УДК 517.9

Асимптотическое равновесие и ограниченность решений нелинейных дифференциальных уравнений

© Д. В. Пашуткин[1]

Аннотация. В работе рассматриваются вопросы асимптотического поведения решений некоторого класса существенно нелинейных дифференциальных уравнений. На базе методов, предложенных в [1], получены новые классы уравнений, имеющих равномерно ограниченные решения и обладающих свойством асимптотического равновесия

Ключевые слова: обыкновенные дифференциальные уравнения, асимптотическое равновесие, равномерная ограниченность решений

1. Введение

Среди задач теории асимптотического интегрирования дифференциальных уравнений важными являются задачи обнаружения свойств равномерной ограниченности решений и существования асимптотического равновесия [1]. Связь этих задач друг с другом проявляется прежде всего в методах исследования: хотя равномерная ограниченность и не является необходимым условием асмптотического равновесия, широкий класс уравнений, обладающих с этим свойством, удается получить как подкласс уравнений с равномерно ограниченными решениями [1].

Будем рассматривать систему дифференциальных уравнений:

$$\frac{dx}{dt} = f(t,x), \tag{1.1}$$

где $f \in C([T,+\infty) \times \mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$.

Введём обозначения:

$\|.\|$ – произвольная норма в $\mathbb{R}^n$.

$\|.\|_C$ – равномерная норма в пространстве непрерывных функций.

$x(t : t_0, x_0)$ – решения задачи Коши системы (1.1) с начальными условиями (t_0, x_0).

Определение 1.1. [2] *Если для любого $C_1 > 0$ существует $C_2 \in R$ такое, что для решений (1.1) выполнено неравенство*

$$\|x(t : t_0, x_0)\| \leq C_2 < \infty$$

при всех $t_0 \geq T$, $t \geq t_0$, $\|x_0\| \leq C_2$, то будем говорить, что решения (1.1) равномерно ограничены.

Определение 1.2. [1] *Будем говорить, что система (1.1) обладает свойством асимпотического равновесия, если любое её решение бесконечно продолжимо вправо. Любое решение (1.1) $x(t)$ имеет предел при $t \to +\infty$ и для любого $C \in \mathbb{R}^n$ существует решение $x(t)$ такое, что $x(t) \to C$ при $t \to +\infty$.*

Следуя [1, 2, 3], для исследования поведения решений (1.1) при $t \to +\infty$ оценим норму правой части $f(t,x)$:

$$\|f(t,x)\| \leq \lambda(t, \|x\|). \tag{1.2}$$

[1] Руководитель отдела, ГК АТОЛ

На основе анализа решений вспомогательного уравнения

$$\frac{dz}{dt} = \lambda(t,z), \ z \geq 0, \ t \geq T. \tag{1.3}$$

делаются выводы об асимптотических свойствах решений (1.1).

В работах [2, 3] в функция λ имеет вид

$$\lambda(t,\alpha) = \varphi(t)\Psi(\alpha), \tag{1.4}$$

т.е. "разделена"относительно аргументов. На Ψ накладывается условие

$$\int_a^{+\infty} \frac{1}{\Psi(\alpha)} d\alpha = +\infty, \tag{1.5}$$

ограничивающее скорость её роста при $\alpha \to +\infty$. Функция $\varphi(t)$ удовлетворяет условию:

$$\int_T^{+\infty} \varphi(s)ds = c < +\infty. \tag{1.6}$$

В этом случае решения системы (1.1) равномерно ограничены и она обладает свойством асимптотического равновесия.

В [1] даются условия равномерной ограниченности и асимптотического равновесия системы (1.1) для функции λ общего вида. Это позволяет рассматривать системы уравнений с существенными нелинейностями, когда представление вида (1.4) при выполнении условий (1.5), (1.6) невозможно.

Для иллюстрации характера условий, накладываемых на λ, рассмотрим следующий простой пример:

$$\frac{dx}{dt} = \frac{1}{1+t^2} \cdot \frac{x}{1+|x|\operatorname{arctg} t}, \tag{1.7}$$

где $t \in [0, +\infty)$. Оценим модуль правой части функцией λ:

$$\left| \frac{1}{1+t^2} \cdot \frac{x}{1+|x|\operatorname{arctg} t} \right| \leq \lambda(t, |x|).$$

Выбрав в качестве $\lambda(t,\alpha) = \frac{1}{1+t^2}\alpha$, легко убеждаемся, что решения уравнения равномерно ограничены и оно обладает свойством асимптотического равновесия ([2, 3]).

Попытаемся оценить правую часть более точно. Положим

$$\lambda(t,\alpha) = \frac{1}{1+t^2} \cdot \frac{\alpha}{1+\alpha \operatorname{arctg} t} \tag{1.8}$$

Результаты [2, 3] при такой оценке неприменимы в принципе. Но результаты [1] позволяют исследовать уравнения и с оценкой правой части такого типа.

Например, на вопрос об ограниченности решений в этом случае дает ответ следующая теорема (в обозначениях [1] Теорема 1.2.2).

Т е о р е м а 1.1. *(*[1, с.26]*) Пусть:*
1) Интеграл

$$J(\alpha) = \int_T^{+\infty} \lambda(s,\alpha)ds < +\infty$$

существует $\forall \alpha \in [0, +\infty)$ *и* $\lambda(t,\alpha_1) \leq \lambda(t,\alpha_2)$, $\alpha_1 \leq \alpha_2$.

2) При некотором $a \geq 0$
$$\int_a^{+\infty} \frac{d\alpha}{J(\alpha)} = +\infty.$$

3) Функция
$$q(t,\alpha) = \int_{t_0}^{t} \frac{\lambda(s,\alpha)}{J(\alpha)} ds$$
имеет непрерывную частную производную $q'_\alpha(t,\alpha) \geq 0$.

Тогда решения (1.1) равномерно ограничены, т.е.
$$\|x(t:t_0,y_0)\| \leq c(r) < +\infty,\ \|x_0\| \leq r,\ t \geq t_0,\ t_0 \geq T.$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Доказательство теоремы проводится по следующей схеме. Показывается, что функция
$$V(t,z) = e^{-q(t,z)} \int_a^z \frac{d\alpha}{J(\alpha)}$$
удовлетворяет условиям критерия Мизохаты-Ямагути [2] для уравнения (1.3), откуда вытекает равномерная ограниченность его решений.

Так как для решения системы (1.1) $x(t)$
$$\|x(t)\| \leq \|x_0\| + \int_{t_0}^{t} \|f(s,x(s))\| ds \leq \|x_0\| + \int_{t_0}^{t} \lambda(s, \|x(s)\|) ds,$$
то на основании теоремы об интегральных неравенствах [4]
$$\|x(t)\| \leq z(t), \|x_0\| \leq z_0, z(t) = z_0 + \int_{t_0}^{t} \lambda(s, z(s)) ds,\ t_0 \leq t < +\infty.$$
Откуда и вытекает утверждение теоремы.
Д о к а з а т е л ь с т в о з а к о н ч е н о.

Для функции λ вида (1.8) получаем:
$$J(\alpha) = \int_0^{+\infty} \frac{1}{1+s^2} \cdot \frac{\alpha}{1+\alpha \operatorname{arctg} s} = \ln\left(\frac{\pi}{2}\alpha + 1\right);$$
$$\int_1^{+\infty} \frac{1}{\ln\left(\frac{\pi}{2}\alpha + 1\right)} = +\infty;$$
$$q(t,\alpha) = \frac{\ln\left(\alpha \operatorname{arctg} t + 1\right)}{\ln\left(\frac{\pi}{2}\alpha + 1\right)};$$
$$q'(t,\alpha) \geq 0.$$

Фунция λ не убывает по второму аргументу. Откуда получаем тот же вывод о равномерной ограниченности решений уравнения (1.7).

Несколько изменим правую часть (1.7) и расмотрим уравнение
$$\frac{dx}{dt} = \frac{1}{(1+t)^2} \cdot \frac{x}{1+|x|/(1+t)}. \tag{1.9}$$

Снова оценим правую часть функцией λ,
$$\left| \frac{1}{(1+t)^2} \cdot \frac{x}{1+|x|/(1+t)} \right| \leq \lambda(t,|x|).$$

Если в качестве λ выбрать

$$\lambda(t,\alpha) = \frac{1}{(1+t)^2}\alpha,$$

то получим, что решения уравнения равномерно ограничены.

Но если снова уточнить оценку правой части (1.1), выбрать

$$\lambda(t,\alpha) = \frac{1}{(1+t)^2}\frac{\alpha}{\alpha/(1+t)+1} \tag{1.10}$$

и попытаться воспользоваться теоремой 1.1., то обнаружится, что её условия не выполняются.

Действительно,

$$J(\alpha) = \int_0^{+\infty} \lambda(s,\alpha)ds = \ln(\alpha+1) < +\infty,$$

$\alpha \in [0,+\infty)$.

$$\int_0^{+\infty} \frac{d\alpha}{J(\alpha)} = +\infty.$$

Функция λ возрастает по второй переменной. Осталось проверить последнее условие. Рассмотрим функцию:

$$q(t,\alpha) = \int_{t_0}^{t} \frac{\lambda(s,\alpha)}{J(\alpha)}ds = -\frac{\ln(\alpha/(t+1)+1) - \ln(\alpha/(t_0+1)+1)}{\ln(\alpha+1)}.$$

Согласно последнему условию эта функция должна иметь неотрицательную частную производную по α. Однако здесь это условие не выполняется: всегда можно подобрать достаточно большое α, при котором $q'_\alpha(t,\alpha) < 0$. Действительно,

$$q'_\alpha(2t_0,\alpha) = \frac{1}{\ln(\alpha+1)}\left(\frac{\ln(\alpha/(2t_0+1)+1) - \ln(\alpha/(t_0+1)+1)}{\ln(\alpha+1)(\alpha+1)} - \right.$$

$$\left. - \left(\frac{1}{a+2t_0+1} - \frac{1}{a+t_0+1}\right)\right) =$$

$$= \frac{1}{\ln(\alpha+1)}\left(\frac{\ln((\alpha/(2t_0+1)+1)/(\alpha/(t_0+1)+1))}{\ln(\alpha+1)(\alpha+1)} + \right.$$

$$\left. + \frac{t_0}{(a+2t_0+1)(a+t_0+1)}\right).$$

Так как $\ln((\alpha/(2t_0+1)+1)/(\alpha/(t_0+1)+1)) \to -\ln 2$ при $\alpha \to +\infty$, а

$$\frac{1}{a+t_0+1} = o\left(\frac{1}{\ln(\alpha+1)}\right),$$

то $q'_\alpha(2t_0,\alpha) < 0$ при достаточно большом α.

Пример с одной стороны демонстрирует, что излишняя точность оценок может оказаться вредной. С другой указывает на существование классов уравнений, для исследования свойства асимптотического равновесия которых необходимы новые типы ограничений на λ.

2. Равномерная ограниченность решений

Вернемся к примеру (1.9). Расширить область действия теоремы 1.1. так, чтобы захватывались в частности примеры, подобные указанному, можно за счет выбора другой функции Ляпунова и ослабления некоторых ограничений на функцию λ.

Теорема 2.1. *Пусть существует функция* $J \in C([0, +\infty), \mathbb{R})$, $J(\alpha) > 0$ *такая, что*

1) При некотором $a \geq 0$

$$\int_a^{+\infty} \frac{d\alpha}{J(\alpha)} = +\infty.$$

2) Функция

$$q(t, \alpha) = \int_t^{+\infty} \frac{\lambda(s, \alpha)}{J(\alpha)} ds$$

имеет непрерывную частную производную по α, *причем*

$$\lambda(t, \alpha) q'_\alpha(t, \alpha) \leq \varphi(t),$$

$$\varphi \in C([T, +\infty), \mathbb{R}), \ \int_T^{+\infty} \varphi(s) ds \leq c_2 < +\infty.$$

Тогда решения (1.1) равномерно ограничены, т.е.

$$\|x(t : t_0, y_0)\| \leq c(r) < +\infty, \ \|x_0\| \leq r, \ t \geq t_0, \ t_0 \geq T.$$

Доказательство. Рассмотрим функцию

$$V(t, \alpha) = \int_a^z \frac{d\alpha}{J(\alpha)} + \int_t^{+\infty} \frac{\lambda(s, \alpha)}{J(\alpha)} ds - \int_T^t \varphi(s) ds.$$

Из условий 1), 3) вытекает, что $V(t, \alpha) \to +\infty$ равномерно по t, причем для производной V в силу (1.3) справедливо неравенство:

$$\dot{V}(t, \alpha)_{(1.3)} = \lambda(t, \alpha) q'_\alpha(t, \alpha) - \phi(t) \leq 0.$$

Откуда из критерия Мизохаты-Ямагути [2] вытекает равномерная ограниченность решений уравнения (1.3).

Покажем, что равномерная ограниченность решений (1.3) влечет за собой ограниченность решений (1.1). Рассмотрим функцию $W(x) = \|x\|$. Обозначим D^+ правую верхнюю производную Дини. Тогда если $x(t)$ — решение (1.7), то

$$D^+ W(x(t)) = \lim_{h \to 0^+} \frac{\|x(t) + hf(t, x(t))\| - \|x(t)\|}{h} \leq$$

$$\leq \lim_{h \to 0^+} \frac{\|x(t) + hf(t, x(t)) - x(t)\|}{h} = \|f(t, x(t))\| \leq \lambda(t, x(t)).$$

Откуда на основании теоремы о дифференциальных неравенствах [4]

$$\|x(t)\| \leq z(t), \ \|x(t_0)\| \leq z_0, \ z(t_0) = z_0, \ \frac{dz}{dt} = \lambda(t, z),$$

что и обеспечивает равномерную ограниченность решений (1.1). (Заметим, что неубывание функции λ по второму аргументу здесь не требуется).
Д о к а з а т е л ь с т в о з а к о н ч е н о.

Выбор $J(\alpha)$ при использовании теоремы 1.1. в общем случае может вызвать определенные затруднения. Но если положить $J(\alpha) = \int\limits_T^{+\infty} \lambda(s,\alpha)ds$ (при условии существования интеграла в правой части), то получим обобщение теоремы 1.1..

С л е д с т в и е 2.1. *Пусть:*

1) Интеграл

$$J(\alpha) = \int_T^{+\infty} \lambda(s,\alpha)ds < +\infty$$

существует $\forall\alpha \in [0,+\infty)$ *и сходится равномерно по* α *на любом отрезке из* $[0,+\infty)$, $J(\alpha) > 0$

2) При некотором $a \geq 0$

$$\int_a^{+\infty} \frac{d\alpha}{J(\alpha)} = +\infty.$$

3) Функция

$$q(t,\alpha) = \int_t^{+\infty} \frac{\lambda(s,\alpha)}{J(\alpha)}ds$$

имеет непрерывную частную производную по α, *причем*

$$\lambda(t,\alpha)q'_\alpha(t,\alpha) \leq \varphi(t),$$

$$\varphi \in C([T,+\infty),R), \ \int_T^{+\infty} \varphi(s)ds \leq c_2 < +\infty.$$

Тогда решения (1.1) равномерно ограничены, т.е.

$$\|x(t:t_0,y_0)\| \leq c(r) < +\infty, \ \|x_0\| \leq r, \ t \geq t_0, \ t_0 \geq T.$$

Заметим, так как

$$q(t,\alpha) = \int_t^{+\infty} \frac{\lambda(s,\alpha)ds}{J(\alpha)} =$$

$$= \frac{\int_T^{+\infty} \lambda(s,\alpha)ds - \int_T^t \lambda(s,\alpha)ds}{\int_T^{+\infty} \lambda(s,\alpha)ds} = 1 - \int_T^t \frac{\lambda(s,\alpha)ds}{J(\alpha)},$$

то при выполнении условия 2) теоремы 1.1. условие 3) следствия 2.1. всегда выполнено. Причём здесь условие неубывания $\lambda(s,\alpha)$ заменено более слабым условием 1). Условие 3) также ослаблено.

Несложно проверить, что для примера (1.9) с оценкой правой части (1.10) условия следствия 2.1. оказываются выполненными.

Рассмотрим пример, демонстрирующий использование теоремы 2.1., и для которого ранее полученные результаты неприменимы. Для уравнения

$$\frac{dx}{dt} = \sin^2\left(\frac{x^2}{t^m}\right), \tag{2.1}$$

где $m \geq 3$, положим

$$\lambda(t,\alpha) = \sin^2\left(\frac{\alpha^2}{t^m}\right), \ J(\alpha) = \alpha + 1.$$

Все условия следствия 2.1. выполнены и решения уравнения (2.1) равномерно ограничены.

3. Асимптотическое равновесие

Перейдем к вопросу об асимптотическом равновесии системы (1.1). Предварительно докажем следующую лемму.

Л е м м а 3.1. *Пусть при некотором фиксированном $c \in \mathbb{R}^n$ семейство функций $F \subset C([T,+\infty),\mathbb{R}^n)$ равномерно ограничено, равностепенно непрерывно и $\lim\limits_{t\to+\infty}\sup\limits_{f\in F}|f(t)-c|=0$, тогда F относительно компактно в $C([T,+\infty),\mathbb{R}^n)$.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Покажем, что для любого $\varepsilon>0$ для F существует конечная ε-сеть. Действительно, в силу условий леммы можно выбрать $T1$ такое, что

$$|f_1(t)-f_2(t)|<\varepsilon \tag{3.1}$$

для всех $f_1,f_2\in F$, $t\in[T1,+\infty)$. Если рассмотреть семейство F, как подмножество множества непрерывных функций, определенных на отрезке $[T,T1]$ (элементами этого подмножества будут сужения функций из F на промежуток $[T1,T2]$), то согласно теореме Арцела-Асколи, для F можно выбрать конечную ε-сеть в $C([T,T1],\mathbb{R}^n)$, но в силу (3.1) эта ε-сеть будет являться ε-сетью и для функций из F, определенных на промежутке $[T,+\infty)$, откуда вытекает относительная компактность F в $C([T,+\infty),\mathbb{R}^n)$.
Д о к а з а т е л ь с т в о з а к о н ч е н о.

Т е о р е м а 3.1. *Пусть для системы (1.1) выполнены теоремы 2.1., причем интеграл $\int_T^{+\infty}\lambda(s,\alpha)$ сходится равномерно по α на каждом конечном отрезке, то система (1.1) обладает свойством асимптотического равновесия.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Покажем, что каждое решение $y(t)$ (1.1) имеет предел. Будем следовать ([1], С.26). Действительно, для всех $T_1\le t_1\le t_2<+\infty$ имеем

$$\|y(t_1)-y(t_2)\|=\left\|\int_{t_1}^{t_2}y'(s)ds\right\|\le\int_{T_1}^{+\infty}\lambda(s,\|y(s)\|)ds.$$

Так как для $\|y(t)\|\le M$, при всех t, то из равномерной сходимости $\int_{T_1}^{+\infty}\lambda(s,\alpha)$ на $[0,M]$ вытекает существование придела $y(t)$ при $t\to+\infty$.

Теперь покажем, что для любого элемента $y_0\in\mathbb{R}^n$ существует решение (1.1) такое, что

$$\lim_{t\to+\infty}y(t)=y_0.$$

В силу условий теоремы оператор $L: C([T_1,+\infty))\to C([T_1,+\infty))$ ($T_1\ge T$)

$$L[y(t)]=y_0-\int_t^{+\infty}f(s,y(s))ds$$

корректно определен. Рассмотрим в пространстве $C([T_1,+\infty))$ шар радиуса $2\|y_0\|$ с центром в нуле:

$$B=\{y|y\in C([T_1,+\infty)),\|y\|_C\le 2\|y_0\|\}.$$

Из равномерной сходимости интеграла $\int_T^{+\infty}\lambda(s,\alpha)$ на отрезке $[0,2\|y_0\|]$ вытекает, что можно выбрать T_1 такое, что

$$\left\|\int_t^{+\infty}f(s,y(s))ds\right\|\le\|y_0\|$$

для всех $y \in B$. Легко видеть, что L непрерывен и отображает B в множество, удовлетворяющее условиям леммы 3.1.. Тогда из теоремы Шаудера вытекает существование у L неподвижной точки $y_1(t)$ в B, которая будет являться решением (1.1), причем $y_1(t) \to y_0$ при $t \to +\infty$.
Доказательство закончено.

Следствие 3.1. *В условиях следствия 2.1. система (1.1) обладает свойством асимптотического равновесия.*

В качестве примера снова рассмотрим уравнение (2.1). Из следствия 3.1. получаем, что это уравнение обладает свойством асимптотического равновесия.

Список литературы

1. Воскресенский Е. В., *Методы сравнения в нелинейном анализе*, Изд-во Сарат. ун-та, саран фил, Саранск, 1990, 224 с.

2. Рейссинг Р., Сансоне Г., Конти Р., *Качественная теория нелинейных систем дифференциальных уравнений*, Наука, М., 1974, 318 с.

2. Wintner A., “An Abelian lemma concerning asymptotic equilibria of differential equations.”, *Amer. J. of Math.*, **68.** (1946), 451–454

3. Нгуен Тхе Хоан, “Об асимптотическом равновесии”, *Диф. уравнения*, **6**:2 (1970), 385–386.

4. Красносельский М. А., *Оператор сдвига по траекториям дифференциальных уравнений*, Наука, М., 1966, 332 с.

Asymptotic equilibrium and boundedness of solutions of nonlinear ODE

© **D. V. Pashutkin**[2]

Abstract. The paper is concerned with the asymptotic behaviour of some class of crucially nonlinear ODE. On the base of methods from [1] we obtained new class of ODE with uniformly bounded solutions and asymptotic equlibrium.

Key Words: ODE, asymptotic equilibrium, boundedness of solutions of ODE

[2] Head of department, ATOL Group, Moscow; pashutkindv@yandex.ru