{\gamma'}$ окрестности $N'_{\gamma'}$ замкнутой траектории γ' потока f'^t, удовлетворяющей заключению леммы 2.1..

Теперь для построения искомого гомеоморфизма h достаточно определить гомеоморфизмы $g_0 : \mathbb{N}_0 \to \mathbb{N}'_0$, $g_2 : \mathbb{N}_2 \to \mathbb{N}'_2$, совпадающие на границах $\partial\mathbb{N}_0, \partial\mathbb{N}_2$ с гомеоморфизмом g_1. Тогда h будет определятся следующей формулой

$$h(x) = \begin{cases} g_1(x), \text{ если } x \in M^2 \setminus (\mathbb{N}_0 \cup \mathbb{N}_2); \\ g_i(x), \text{ если } x \in \mathbb{N}_i,\ i \in \{0, 2\}. \end{cases}$$

Опишем построение гомеоморфизма g_0 (построение гомеоморфизма g_2 аналогично).

Пусть γ — устойчивый предельный цикл потока f^t, а $N_\gamma \subset \mathbb{N}_0$ — его окрестность. Положим $g_0|_{\partial N_\gamma} \equiv g_1$. Выберем в окрестности N_γ произвольный слой R_s, определенный в лемме 2.1., являющийся для потока f^t дугой без контакта. Обозначим через $\eta \in \partial N_\gamma$ и $\theta \in \partial N_\gamma$ точки пересечения $R_s \cap \partial N_\gamma$. Если N_γ ориентируема, то будем читать, что $\eta \in D_1$, $\theta \in D_2$, и обозначим через D'_1, D'_2 компоненты связности края $\partial N'_{\gamma'}$ такие, что $g_1(\eta) \in D'_1, g_1(\theta) \in D'_2$. В силу леммы 2.2. существует дуга без контакта C' для потока f'^t, соединяющая точки $g_1(\theta)$ и $g_1(\eta)$. Далее рассмотрим случаи ориентируемой и неориентируемой окрестности N_γ по отдельности.

1) N_γ, $N'_{\gamma'}$ ориентируемы. Опишем построение гомеоморфизма g_0 в кольце N_1 (построения в кольце N_2 аналогичны).

Положим $c = R_s \cap N_1$, $x_0 = \eta$, $x_\infty = c \cap \gamma$. Обозначим через l_{x_0} траекторию потока f^t, проходящую через точку x_0 и через $x_0, x_1, x_2 \dots$ точки пересечения $l_{x_0} \cap c$, пронумерованные в порядке убывания значения функции φ в этих точках. Положим $c' = C' \cap N'_1$, $x'_0 = g_1(x_0)$, $x'_\infty = c' \cap \gamma'$, обозначим через $l'_{x'_0}$ траекторию потока f'^t, проходящую через точку x'_0, и через $x'_1, x'_2 \dots$ точки пересечения $l'_{x'_0} \cap c'$, пронумерованные в порядке убывания значения функции φ' в этих точках. Наконец, положим $g_0(x_i) = x'_i$, где

$i \in \mathbb{Z}_+ = \mathbb{N} \cup \{0\}$, и $g_0(x_\infty) = x'_\infty$.

Зададим теперь гомемоморфизм g_0 на участке c_1 дуги c, ограниченном точками x_0 и x_1. Любая траектория потока f^t, проходящая через произвольную точку $y \in c_1$ пересекает границу ∂N_γ ровно в одной точке z. Положим $z' = g_0(z) = g_1(z)$. Через точку z' проходит траектория потока f'^t, пересекающая участок c'_1 дуги c', ограниченный точками x'_0 и x'_1, ровно в одной точке y'. Положим $g_0(y) = y'$.

Отображение $g_0|_{c_1}$ является непрерывным в точках x_0 и x_1. Действительно, гомеоморфизм g_1 (а следовательно, и гомеморфизм g_0) переводит D_1 в D'_1 с сохранением ориентации, согласованной с ориентациями предельных циклов γ, γ', индуцированных потоками f^t, f'^t соответственно. Поэтому $g_0|_{int\ c_1}$ переводит точку с меньшим значением в ней функции φ в точку с меньшим значением в ней функции φ'.

Определим теперь гомеоморфизм g_0 на всей дуге c. Для этого введем на дугах c и c' отображения последования $\tau\colon c \to c$ и $\tau'\colon c' \to c'$ по следующему правилу. Для любой точки $x \in c$ положим $\tau(x) = f_x^\lambda(x) \in c$, где $\lambda > 0$ – такое число, что для любого $\tilde\lambda$, удовлетворяющего неравенству $0 < \tilde\lambda < \lambda$, верно, что $f^{\tilde\lambda}(x) \notin c$. Отображение τ' определим аналогично. Заметим, что любая точка $y \in c$ представляется в виде $y = \tau_y^k(y_1)$, где $y_1 \in c_1 \setminus x_1$. Аналогично представляется любая точка дуги c'. Тогда поставим произвольной точке $y \in c$ в соответствие точку $y' \in c'$ такую, что выполняется условие $y' = g_0(y) = g_0(\tau_y^k(y_1)) = \tau'^k_y(h(y_1))$, где $y_1 \in c_1 \setminus x_1$.

Теперь определим гомеоморфизм g_0 внутри N_1. В N_1 любая траектория, отличная от замкнутой траектории γ, разбивается точками пересечения с дугой c на счетное число участков. Таким образом, произвольная пара точек $x \in c$ и $\tau(x) \in c$ ограничивают участок некоторой траектории l_x потока f^t. Обозначим этот участок траектории за $l_x(x, \tau(x))$ (см. рис. 3). Точно также пара точек $x' = (h(x)) \in c'$ и $\tau(x') = h(\tau(x)) \in c'$ ограничивают участок $l'_{x'}(x', \tau(x'))$ траектории $l'_{x'}$ потока f'^t. Обозначим через T_x ($T'_{x'}$) время движения от точки x до $\tau(x)$ (от точки x' до точки $\tau'(x')$) по траектории l_x ($l'_{x'}$) и через $t_{x,y}$ ($t'_{x',y'}$) — время движения от точки $x, (x')$ до точки $y \in l_x(x, \tau(x))$ ($y' \in l'_{x'}(x', \tau'(x'))$). Произвольной точке $y \in l_x(x, \tau(x))$ поставим в соответствие точку $y' \in l'_{x'}(x', \tau(x'))$ такую, что $t_{x,y}/T_x = t'_{x',y'}/T'_{x'}$ и положим $g_0(y) = y'$. Аналогично определим отображение g_0 на предельном цикле γ. Так как функции $T_x, t_{x,y}$ являются непрерывными, то построеннное отображение g_0 является непрерывным.

Определим гомеоморфизм g_0 на участках траекторий, которые пересекают границу D_1. Пусть $z \in D_1$ — произвольная точка границы области N_1, l_z — траектория потока f^t, проходящая через точку z, и $y = l_z \cap c_1$. Участок траектории l_z между точками z, y обозначим через $l_z(z, y)$. Положим $z' = g_0(z)$, $y' = g_0(y)$ и обозначим через $l'_{z'}(z', y')$ участок траектории $l'_{z'}$ потока f'^t, заключенный между точками z' и y' (см. рис. 3). Теперь определим отображение $g_0 : l_z(z, y) \to l_{z'}(z', y')$ аналогично тому, как было определено отображение g_0 для дуг $l_x(x, \tau(x))$, $l'_{x'}(x', \tau'(x'))$.

Заметим что при движении точки z к точке x_0 вдоль границы D_1 в направлении, задаваемом ориентацией, длина дуги $l_z(z, y)$ стремится к нулю. Аналогичное утверждение верно для соответствующих объектов потока f'^t. Так как гомеоморфизм $g_0|_{D_1} : D_1 \to D'_1$ является сохраняющим ориентацию, то продолжение этого отображения внутрь кольца N_1, определенное выше, является гомеоморфизмом.

2) N_γ и $N'_{\gamma'}$ неориентируемы.

Положим $c = R_s$, $x_\infty = c \cap \gamma$, $x_0 = \eta$ и $y_0 = \theta$. Обозначим через l_{x_0} и l_{y_0} траектории потока f^t, проходящие через точки x_0 и y_0 соответственно, и через $x_0, x_1, x_2 \ldots$ ($y_0, y_1, y_2 \ldots$) точки пересечения $l_{x_0} \cap c$ ($l_{y_0} \cap c$), пронумерованные в порядке убывания значений функции φ в этих точках. Положим $x'_0 = g_1(x_0)$, $y'_0 = g_1(y_0)$, $c' = C'$, $x'_\infty = c' \cap \gamma'$ Обозначим через $l'_{x'_0}$, $l'_{y'_0}$ траектории потока f'^t, проходящие через точки x'_0, y'_0 соответ-

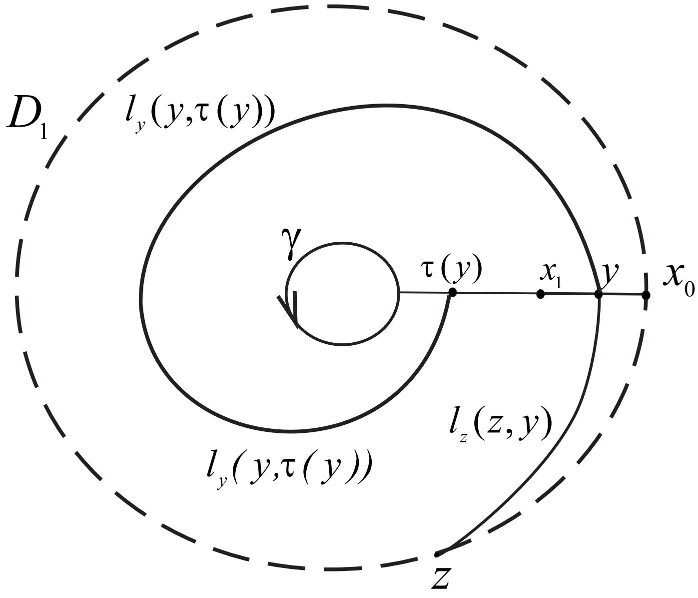

Рис. 3: К построению отображения $g_0 : N_\gamma \to N_\gamma$ в ориентируемом случае

ственно, и через $x'_0, x'_1, x'_2 \ldots$ ($y'_0, y'_1, y'_2 \ldots$) точки пересечения $l'_{x'_0} \cap c'$ ($l'_{y'_0} \cap c'$), пронумерованные в порядке убывания значений функции φ' в этих точках. Положим $g_0(x_i) = x'_i$, $g_0(y_i) = y'_i$, где $i =\in \mathbb{Z}_+$.

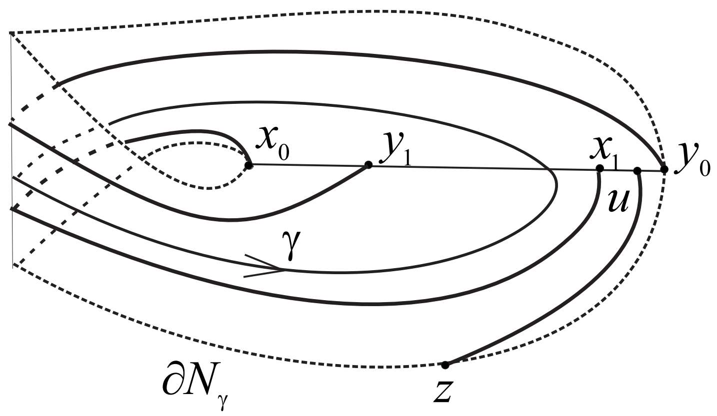

Рис. 4: К построению отображения $g_0 : N_\gamma \to N_\gamma$ в неориентируемом случае

Зададим теперь g_0 на участках дуги c_x и c_y, первый из которых ограничен точками x_0, y_1, а второй — точками y_0, x_1 (см. рис. 3.). Аналогичные участки дуги c' обозначим через c'_x и c'_y. Траектория потока f^t, проходящая через произвольную точку $u \in c_x \cup c_y$ пересекает границу ∂N_γ листа Мебиуса N_γ ровно в одной точке z. Положим $z' = g_0(z) = g_1(z)$. Через точку z' проходит траектория потока f'^t, пересекающая один из участков c'_x, c'_y дуги c' ровно в одной точке u'. Положим $g_0|_{c_x \cup x_y}(u) = u'$.

Отображение $g_0|_{c_x \cup x_y}$ является непрерывным, так как по построению переводит точку с меньшим значением в ней функции φ в точку с меньшим значением в ней функции φ', причем c_x перейдет в c'_x, а c_y в c'_y.

Дальнейшее определение гомеоморфизма $g_0 : N_\gamma \to N_\gamma$ аналогично случаю 1).

Доказательство закончено.

Список литературы

1. A. Banyaga, D. E. Hurtubise, "A proof of the Morse–Bott lemma", *Exp. Math.*, **22** (2004), 365-373.
2. C. Conley, "Isolated Invariant Sets and Morse Index", *CBMS Regional Conference Series in Math.*, **38** (1978).
3. Е.Я. Гуревич, Е.Д. Куренков, "О топологической классификации потоков Морса-Смейла на поверхностях при помощи функции Ляпунова", *Журнал Средневолжского математического общества*, **16**:3 (2014), 36-40.
4. Meyer K.R., "Energy Functions for Morse-Smale Systems", *Amer. J. Math.*, **90**:4 (1968), 1031–1040.
5. Ж. Палис, В. Ди Мелу, *Геометрическая теория динамических систем. Введение*, «Мир», 1986.
6. Smale S., "On Gradient Dynamical Systems", *Annals of Math*, **1**:1 (1961), 199–206.
7. Wilson W., Yorke J., "Lyapunov functions and isolating blocks", *JDE*, **13** (1973), 106–123..

Energy function and topological classification of Morse-Smale flows on surfaces

© E. Ya. Gurevich[4], E.D. Kurenkov[5].

Abstract. We introduce the definition of consistent equivalence of energy Morse-Bott functions for Morse-Smale flows on surfaces and state that consistent equivalence of that functions is necessary and sufficient condition for such flows.
Key Words: structurally stable flows on surfaces, Morse-Smale flows, Lyapunov function, topological equivalence, topological classification.

[4] Associate Professor of fundamental mathematics, National Research University Higher School of Economics, elena _ gurevich@list.ru.

[5] Student, National Research University Higher School of Economics,eugene2402@mail.ru.