УДК 519.626

Сеточные аппроксимации задач оптимального управления для полулинейных эллиптических уравнений с разрывными коэффициентами и решениями, с управлениями в коэффициентах при старших производных

© **Ф. В. Лубышев**[1], **М. Э. Файрузов**[2]

Аннотация. Рассматриваются и исследуются математические постановки нелинейных задач оптимального управления для полулинейных эллиптических уравнений с разрывными коэффициентами и решениями, с управлениями в коэффициентах при старших производных. Построены разностные аппроксимации экстремальных задач, установлены оценки точности аппроксимаций по состоянию и функционалу, доказана слабая сходимость аппроксимаций по управлению. Проведена регуляризация аппроксимаций по Тихонову.

Ключевые слова: задача оптимального управления, полулинейные эллиптические уравнения, разностный метод решения, метод регуляризации

1. Введение

Характер конкретных постановок задач оптимального управления для распределенных систем существенно зависит от того, куда входят управления (в свободные члены уравнений состояния или в коэффициенты уравнений), линейными или нелинейными дифференциальными уравнениями математической физики (УМФ) описываются состояния систем управления (см. [1]-[10]), а также зависит от того, какой гладкостью обладают входные данные систем управления (допускают ли входные данные и функции состояния разрывы). В настоящее время наиболее полно исследован случай таких систем управления, когда управления достаточно простым образом входят в линейные уравнения состояния и линейные предельные условия, а также когда входные данные и функции состояния систем являются достаточно гладкими (не допускающими разрывов коэффициентов и решений). Характерной особенностью задач оптимального управления нелинейного типа является то, что отображение $g \to u(g)$ из множества допустимых управлений U в пространство состояний W является нелинейным. Нелинейные задачи оптимального управления для УМФ относятся к наиболее сложному классу задач оптимизации (см. [2]). Особый интерес представляют задачи оптимального управления, когда их нелинейность обусловлена вхождением управлений в коэффициенты уравнений для состояний, в том числе, в коэффициенты при старших производных. Задачи оптимального управления с управляющими параметрами, содержащимися в главной части дифференциальных операторов (в старших коэффициентах уравнений состояний) являются сильно нелинейными оптимизационными задачами (см. [2]). Такие задачи весьма существенно отличаются от задач, где управление осуществляется путем внешних воздействий на систему (см. [2]), они наименее изучены, хотя развитие теории и методов их решения вызвано потребностями математического моделирования нелинейных оптимальных процессов, большой прикладной важностью таких

[1] Профессор кафедры прикладной информатики и численных методов, Башкирский государственный университет, г. Уфа; fairuzovme@mail.ru.

[2] Доцент кафедры прикладной информатики и численных методов, Башкирский государственный университет, г. Уфа;fairuzovme@mail.ru.

задач при оптимизации процессов теплофизики, диффузии, фильтрации, теории упругости и др., а также при решении обратных задач для УМФ, рассматриваемых в вариационной постановке. Нелинейность оптимизационных задач еще более усугубляется, если, кроме того, и состояния процессов описываются нелинейными уравнениями. Особый интерес с теоретической и практической точек зрения представляют физико-математические постановки задач оптимального управления, в которых в силу характера исследуемых физических процессов состояния описываются нелинейными УМФ с разрывными коэффициентами и, кроме того, изначально по своим физико-математическим постановкам сами решения УМФ допускают разрывы.

Проблема численного решения задач оптимального управления приводит к необходимости их аппроксимации задачами более простой природы – «конечномерными задачами оптимизации» (см. [1]). Обзор работ, посвященных основам общей теории и методам устойчивости и аппроксимации задач оптимального управления, а также результатам в этой области, представлен, например, в [1], [7]-[10]. Одним из наиболее удобных, универсальных и широко распространенных методов конечномерных аппроксимаций задач оптимального управления является метод сеток (см. [11]-[14]). Центральными в проблеме аппроксимации являются вопросы «конструирования» аппроксимаций, сходимости аппроксимаций по состоянию, функционалу, управлению, регуляризации аппроксимаций (см., например, [1], [7]-[10]). Для систем управления, описываемых УМФ, построения и исследования аппроксимаций проводились в основном также для линейных задач оптимального управления, причем с достаточно гладкими коэффициентами УМФ и состояниями.

В настоящей работе по тематике, примыкающей к [1], [7]-[10], [15]-[20] рассмотрены и исследованы математические постановки нелинейных задач оптимального управления, описываемых полулинейными уравнениями эллиптического типа в неоднородных средах с разрывными коэффициентами и решениями (состояниями), с граничными условиями сопряжения типа неидеального контакта [11], [14], [21]-[23]. В качестве управлений выступают переменные коэффициенты при старших производных в уравнениях состояния. Построены и исследованы разностные аппроксимации экстремальных задач, установлены оценки скорости сходимости аппроксимации по состоянию и функционалу, слабая сходимость по управлению. Проведена регуляризация аппроксимации. Для аппроксимации задач, описывающих состояния с разрывными коэффициентами и решением предложена некоторая новая «модифицированная разностная схема» с нетрадиционным для теории разностных схем способом вычисления переменных сеточных коэффициентов в главной части сеточного оператора. Исследования аппроксимации проводятся для дифференциальных уравнений, описывающих разрывные состояния с обобщенными решениями из класса Соболева.

2. Постановка задач и их корректность

Пусть $\Omega = \{r = (r_1, r_2) \in \mathbb{R}^2 : 0 < r_\alpha < l_\alpha, \alpha = 1,2\}$ – прямоугольник в $\mathbb{R}^2$ с границей $\partial\Omega = \Gamma$. Пусть область Ω разделена прямой $r_1 = \xi$, где $0 < \xi < l_1$ («внутренней контактной границей» $\overline{S} = \{r_1 = \xi, 0 \le r_2 \le l_2\}$, $0 < \xi < l_1$) на подобласти $\Omega_1 \equiv \Omega^- = \{0 < r_1 < \xi, 0 < r_2 < l_2\}$ и $\Omega_2 \equiv \Omega^+ = \{\xi < r_1 < l_1, 0 < r_2 < l_2\}$ (на левую и правую подобласти Ω_1 и Ω_2 соответственно) с границами $\partial\Omega_1 \equiv \partial\Omega^-$ и $\partial\Omega_2 \equiv \partial\Omega^+$. Так что область Ω есть объединение областей Ω_1 и Ω_2 и внутренних точек «контактной» границы $\overline{S}$ подобластей Ω_1 и Ω_2, а $\partial\Omega$ – внешняя граница области Ω. Далее, через $\overline{\Gamma}_k$ будем обозначать границы областей Ω_k без S, $k = 1,2$. Так что $\partial\Omega_k = \overline{\Gamma}_k \cup S$, где части Γ_k, $k = 1,2$ – открытые непустые подмножества в $\partial\Omega_k$, $k = 1,2$; $\overline{\Gamma}_1 \cup \overline{\Gamma}_2 = \partial\Omega = \Gamma$.

Через n_α, $\alpha = 1,2$ будем обозначать внешнюю нормаль к границе $\partial\Omega_\alpha$ области Ω_α, $\alpha = 1,2$. Пусть, далее, $n = n(x)$ – единичная нормаль к S в какой-либо ее точке $x \in S$, ориентированная, например, таким образом, что нормаль n является внешней нормалью к S по отношению к области Ω_1, то есть нормаль n направлена внутрь области Ω_2. Ниже, при постановке краевых задач для состояний процессов управления, S – это прямая, вдоль которой будут разрывны коэффициенты и решения краевых задач, которые в областях Ω_1 и Ω_2 обладают некоторой гладкостью. Пусть условия управляемого физического процесса позволяют моделировать его в области $\Omega = \Omega_1 \cup \Omega_2 \cup S$, состоящей из двух частей (подобластей) Ω_1 и Ω_2, разбитой на части внутренней границей S, следующей задачей Дирихле для полулинейного уравнения эллиптического типа с разрывными коэффициентами и решениями:

Требуется найти функцию $u(r)$, определенную на $\overline{\Omega}$ вида $u(r) = u_1(r)$, $r \in \overline{\Omega}_1 \equiv \Omega^-$, $u(r) = u_2(r)$, $r \in \overline{\Omega}_2 = \Omega^+$, где компоненты $u_p(r)$, $p = 1,2$, удовлетворяют условиям:

1) Функции $u_p(r)$, $p = 1,2$, определенные на $\overline{\Omega}_p = \Omega_p \cup \partial\Omega_p$, $p = 1,2$, удовлетворяют в Ω_p, $p = 1,2$, уравнениям

$$L_p\, u_p = -\sum_{\alpha=1}^{2} \frac{\partial}{\partial r_\alpha}\left(k_p(r)\frac{\partial u_p}{\partial r_\alpha}\right) + d_p(r) q_p(u_p) = f_p(r), \quad \text{в } \Omega_p,\ p = 1,2; \tag{2.1}$$

а на границах $\partial\Omega_1 \setminus S = \overline{\Gamma}_1$, $\partial\Omega_2 \setminus S = \overline{\Gamma}_2$ условиям

$$u_1(r) = 0, \quad r \in \overline{\Gamma}_1, \quad u_2(r) = 0, \quad r \in \overline{\Gamma}_2; \tag{2.2}$$

2) Искомые функции $u_p(r)$, $p = 1,2$, удовлетворяют еще дополнительным условиям на S – границе разрыва коэффициентов и решения, позволяющим «сшить» решения $u_1(r)$ и $u_2(r)$ вдоль контактной границы S областей Ω_1 и Ω_2 следующего вида:

$$G(x) = k_1(r)\frac{\partial u_1}{\partial r_1} = k_2(r)\frac{\partial u_2}{\partial r_1} = \theta(r_2)\left(u_2(r) - u_1(r)\right), \quad r \in S. \tag{2.3}$$

Если ввести функции вида

$$u(r) = \begin{cases} u_1(r), & r \in \Omega_1; \\ u_2(r), & r \in \Omega_2, \end{cases} \qquad q(\xi) = \begin{cases} q_1(\xi_1), & \xi_1 \in \mathbb{R}; \\ q_2(\xi_2), & \xi_2 \in \mathbb{R}, \end{cases} \tag{2.4}$$

$$k(r), d(r), f(r) = \begin{cases} k_1(r), q_1(r), f_1(x), & x \in \Omega_1; \\ k_2(r), q_2(r), f_2(r), & x \in \Omega_2, \end{cases} \tag{2.5}$$

то задачу (2.1)-(2.3) можно переписать в более компактном виде:

Требуется найти функцию $u(r)$, определенную на $\overline{\Omega}$, удовлетворяющую в каждой из областей Ω_1 и Ω_2 уравнению

$$Lu(r) = -\sum_{\alpha=1}^{2} \frac{\partial}{\partial r_\alpha}\left(k(r)\frac{\partial u}{\partial r_\alpha}\right) + d(r) q(u) = f(r), \quad r \in \Omega_1 \cup \Omega_2, \tag{2.6}$$

и условиям

$$\begin{gathered} u(r) = 0, \quad r \in \partial\Omega = \overline{\Gamma}_1 \cup \overline{\Gamma}_2, \\ \left[k(r)\frac{\partial u}{\partial r_1}\right] = 0, \quad G(r) = \left(k_1(r)\frac{\partial u_1}{\partial r_1}\right) = \theta(r_2)[u], \quad x \in S. \end{gathered} \tag{2.7}$$

Здесь $[u] = u_2(r) - u_1(r) = u^+(r) - u^-(r)$ – скачок функции $u(r)$ на S; $d(r)$, $f(r)$ – известные функции, определяемые по разному в Ω_1 и Ω_2, претерпевающие разрыв первого рода на S; $q_\alpha(\xi_\alpha)$, $\alpha = 1,2$ – заданные функции, определенные для $\xi_\alpha \in \mathbb{R}$, $\alpha = 1,2$; $\theta(r_2)$ – заданная функция на S;

$$k(r) \equiv g(r) = \begin{cases} g_1(r) \equiv k_1(r), & r \in \Omega_1, \\ g_2(r) \equiv k_2(r), & r \in \Omega_2, \end{cases} \tag{2.8}$$

– управление. Относительно заданных функций будем предполагать: $d(r) \in L_\infty(\Omega_1) \times L_\infty(\Omega_2)$, $f(r) \in L_2(\Omega_1) \times L_2(\Omega_2)$, $\theta(r_2) \in L_\infty(S)$; $0 \le d_0 \le d(r) \le \overline{d}_0$, $r \in \Omega_1 \cup \Omega_2$; $0 < \theta_0 \le \theta(r_2) \le \overline{\theta}_0$, $x \in S$, d_0, $\overline{d}_0$, θ_0, $\overline{\theta}_0$ – константы; функции $q_\alpha(\xi_\alpha)$, $\alpha = 1,2$ определены на $\mathbb{R}$ со значениями в $\mathbb{R}$, причем $q_\alpha(0) = 0$, $0 \le q_0 \le (q_\alpha(\xi_1) - q_\alpha(\xi_2))/(\xi_1 - \xi_2) \le L_q < \infty$ для всех $\xi_1, xi_2 \in \mathbb{R}$, $\xi_1 \ne \xi_2$.

Введем множество допустимых управлений

$$U = U_1 \times U_2 \subset W_\infty^1(\Omega_1) \times W_\infty^1(\Omega_2) = B, \tag{2.9}$$

состоящее из пар $g(r) = k(r)$, определенных в (2.8) таких, что

$$\begin{gathered} g_p(r) \in U_p = \Big\{ g_p(r) = k_p(r) \in W_\infty^1(\Omega_p) = B_p : 0 < \nu_p \le g_p(r) \le \overline{\nu}_p, \\ \left|\frac{\partial g_p(r)}{\partial r_1}\right| \le R_p^{(1)}, \left|\frac{\partial g_p(r)}{\partial r_2}\right| \le R_p^{(2)} \text{ п.в. на } \Omega_p \Big\}, \quad p = 1,2, \end{gathered} \tag{2.10}$$

где $B_p = W_\infty^1(\Omega_p)$ – пространства управлений $g_p(r) = k_p(r)$, заданных на Ω_p, $p = 1,2$, соответственно, ν_p, $\overline{\nu}_p$, $R_1^{(p)}$, $R_2^{(p)}$, $p = 1,2$ – заданные числа.

Зададим функционал цели $J : U \to \mathbb{R}^1$ в виде

$$g \to J(g) = \int\limits_{\Omega_1} |u(r_1, r_2; g) - u_0^{(1)}(r)|^2 d\Omega_1 = I(u(r; g)), \tag{2.11}$$

где $u_0^{(1)}(r) \in W_2^1(\Omega_1)$ – заданная функция.

Задача оптимального управления состоит в том, чтобы найти такое управление $g_* \in U$, которое минимизирует на множестве $U \subset B$ функционал цели $g \to J(g)$, точнее, на решениях $u(r) = u(r; g)$ задачи (2.1)-(2.3), отвечающих всем допустимым управлениям $g = k \in U$, требуется минимизировать фукнционал цели (2.11).

Введем в рассмотрение пространство $V(\Omega^{(1,2)})$, $\Omega^{(1,2)} = \Omega_1 \cup \Omega_2$ пар функций $u(r) = (u_1(r), u_2(r))$:

$$V \equiv V(\Omega^{(1,2)}) = \left\{ u(r) = (u_1(r), u_2(r)) \in W_2^1(\Omega_1) \times W_2^1(\Omega_2) \right\}, \tag{2.12}$$

где $W_2^1(\Omega_k)$, $k = 1,2$ – Соболевские пространства функций, заданных в подобластях Ω_k, $k = 1,2$, с границами $\partial\Omega_k$, $k = 1,2$ соответственно и нормами [24]

$$\|u_k\|^2_{W_2^1(\Omega_k)} = \int\limits_{\Omega_k} \left[\sum_{\alpha=1}^2 \left(\frac{\partial u_k}{\partial r_\alpha} \right)^2 + u_k^2 \right] d\Omega_k, \quad k = 1,2. \tag{2.13}$$

Снабженное скалярным произведением и нормой

$$(u, v)_V = \sum_{k=1}^2 (u_k, v_k)_{W_2^1(\Omega_k)}, \qquad \|u\|_V^2 = \sum_{k=1}^2 \|u_k\|^2_{W_2^1(\Omega_k)}, \tag{2.14}$$

$V = V(\Omega^{(1,2)})$ является гильбертовым пространством.

Можно показать, что в гильбертовом пространстве $V(\Omega^{(1,2)})$ можно ввести эквивалентную норму

$$\|u\|_*^2 = \sum_{k=1}^{2} \int\limits_{\Omega_k} \sum_{\alpha=1}^{2} \left(\frac{\partial u_k}{\partial r_\alpha}\right)^2 d\Omega_k + \sum_{k=1}^{2} \int\limits_{\Gamma_k} u_k^2 \, d\Gamma_k + \int\limits_S [u]^2 \, dS, \tag{2.15}$$

где $[u] = u_2(r) - u_1(r) = u^+(r) - u^-(r)$ – скачок функции $u(r) \in V(\Omega^{(1,2)})$ на S. Здесь $u_2(r) = u^+(r)$, $r \in S$ и $u_1(r) = u^-(r)$, $r \in S$ – следы функции $u(r)$ на S со стороны $\Omega_2 = \Omega^+$ и $\Omega_1 = \Omega^-$ соответственно. Понятно, что из условия $u(r) \in V(\Omega^{(1,2)})$ следует, что отображения пространств $W_2^1(\Omega_k)$, $k = 1,2$ в пространства $L_2(\partial\Omega_k)$, $k = 1,2$, ограничены, так как Ω_1 и Ω_2 – области с липшицевыми границами $\partial\Omega_1$ и $\partial\Omega_2$. В частности, из условия $u(r) \in V(\Omega^{(1,2)})$ следует, что $[u(r)] \in L_2(S)$, так как в данном случае теорема о следах [24]-[28] справедлива для каждой из сторон S^+, S^- границы контакта S (оператор сужения из $W_2^1(\Omega^\pm)$ в $L_2(S)$ непрерывен). Заметим также, что применение теоремы о следах к Ω_1 и Ω_2 позволяет определить для любой функции $u(r) \in V(\Omega^{(1,2)})$ два следа с помощью операторов сужения на $S^\pm$. С другой стороны, если элемент $u(r) \in V(\Omega^{(1,2)})$, то его следы на S с разных сторон (со стороны Ω_1 и со стороны Ω_2) в общем случае различны. Сужения функции $u(r)$ на области Ω_k, $k = 1,2$: $u|_{\Omega_k}$, $k = 1,2$ принадлежат пространствам $W_2^1(\Omega_k)$, $k = 1,2$, соответственно, но пространству $W_2^1(\Omega)$ сама функция $u(r)$ не принадлежит, поскольку на множестве S (при переходе из Ω_1 в Ω_2) она имеет разрыв ($\delta(r) = u_2(r) - u_1(r) = u^+(r) - u^-(r)$, $r \in S$). Заметим также, что необходимым и достаточным условием для принадлежности функции $v(r) \in W_2^1(\Omega) = W_2^1(\Omega_1 \cup \Omega_2 \cup S)$ является условие склейки: $v(r) \in W_2^1(\Omega_k)$, $k = 1,2$; $v_1(r)|_S = v_2(r)|_S$ (см., например, [28], [29]). Далее, так как Ω_k – области с границами Липшица $\partial\Omega_k$, $k = 1,2$, а Γ_1 и Γ_2 – соответственно их (открытые) части (куски границ $\partial\Omega_1$ и $\partial\Omega_2$) с положительными мерами Лебега, $mes\Gamma_k > 0$, $k = 1,2$, то [30] существуют некоторые постоянные C_1 и C_2, зависящие только от данных областей Ω_k, $k = 1,2$ и от кусков Γ_1 и Γ_2 соответственно, такие, что для каждой функции $u_k(r) \in W_2^1(\Omega_k)$, $k = 1,2$ имеют место соотношения:

$$\|u_k(r)\|^2_{W_2^1(\Omega_k)} \le C_k^2 \Bigg[\int\limits_{\Omega_k} \sum_{\alpha=1}^{2} \left(\frac{\partial u_k}{\partial x_\alpha}\right)^2 d\Omega_k + \int\limits_{\Gamma_k} u_k^2 d\Gamma_k \Bigg], \ k = 1,2. \tag{2.16}$$

Так как для рассматриваемых областей Ω_k, $k = 1,2$ отображения пространств $W_2^1(\Omega_k)$, $k = 1,2$ в пространства $L_2(\partial\Omega_k)$, $k = 1,2$, ограничены, то существуют такие постоянные C_3 и C_4 соответственно, не зависящие от функции $u_k(r)$, что для любых функций $u_k(r) \in W_2^1(\Omega_k)$ справедливы оценки [25],[26]:

$$\|u_k(r)\|^2_{L_2(\partial\Omega_k)} \le C_{k+2}^2 \|u_k(r)\|^2_{W_2^1(\Omega_k)}, \ k = 1,2, \tag{2.17}$$

вытекающие из теорем вложения пространств $W_2^1(\Omega_k)$ в $L_2(\partial\Omega_k)$.

Пусть $\overset{\circ}{\Gamma}_k$ – часть $\partial\Omega_k$. Через $W_2^1\left(\Omega_k; \overset{\circ}{\Gamma}_k\right)$ обозначим замкнутое подпространство пространства $W_2^1(\Omega_k)$, плотным множеством в котором является множество всех функций из $C^1(\overline{\Omega}_k)$, равных нулю вблизи $\overset{\circ}{\Gamma}_k \subset \partial\Omega_k$, $k = 1,2$ – какого-либо участка $\overset{\circ}{\Gamma}_k$ границы $\partial\Omega_k$, $k = 1,2$. Под участками $\overset{\circ}{\Gamma}_k$ границы $\partial\Omega_k$ понимаются куски границы $\partial\Omega_k$; естественно, мы не рассматриваем случай, когда какой-либо из участков $\overset{\circ}{\Gamma}_k$ вырождается в точку; $W_2^1(\Omega_k; \overset{\circ}{\Gamma}_k)$ совпадает с $W_2^1(\Omega_k)$ при $\overset{\circ}{\Gamma}_k = \emptyset$; $W_2^1(\Omega_k; \overset{\circ}{\Gamma}_k) = \overset{0}{W}{}_2^1(\Omega_k)$ при $\overset{\circ}{\Gamma}_k = \partial\Omega_k$. Заметим, что для элементов $u_k(r) \in W_2^1(\Omega_k; \overset{\circ}{\Gamma}_k)$ справедливо неравенство [25]

$$\int\limits_{\Omega_k} u_k^2(r)\, d\Omega_k \leq C_{k+4}(\Omega_k, \overset{\circ}{\Gamma}_k) \int\limits_{\Omega_k} \sum_{\alpha=1}^{2} \left(\frac{\partial u_k}{\partial r_\alpha}\right)^2 d\Omega_k, \quad k = 1, 2. \tag{2.18}$$

с постоянной $C_{k+4}(\Omega_k, \overset{\circ}{\Gamma}_k)$, зависящей только от Ω_k и $\overset{\circ}{\Gamma}_k$, при этом «площадь» куска $\overset{\circ}{\Gamma}_k$ поверхности $\partial\Omega_k$ должна быть положительной: $mes\ \overset{\circ}{\Gamma}_k > 0$.

Введем в рассмотрение нормированное пространство $\overset{\circ}{V}_{\Gamma_1,\Gamma_2}\ (\Omega^{(1,2)})$ пар функций $u(r) = (u_1(r), u_2(r))$:

$$\overset{\circ}{V}_{\Gamma_1,\Gamma_2}\ (\Omega^{(1,2)}) = \left\{u(r) = (u_1(r), u_2(r)) \in W_2^1(\Omega_1; \Gamma_1) \times W_2^1(\Omega_2; \Gamma_2)\right\}, \tag{2.19}$$

$$\|u\|^2_{\overset{\circ}{V}_{\Gamma_1,\Gamma_2}(\Omega^{(1,2)})} = \sum_{k=1}^{2} \int\limits_{\Omega_k} \sum_{\alpha=1}^{2} \left(\frac{\partial u_k}{\partial r_\alpha}\right)^2 d\Omega_k + \int\limits_S [u]^2 dS. \tag{2.20}$$

Под решением прямой задачи (2.1)-(2.3) при фиксированном управлении $g(r) = k(r) \in U$ понимается функция $u(r) \equiv u(r; g) \in \overset{\circ}{V}_{\Gamma_1,\Gamma_2}\ (\Omega^{(1,2)})$, удовлетворяющая для всех $v \in \overset{\circ}{V}_{\Gamma_1,\Gamma_2}\ (\Omega^{(1,2)})$ тождеству

$$\begin{gathered} Q(u, v) = \int\limits_{\Omega_1 \cup \Omega_2} \left[\sum_{\alpha=1}^{2} k(r) \frac{\partial u}{\partial r_\alpha} \frac{\partial v}{\partial r_\alpha} + d(r) q(u) v\right] d\Omega_0 + \int\limits_S \theta(x)[u][v]\, dS = \\ = \int\limits_{\Omega_1 \cup \Omega_2} f(r) v\, d\Omega_0 = l(v). \end{gathered} \tag{2.21}$$

Разрешимость задачи (2.1)-(2.3) в смысле ее определения (2.21) гарантирует

Т е о р е м а 2.1. *При любом* $g(r) \in U$ *существует единственное обобщенное решение* $u(r) = u(r; g) \in \overset{\circ}{V}_{\Gamma_1,\Gamma_2}\ (\Omega^{(1,2)})$ *задачи* (2.1)-(2.3), *определяемое из интегрального тождества* (2.21), *причем*

$$\|u(r; g)\|_{\overset{\circ}{V}_{\Gamma_1,\Gamma_2}} \leq C_7 \sum_{k=1}^{2} \|f_k(r)\|_{L_2(\Omega_k)} = \overline{C}_7,, \tag{2.22}$$

где $C_7 = Const > 0$.

Доказательство теоремы 2.1. опирается на теорию монотонных операторов [26], [27], [30], [31], при этом существенно используются, введенные выше Гильбертовы пространства $V(\Omega^{(1,2)})$, $\overset{\circ}{V}_{\Gamma_1,\Gamma_2}\ (\Omega^{(1,2)})$ и введенные в них эквивалентные нормы, а также неравенства (2.15)-(2.17).

Рассмотрим теперь задачу оптимального управления (2.11), (2.1)-(2.10). Справедлива следующая теорема о разрешимости экстремальной задачи (2.11), (2.1)-(2.10).

Т е о р е м а 2.2. *Существует, по крайней мере, одно оптимальное управление* $g_* \in U$ *задачи* (2.11), (2.1)-(2.10), *т.е.* $J_* = \inf\{J(g) : g \in U\} > -\infty$, $U_* = \{g_* \in U : J(g_*) = J_*\} \neq \emptyset$. *Множество точек минимума* U_* *функционала цели* $J(g)$ *в экстремальной задаче* (2.11), (2.1)-(2.10) *слабо компактно в* $H = W_2^1(\Omega_1) \times W_2^1(\Omega_2)$. *Любая минимизирующая последовательность* $\left\{g^{(n)}\right\}_{n=1}^{\infty} \subset U$ *функционала* $J(g)$ *слабо в* H *сходится к множеству* U_*.

3. Разностная аппроксимация задач управления. Корректность аппроксимаций

В связи с численным решением задач оптимального управления существенный интерес представляет вопрос об аппроксимации бесконечномерных задач оптимизации (2.11), (2.1)-(2.10) последовательностью конечномерных задач оптимального управления. Ниже построим и изучим аппроксимации задач на основе метода сеток (см. [10]-[14]) и исследуем сходимость этих аппроксимаций при неограниченном измельчении шага h сетки дискретизации. Для аппроксимации задач оптимизации (2.11), (2.1)-(2.10) нам понадобятся некоторые сетки на $[0,l_\alpha]$, $\alpha=1,2$ и в $\overline{\Omega}$. Введем в рассмотрение одномерные неравномерные сетки по x_1 и x_2: $\hat{\omega}_\alpha=\{x_\alpha^{(i_\alpha)}\in[0,l_\alpha]:i_\alpha=\overline{0,N_\alpha},x_\alpha^{(0)}=0,x_\alpha^{(N_\alpha)}=l_\alpha,h_{\alpha i_\alpha}=x_\alpha^{(i_\alpha)}-x_\alpha^{(i_\alpha-1)}\}$, $\alpha=1,2$, а также введем неравномерную сетку по x_1 и x_2 в области $\overline{\Omega}=\overline{\Omega}_1\cup\overline{\Omega}_2$: $\hat{\omega}=\hat{\omega}_1\times\hat{\omega}_2$. Очевидно, всегда можно построить сетку $\hat{\omega}_1$ на $[0,l_1]$ так, чтобы точка $x_1=\xi$ была ее узлом. При решении практических задач целесообразно выбирать в областях $\overline{\Omega}_1$ и $\overline{\Omega}_2$ равномерные шаги $h_1^{(1)}$ и $h_1^{(2)}$ соответственно, и исходя из положения точки $x_1=\xi$ число узлов находить из предположения $h_1^{(1)}\approx h_1^{(2)}$. Обоснования разностных схем на неравномерных сетках для данной экстремальной задачи (2.11), (2.1)-(2.10) не носят принципиального характера, и в дальнейшем для наглядности исследования во всей области $\overline{\Omega}$ сетку по x_1 и x_2 будем считать равномерной, полагая $x_1^{(i_1)}-x_1^{(i_1-1)}=h_1$, $i_1=\overline{1,N_1}$ и $x_2^{(i_2)}-x_2^{(i_2-1)}=h_2$, $i_2=\overline{1,N_2}$. Значение x_1 в точке $x_1=\xi$ обозначим через x_ξ, а соответствующий номер узла обозначим через $N_{1\xi}$, $1<N_{1\xi}<N_1-1$.

Введем сетки узлов: $\bar{\omega}_1^{(1)}=\{x_1^{(i_1)}=i_1h_1\in[0,\xi]:i_1=\overline{0,N_{1\xi}},N_{1\xi}h_1=\xi\}$, $\bar{\omega}_1^{(2)}=\{x_1^{(i_1)}=i_1h_1\in[\xi,l_1]:i_1=\overline{N_{1\xi,N_1}},N_1h_1=l_1\}$, $\omega_1^{(1)}=\bar{\omega}_1^{(1)}\backslash\{x_1=0,x_1=\xi\}$, $\omega_1^{(2)}=\bar{\omega}_1^{(2)}\backslash\{x_1=\xi,x_1=l_1\}$; $\bar{\omega}_2=\{x_2^{(i_2)}=i_2h_2\in[0,l_2]:i_2=\overline{0,N_2},N_2h_2=l_2\}$, $\omega_2=\bar{\omega}_2\setminus\{x_2=0,x_2=l_2\}$; $\bar{\omega}_1=\bar{\omega}_1^{(1)}\cup\bar{\omega}_1^{(2)}$; $\omega_1=\omega_1^{(1)}\cup\omega_1^{(2)}$; $\bar{\omega}^{(1)}=\bar{\omega}_1^{(1)}\times\bar{\omega}_2$; $\bar{\omega}^{(2)}=\bar{\omega}_1^{(2)}\times\bar{\omega}_2$; $\omega^{(1)}=\omega_1^{(1)}\times\omega_2$; $\omega^{(2)}=\omega_1^{(2)}\times\omega_2$; $\bar{\omega}\equiv\bar{\omega}^{(1,2)}=\bar{\omega}^{(1)}\cup\bar{\omega}^{(2)}=(\bar{\omega}_1^{(1)}\cup\bar{\omega}_1^{(2)})\times\bar{\omega}_2=\{x_1^{(i_1)}=i_1h_1,i_1=\overline{0,N_1},N_{1/xi}h_1=\xi,(N_1-N_{1\xi})h_1=l_1-\xi,1<N_{1\xi}<N_1-1\}\times\bar{\omega}_2$, $\omega\equiv\omega^{(1,2)}=\omega^{(1)}\cup\omega^{(2)}$; $\omega_1^{(1)+}=\bar{\omega}_1^{(1)}\cap(0,\xi]$, $\omega_1^{(1)-}=\bar{\omega}_1^{(1)}\cap[0,\xi)$, $\omega_1^{(2)-}=\bar{\omega}_1^{(2)}\cap[\xi,l_1)$, $\omega^{(1)+}=\omega_1^{(1)+}\times\bar{\omega}_2$; $\gamma_\xi=\{x_1=\xi,x_2=h_2,2h_2,...,(N_2-1)h_2\}=\{x_1=\xi,x_2^{(i_2)}=i_2h_2,i_2=\overline{1,N_2-1}\}$; $\gamma^{(k)}=\partial\omega^{(k)}\backslash\gamma_S$; $\omega_1^{(1)+}\times\omega_2=\omega^{(1)}\cup\gamma_S=\bar{\omega}^{(1)}\backslash\gamma^{(1)}$; $\partial\omega^{(k)}=\bar{\omega}^{(k)}\backslash\omega^{(k)}$ – множество граничных узлов сетки $\bar{\omega}^{(k)}$, $k=1,2$. При исследование сходимости разностных аппроксимаций нам потребуются скалярные произведения, нормы и полунормы сеточных функций, заданных на различных сетках. Множество сеточных функций $y_k(x)$, $x\in\bar{\omega}^{(k)}\subset\bar{\Omega}_k$, $k=1,2$, снабженное скалярным произведением и нормой

$$(y_k,v_k)_{L_2(\bar{\omega}^{(k)})}=\sum_{\bar{\omega}^{(k)}}y_k(x)v_k(x)\hbar_1\hbar_2,\quad \|y_k\|_{L_2(\bar{\omega}^{(k)}))}=(y_k,y_k)^{1/2}_{L_2(\bar{\omega}^{(k)})},\tag{3.1}$$

обозначим через $L_2(\bar{\omega}^{(k)})$, $k=1,2$. Здесь $\hbar_1=\hbar_1(x)$ – средний шаг сеток $\bar{\omega}_1^{(1)}$ и $\bar{\omega}_1^{(2)}$, $\hbar_2=\hbar_2(x)$ – средний шаг сетки $\bar{\omega}_2$ [11]. Через $W_2^1(\bar{\omega}^{(1)})$ и $W_2^1(\bar{\omega}^{(2)})$ обозначим пространства сеточных функций, заданных на сетках $\bar{\omega}^{(1)}$ и $\bar{\omega}^{(2)}$ со скалярными произведениями и нормами:

$$(y_k,v_k)_{W_2^1(\bar{\omega}^{(k)})}=\sum_{\omega_1^{(k)+}\times\bar{\omega}_2}y_{k\bar{x}_1}v_{k\bar{x}_1}h_1\hbar_2+\sum_{\bar{\omega}_1^{(k)}\times\omega_2^{+}}y_{k\bar{x}_2}v_{k\bar{x}_2}\hbar_1h_2+(y_k,v_k)_{L_2(\bar{\omega}^{(k)})},$$

$$\|y\|^2_{W_2^1(\bar{\omega}^{(k)})}=\|\nabla y_k\|^2+\|y_k\|^2_{L_2(\bar{\omega}^{(k)})},\|\nabla y_k\|^2=\sum_{\omega_1^{(k)+}\times\bar{\omega}_2}y^2_{k\bar{x}_1}h_1\hbar_2+\sum_{\bar{\omega}_1^{(k)+}\times\bar{\omega}_2^{+}}y^2_{k\bar{x}_2}\hbar_1h_2,k=1,2.\tag{3.2}$$

Введем в рассмотрение пространство $V_h \equiv V_h(\bar\omega^{(1,2)})$ пар сеточных функций $y(x) = (y_1(x), y_2(x))$, определяемое соотношением $V_h \equiv V_h(\bar\omega^{(1,2)}) = \{y(x) = (y_1(x), y_2(x)) \in W_2^1(\bar\omega^{(1)}) \times W_2^1(\bar\omega^{(2)})\}$. Снабженное скалярным произведением и нормой

$$(y_k, v_k)_{V_h(\bar\omega^{(1,2)})} = \sum_{k=1}^{2} (y_k, v_k)_{W_2^1(\bar\omega^{(k)})}, \quad \|y_k\|_{V_h(\bar\omega^{(1,2)})} = \sum_{k=1}^{2} \|y_k\|^2_{W_2^1(\bar\omega^{(k)})}, \tag{3.3}$$

$V_h(\bar\omega^{(1,2)})$ является гильбертовым пространством.

Пусть $\gamma^{(k)} = \partial\omega^{(k)} \setminus \gamma_S$ – подмножество граничных узлов $\partial\omega^{(k)}$ сетки $\bar\omega^{(k)} \subset \bar\Omega_k$, $k = 1, 2$. Через $L_2(\bar\omega^{(k)}; \gamma^{(k)})$ обозначим подпространство пространства сеточных функций $L_2(\bar\omega^{(k)})$, обращающихся в нуль на $\gamma^{(k)}$, $k = 1, 2$, с нормами

$$\|y_k\|^2_{L_2(\bar\omega^{(k)};\gamma^{(k)})} = \sum_{x\in\omega^{(k)}} y_k^2(x) h_1 h_2 + \frac{1}{2} \sum_{x\in\gamma_S} y_k^2(x) h_1 h_2, k = 1, 2. \tag{3.4}$$

индуцированными скалярными произведениями

$$(y_k, v_k)_{L_2(\bar\omega^{(k)};\gamma^{(k)})} = \sum_{x\in\omega^{(k)}} y_k(x) v_k(x) h_1 h_2 + \frac{1}{2} \sum_{x\in\gamma_S} y_k(x) v_k(x) h_1 h_2, \quad k = 1, 2. \tag{3.5}$$

Через $W_2^1(\bar\omega^{(k)}; \gamma^{(k)})$ обозначим подпространство пространства сеточных функций $W_2^1(\bar\omega^{(k)})$, обращающихся в нуль на $\gamma^{(k)}$, $k = 1, 2$.

Введем в рассмотрение пространство $\overset{\circ}{H}_{\gamma^{(1)},\gamma^{(2)}} (\bar\omega^{(1,2)})$ и $\overset{\circ}{V}_{\gamma^{(1)},\gamma^{(2)}} (\bar\omega^{(1,2)})$ пар $y(x) = (y_1(x), y_2(x))$:

$$\overset{\circ}{H}_{\gamma^{(1)},\gamma^{(2)}} (\bar\omega^{(1,2)}) = \{y = (y_1(x), y_2(x)) \in L_2(\bar\omega^{(1)}; \gamma^{(1)}) \times L_2(\bar\omega^{(2)}; \gamma^{(2)})\}, \tag{3.6}$$

$$\overset{\circ}{V}_{\gamma^{(1)},\gamma^{(2)}} (\bar\omega^{(1,2)}) = \{y = (y_1(x), y_2(x)) \in W_2^1(\bar\omega^{(1)}; \gamma^{(1)}) \times W_2^1(\bar\omega^{(2)}; \gamma^{(2)})\}, \tag{3.7}$$

$$\|y\|^2_{\overset{\circ}{H}_{\gamma^{(1)},\gamma^{(2)}}} = \sum_{k=1}^{2} \|y_k\|^2_{L_2(\bar\omega^{(k)};\gamma^{(k)})}, \quad \|y\|^2_{\overset{\circ}{V}_{\gamma^{(1)},\gamma^{(2)}}} = \sum_{k=1}^{2} \|\nabla y_k\|^2 + \|[y]\|^2_{L_2(\gamma_S)}. \tag{3.8}$$

Задачам оптимального управления (2.11), (2.1)-(2.10) поставим в соответствие следующие разностные аппроксимации: минимизировать сеточный функционал

$$J_h(\Phi_h) = \sum_{x\in\bar\omega^{(1)}} |y(x;\Phi_h) - u_{0h}^{(1)}|^2 \hbar_1 \hbar_2 = \|y(x;\Phi_h) - u_{0h}^{(1)}\|^2_{L_2(\bar\omega^{(1)})}, \tag{3.9}$$

при условиях, что сеточная функция $y(x) \equiv y(x, \Phi_h) = (y_1(x, \Phi_h), y_2(x, \Phi_h)) \in \overset{\circ}{V}_{\gamma^{(1)},\gamma^{(2)}}$ $(\bar\omega^{(1,2)})$, называемая решением разностной краевой задачи (разностной схемой) для задачи (2.1)-(2.3), удовлетворяет для любой сеточной функции $v(x) = (v_1(x), v_2(x)) \in \overset{\circ}{V}_{\gamma^{(1)},\gamma^{(2)}}$

$(\bar{\omega}^{(1,2)})$ сумматорному тождеству

$$Q_h(y,v)=\Big\{\sum_{\omega_1^{(1)+}}\sum_{\omega_2} b_{1h}^{(1)}(\Phi_{1h}(x_1,x_2))y_{1\bar{x}_1}v_{1\bar{x}_1}h_1h_2+\Big(\sum_{\omega_1^{(1)}}\sum_{\omega_2^{+}}\tilde{b}_{1h}^{(1)}(\Phi_{1h}(x_1,x_2))y_{1\bar{x}_1}v_{1\bar{x}_1}h_1h_2+$$
$$+\frac{1}{2}\sum_{\omega_2^{+}}\tilde{b}_{1h}^{(1)}(\Phi_{1h}(\xi,x_2))y_{1\bar{x}_2}(\xi,x_2)v_{1\bar{x}_2}(\xi,x_2)h_1h_2\Big)\Big\}+$$
$$+\Big\{\sum_{\omega_1^{(2)+}}\sum_{\omega_2} b_{2h}^{(2)}(\Phi_{2h}(x_1,x_2))y_{2\bar{x}_1}v_{2\bar{x}_1}h_1h_2+$$
$$+\Big(\sum_{\omega_1^{(2)}}\sum_{\omega_2^{+}}\tilde{b}_{2h}^{(2)}(\Phi_{2h}(x_1,x_2))y_{2\bar{x}_2}v_{2\bar{x}_2}h_1h_2+\frac{1}{2}\sum_{\omega_2^{+}}\tilde{b}_{2h}^{(2)}(\Phi_{2h}(\xi,x_2))y_{2\bar{x}_2}(\xi,x_2)v_{2\bar{x}_2}(\xi,x_2)h_1h_2\Big)+$$
$$+\Big\{\Big(\sum_{\omega^{(1)}}d_{1h}(x)q_1(y_1(x))v_1(x)h_1h_2+\frac{1}{2}\sum_{\omega_2}d_{1h}(\xi,x_2)q_1(y_1(\xi,x_2))v_1(\xi,x_2)h_1h_2\Big)+$$
$$+\Big(\sum_{\omega^{(2)}}d_{2h}(x)q_2(y_2(x))v_2(x)h_1h_2+\frac{1}{2}\sum_{\omega_2}d_{2h}(\xi,x_2)q_2(y_2(\xi,x_2))v_2(\xi,x_2)h_1h_2\Big)\Big\}+$$
$$+\sum_{\omega_2}\theta_h(x_2)[y(\xi,x_2)]\cdot[v(\xi,x_2)]\,h_2=$$
$$\Big\{\Big(\sum_{\omega^{(1)}}f_{1h}(x)v_1(x)h_1h_2+=\frac{1}{2}\sum_{\omega_2}f_{1h}(\xi,x_2)v_1(\xi,x_2)h_1h_2\Big)+$$
$$+\Big(\sum_{\omega^{(2)}}f_{2h}(x)v_2(x)h_1h_2+\frac{1}{2}\sum_{\omega_2}f_{2h}(\xi,x_2)v_1(\xi,x_2)h_1h_2\Big)\Big\}=l_h(v),\tag{3.10}$$

а сеточные управления $\Phi_h(x)$ принадлежат множеству допустимых сеточных управлений

$$U_h=U_{1h}\times U_{2h}\subset W_\infty^1(\bar{\omega}^{(1)})\times W_\infty^1(\bar{\omega}^{(2)})=B_h\tag{3.11}$$

и состоят из пар

$$\Phi_h(x)=\begin{cases}\Phi_{1h}(x), & x\in\bar{\omega}^{(1)};\\ \Phi_{2h}(x), & x\in\bar{\omega}^{(2)},\end{cases}\tag{3.12}$$

$$\begin{gathered}\Phi_{ph}(x)(x)\in U_{ph}=\big\{\Phi_{ph}(x)\in W_\infty^1(\bar{\omega}^{(p)})=B_{ph}:0<\nu_p\le\Phi_{ph}(x)\le\bar{\nu}_p,x\in\bar{\omega}^{(p)},\\ |\Phi_{phx_1}(x)|\le R_p^{(1)},x\in\omega_1^{(p)-}\times\bar{\omega}_2,|\Phi_{phx_2}(x)|\le R_p^{(2)},x\in\omega_1^{(p)}\times\bar{\omega}_2^{-}\big\},\quad p=1,2,\end{gathered}\tag{3.13}$$

где $B_{1h}=W_\infty^1(\bar{\omega}^{(1)})$, $B_{2h}=W_\infty^1(\bar{\omega}^{(2)})$ – пространства сеточных управлений $\Phi_{1h}(x)$, $\Phi_{2h}(x)$, заданных на сетках $\bar{\omega}^{(1)}$, $\bar{\omega}^{(2)}$ с нормами

$$\begin{aligned}\|\Phi_{1h}(x)\|_{W_\infty^1(\bar{\omega}^{(1)})}&=\max_{\bar{\omega}^{(1)}}|\Phi_{1h}(x)|+\max_{\omega_1^{(1)-}\times\bar{\omega}_2}|\Phi_{1hx_1}(x)|+\max_{\bar{\omega}_1^{(1)}\times\omega_2^{-}}|\Phi_{1hx_2}(x)|,\\ \|\Phi_{2h}(x)\|_{W_\infty^1(\bar{\omega}^{(2)})}&=\max_{\bar{\omega}^{(2)}}|\Phi_{2h}(x)|+\max_{\omega_1^{(2)-}\times\bar{\omega}_2}|\Phi_{2hx_1}(x)|+\max_{\bar{\omega}_1^{(2)}\times\omega_2^{-}}|\Phi_{2hx_2}(x)|,\end{aligned}\tag{3.14}$$

соответственно. Здесь

$$\begin{aligned}b_{1h}^{(1)}(\Phi_{1h}(x_1,x_2))&=\frac{\Phi_{1h}^{(-1_2)}(x)+\Phi_{1h}^{(-1_1,-1_2)}(x)+\Phi_{1h}^{(+1_2)}(x)+\Phi_{1h}^{(-1_1,+1_2)}(x)}{4},\\ \tilde{b}_{1h}^{(1)}(\Phi_{1h}(x_1,x_2))&=\frac{\Phi_{1h}(x)+\Phi_{1h}^{(-1_2)}(x)}{2},\\ b_{2h}^{(2)}(\Phi_{2h}(x_1,x_2))&=\frac{\Phi_{2h}^{(-1_2)}(x)+\Phi_{2h}^{(-1_1,-1_2)}(x)+\Phi_{2h}^{(+1_2)}(x)+\Phi_{2h}^{(-1_1,+1_2)}(x)}{4},\\ \tilde{b}_{2h}^{(2)}(\Phi_{2h}(x_1,x_2))&=\frac{\Phi_{2h}(x)+\Phi_{2h}^{(-1_2)}(x)}{2},\end{aligned}\tag{3.15}$$

$\Phi_{1h}^{(-1_1,-1_2)}(x)=\Phi_{1h}(x_1-h_1,x_2-h_2)$, $\Phi_{1h}^{(-1_2)}(x)=\Phi_{1h}(x_1,x_2-h_2)$, $\Phi_{1h}^{(-1_1,+1_2)}(x)=\Phi_{1h}(x_1-h_1,x_2+h_2)$, $\Phi_{1h}^{(+1_2)}(x)=\Phi_{1h}(x_1,x_2+h_2)$, $\Phi_{2h}^{(-1_1,-1_2)}(x)=\Phi_{2h}(x_1-h_1,x_2-h_2)$, $\Phi_{2h}^{(-1_2)}(x)=\Phi_{2h}(x_1,x_2-h_2)$, $\Phi_{2h}^{(-1_1,+1_2)}(x)=\Phi_{2h}(x_1-h_1,x_2+h_2)$, $\Phi_{2h}^{(+1_2)}(x)=\Phi_{1h}(x_1,x_2+h_2)$, а $d_{\alpha h}(x)$, $\alpha=1,2$, $\theta_h(x_2)$, $f_{\alpha h}(x)$, $\alpha=1,2$, $u_{0h}^{(1)}(x)$ – сеточные аппроксимации функций $d_\alpha(r)$, $\alpha=1,2$, $\theta(r_2)$, $f_\alpha(r)$, $\alpha=1,2$, $u_0^{(1)}(r)$, определяемые через усреднения по Стеклову:

$$
\begin{gathered}
d_{\alpha h}(x)=\frac{1}{h_1h_2}\iint\limits_{e^{(\alpha)}(x)} d_\alpha(r_1,r_2)\,dr_1dr_2,\quad x\in\omega^{(\alpha)},\alpha=1,2;\\
d_{1h}(\xi,x_2)=\frac{2}{h_1h_2}\int\limits_{\xi-0.5h_1}^{\xi}\int\limits_{e_2(x_2)} d_1(r_1,r_2)\,dr_1dr_2, x_2\in\omega_2,\\
d_{2h}(\xi,x_2)=\frac{2}{h_1h_2}\int\limits_{\xi}^{\xi+0.5h_1}\int\limits_{e_2(x_2)} d_2(r_1,r_2)\,dr_1dr_2, x_2\in\omega_2,\\
f_{1h}(x)=\frac{1}{h_1h_2}\iint\limits_{e^{(1)}(x)} f_1(r_1,r_2)\,dr_1dr_2, x_2\in\omega_1^{(1)},\\
f_{1h}(\xi,x_2)=\frac{2}{h_1h_2}\int\limits_{\xi-0.5h_1}^{\xi}\int\limits_{e_2(x_2)} f_1(r_1,r_2)\,dr_1dr_2, x_2\in\omega_2;\\
f_{2h}(x)=\frac{1}{h_1h_2}\iint\limits_{e^{(2)}(x)} f_2(r_1,r_2)\,dr_1dr_2, x\in\omega^{(2)},\\
f_{2h}(\xi,x_2)=\frac{2}{h_1h_2}\int\limits_{\xi}^{\xi+0.5h_1}\int\limits_{e_2(x_2)} f_2(r_1,r_2)\,dr_1dr_2, x_2\in\omega_2;\\
\theta_h(x_2)=\frac{1}{h_2}\int\limits_{e_2(x_2)}\theta(r_2)\,dr_2, x_2\in\omega_2;\quad u_{0h}^{(1)}(x)=\frac{1}{\hbar_1\hbar_2}\iint\limits_{e^{(1)}(x)} u_0^{(1)}(r_1,r_2)\,dr_1dr_2, x\in\bar\omega^{(1)}.
\end{gathered}
\tag{3.16}
$$

Здесь усреднения берутся по элементарным ячейкам [10].

Теорема 3.1. *Задача о нахождении решения разностной схемы* (3.10) *при любом фиксированном управлении* $\Phi_h\in U_h$ *однозначно разрешима, причем справедлива априорная оценка*

$$
\|y(x;\Phi_h)\|_{\overset{\circ}{V}_{\gamma^{(1)},\gamma^{(2)}}(\bar\omega^{(1,2)})}\le M\sum_{k=1}^{2}\|f_{kh}(x)\|_{L_2(\omega^{(k)})\cup\gamma_S}=\hat M,\forall\Phi_h\in U_h,\tag{3.17}
$$

где $M=Const>0$.

Теорема 3.2. *Для каждого* $h>0$ *существует по крайне мере одно оптимальное управление* $\Phi_{h*}\in U_h$ *в последовательности сеточных (разностных) экстремальных задач* (3.9)-(3.16), *т.е.* $J_{h*}=\inf\{J_h(\Phi_h):\Phi_h\in U_h\}>-\infty$, $U_{h*}=\{\Phi_{h*}\in U_h: J_h(\Phi_{h*})=J_{h*}\}\neq\emptyset$.

4. Априорные оценки погрешности и скорости сходимости сеточных экстремальных задач по состоянию

Установим связь между $u(r;g)$ – решением прямой задачи (2.1)-(2.3) с разрывными коэффициентами и решением и $y(x,\Phi_h)=(y_1(x,\Phi_h),y_2(x,\Phi_h))$ – решением аппроксимирующей ее разностной задачи состояния (3.10) при $h \to 0$, для любых фиксированных управлений $g \in U$ и $\Phi_h \in U_h$, где U и U_h – множества допустимых управлений в задачах оптимального управления (2.11), (2.1)-(2.10) и (3.9)-(3.16) соответственно.

Справедлива следующая теорема о точности аппроксимаций по состоянию.

Теорема 4.1. *Пусть $g \in U$ и $\Phi_h \in U_h$ – произвольные управления, а $u(r; g)$ и $y(x, \Phi_h)$ – соответствующие им решения задач состояния в экстремальных задачах* (2.11), (2.1)-(2.10) *и* (3.9)-(3.16). *Тогда для любых $h > 0$ справедлива следующая оценка скорости сходимости метода сеток по состоянию для экстремальной задачи* (2.11), (2.1)-(2.10)*:*

$$
\begin{gathered}
\|y(x,\Phi_h) - u(x;g)\|_{\overset{\circ}{V}_{\gamma^{(1)},\gamma^{(2)}}(\bar{\omega}^{(1,2)})} \le C\Big\{|h|\Big[\sum_{\alpha=1}^{2}\big(\|k_\alpha\|_{L_\infty(\Omega_\alpha)} + L_{q_\alpha}\|d_\alpha\|_{L_\infty(\Omega_\alpha)}\big)\times \\
\times\|u_\alpha\|_{W_2^2(\Omega_\alpha)} + \|\theta\|_{L_\infty(0,l_\alpha)}\sum_{\alpha=1}^{2}\|u_\alpha\|_{W_2^2(\Omega_\alpha)}\Big] + \\
+\sum_{\alpha=1}^{2}\Bigg(\Bigg\|b_{\alpha h}^{(\alpha)}(\Phi_{\alpha h}(x_1,x_2)) - \frac{1}{h_2}\int\limits_{e_2(x_2)} k_\alpha(x_1 - 0.5h_1, r_2)\,dr_2\Bigg\|_{L_\infty(\omega_1^{(\alpha)+})\times\omega_2} + \\
+\Bigg\|\tilde{b}_{\alpha h}^{(\alpha)}(\Phi_{\alpha h}(x_1,x_2)) - \frac{1}{h_1}\int\limits_{e_1^{(\alpha)}(x_1)} k_\alpha(r_1, x_2 - 0.5h_2)\,dr_1\Bigg\|_{L_\infty(\omega_1^{(\alpha)})\times\omega_2^+}\Bigg)\|u_\alpha\|_{W_2^2(\Omega_\alpha)} + \\
+\Bigg\|\tilde{b}_{1h}^{(1)}(\Phi_{1h}(\xi,x_2)) - \frac{2}{h_1}\int\limits_{\xi-0.5h_1}^{\xi} k_1(r_1, x_2 - 0.5h_2)\,dr_1\Bigg\|_{L_\infty(\omega_2^+}\|u_1\|_{W_2^2(\Omega_1)} \\
+\Bigg\|\tilde{b}_{2h}^{(2)}(\Phi_{2h}(\xi,x_2)) - \frac{2}{h_1}\int\limits_{\xi}^{\xi+0.5h_1} k_2(r_1, x_2 - 0.5h_2)\,dr_1\Bigg\|_{L_\infty(\omega_2^+}\|u_2\|_{W_2^2(\Omega_1)}\Big\}.
\end{gathered}
\tag{4.1}
$$

5. Оценки погрешности сеточного функционала и скорости схрдимости сеточных аппроксимаций по функционалу, сходимость по управлению. Регуляризация аппроксимаций

Для ответа на вопрос о сходимости сеточных задач оптимального управления (3.9)-(3.16) по функционалу и управлению необходимо, прежде всего, установить связь между функционалами $J_h(\Phi_h)$ и $J(g)$ эктремальных задач (3.9)-(3.16) и (2.11), (2.1)-(2.10), для любых фиксированных управлений $\Phi_h \in U_h$ и $g \in U$, и любых $h > 0$.

Оценку погрешности функционала $J_h(\Phi_h)$ эктремальной задачи (3.9)-(3.16) устанавливает

Теорема 5.1. *Для любых управлений $g \in U$ и $\Phi_h \in U_h$ экстремальных задач* (2.11), (2.1)-(2.10) *и* (3.9)-(3.16) *соответственно и любых $h > 0$ для погрешности* *сеточного функционала* $J_h(\Phi_h)$ *экстремальной задачи* (3.9)-(3.16) *справедлива оценка*

$$
\begin{aligned}
&|J(g)-J_h(\Phi_h)| = |I(u(r;g)) - I_h(y(x;\Phi_h))| \leq \\
&\leq M\Bigg\{|h| + \sum_{\alpha=1}^{2}\Bigg[\Bigg\|\frac{1}{h_2}\int\limits_{e_2(x_2)} k_\alpha(x_1-0.5h_1,r_2)\,dr_2 - b_{\alpha h}^{(\alpha)}(\Phi_{\alpha h}(x_1,x_2))\Bigg\|_{L_\infty(\omega_1^{(\alpha)+})\times\omega_2} + \\
&+\Bigg\|\frac{1}{h_2}\int\limits_{e_1^{(\alpha)}(x_1)} k_\alpha(r_1,x_2-0.5h_2)\,dr_1 - \tilde{b}_{\alpha h}^{(\alpha)}(\Phi_{\alpha h}(x_1,x_2))\Bigg\|_{L_\infty(\omega_1^{(\alpha)}\times\omega_2^+)}\Bigg] + \\
&+\Bigg\|\frac{2}{h_1}\int\limits_{\xi-0.5h_1}^{\xi} k_1(r_1,x_2-0.5h_2)\,dr_1 - \tilde{b}_{1h}^{(1)}(\Phi_{1h}(\xi,x_2))\Bigg\|_{L_\infty(\omega_2^+)} + \\
&+\Bigg\|\frac{2}{h_1}\int\limits_{\xi}^{\xi+0.5h_1} k_2(r_1,x_2-0.5h_2)\,dr_1 - \tilde{b}_{2h}^{(2)}(\Phi_{2h}(\xi,x_2))\Bigg\|_{L_\infty(\omega_2^+)}\Bigg\}.
\end{aligned}
\tag{5.1}
$$

где $M = Const > 0$, *не зависящая от* h, y, u, Φ_h, g.

Для исследования сходимости разностных аппроксимаций задач оптимального управления (2.11), (2.1)-(2.10) по функционалу и управлению рассмотрим последовательность разностных задач минимизации (3.9)-(3.16), зависящих от шага $h = (h_1, h_2)$ сетки $\bar{\omega} = \bar{\omega}^{(1)} \cup \bar{\omega}^{(2)} = \bar{\omega}^{(1,2)} \subset \bar{\Omega}_1 \cup \bar{\Omega}_2$ при $|h| \to 0$.

Теорема 5.2. *Пусть* J_* *и* J_{h*} – *нижние грани функционалов* $J(g)$ *и* $J_h(\Phi_h)$ *в задачах* (2.11), (2.1)-(2.10) *и* (3.9)-(3.16) *соответственно. Семейство сеточных задач* (3.9)-(3.16), *зависящих от шага* $h = (h_1, h_2)$ *сетки* $\bar{\omega}^{(1,2)} = \bar{\omega}^{(1)} \cup \bar{\omega}^{(2)} \subset \bar{\Omega}_1 \cup \bar{\Omega}_2$ *при* $|h| \to 0$ *аппроксимирует исходную экстремальную задачу* (2.11), (2.1)-(2.10) *по функционалу, т.е.* $\lim J_{h*} = J_*$ *при* $|h| \to 0$, *и справедлива оценка скорости сходимости*

$$
|J_{h*} - J_*| \leq M|h|. \tag{5.2}
$$

Предположим теперь, что при каждом $h = (h_1, h_2)$ и соответствующей сетке $\bar{\omega} = \bar{\omega}_h = \bar{\omega}^{(1)} \cup \bar{\omega}^{(2)}$ с помощью какого-либо метода минимизации получено приближенное значение $J_{h*} + \epsilon_h$ нижней грани J_{h*} функционала $J_h(\Phi_h)$ на U_h в задаче (3.9)-(3.16) и найдено сеточное управление $\Phi_{h\epsilon_h}(x) \in U_h$, дающее приближенное решение задачи (3.9)-(3.16) в следующем смысле:

$$
J_{h*} \leq J_h(\Phi_{h\epsilon_h}) \leq J_{h*} + \epsilon_h, \quad \Phi_{h\epsilon_h} \in U_h, \tag{5.3}
$$

где последовательность $\{\epsilon_h\}$ такова, что $\epsilon_h \geq 0$ и $\epsilon_h \to 0$ при $|h| \to 0$.

Возникает вопрос, можно ли принять сеточное управление $\Phi_{h\epsilon_h}(x) \in U_h$ из (5.3) в качестве некоторого приближения оптимального управления задачи (2.11), (2.1)-(2.10).

Теорема 5.3. *Пусть последовательность сеточных управлений* $\{\Phi_{h\epsilon_h}(x) \subset U_h\}$ *определена из условий* (5.3). *Тогда последовательность управлений* $\{F_h\Phi_{h\epsilon_h}(r)\}$, *где* $F_h : H_h \to H$ – *кусочно-линейные восполнения сеточных управлений, является минимизирующей для функционала* $J(g)$ *исходной задачи* (2.11), (2.1)-(2.10), *т.е.* $\lim J(F_h\Phi_{h\epsilon_h}) = J_*$ *при* $|h| \to 0$ *и справедлива оценка скорости сходимости*

$$
0 \leq J(F_h\Phi_{h\epsilon_h}) - J_* \leq C|h| + \epsilon_h. \tag{5.4}
$$

Последовательность $\{F_h\Phi_{h\epsilon_h}(r)\}$ *слабо в* $H = W_2^1(\Omega_1) \times W_2^1(\Omega_2)$ *сходится к множеству* $U_* \neq \emptyset$ *оптимальных управлений исходной экстремальной задачи* (2.11), (2.1)-(2.10).

Рассмотрим вопрос о сильной сходимости в $H = W_2^1(\Omega_1) \times W_2^1(\Omega_2)$ по аргументу (управлению) разностных аппроксимаций (3.9)-(3.16). Будем допускать, что вычисления сеточных функционалов $J_h(\Phi_h)$ ведутся приближенно, как в силу приближенной исходной информации, так и в силу того, что счет ведется с округлениями, так что вместо фунционала $J_h(\Phi_h)$, фактически используется приближенный функционал $J_{h\delta_h}(\Phi_h)$, который связан с $J_h(\Phi_h)$ соотношениями

$$J_{h\delta_h}(\Phi_h) = J_h(\Phi_h) + \theta_{\delta_h}(\Phi_h), \quad |\theta_{\delta_h}(\Phi_h)| \le \delta_h, \forall \Phi_h \in U_h, \delta_h \to +0 \text{ при } |h| \to 0. \qquad (5.5)$$

Для регуляризации семейства сеточных экстремальных задач (3.9)-(3.16) введем на U функционал-стабилизатор $\Omega(g) = \|g\|_H^2 = \|g\|^2_{W_2^1(\Omega_1)\times W_2^1(\Omega_2)}$, $g \in U$, и его сеточный аналог $\Omega(\Phi_h) = \|\Phi_h\|^2_{H_h} = \|\Phi_h\|^2_{W_2^1(\bar\omega_1)\times W_2^1(\bar\omega_2)}$, $\Phi_h \in U_h$. При каждом $h = (h_1, h_2)$ рассмотрим на U_h сеточный функционал Тихонова задачи (3.9)-(3.16): $T_{h\delta_h\alpha_h}(\Phi_h) = J_{h\delta_h}(\Phi_h) + \alpha_h\Omega_h(\Phi_h)$, $\Phi_h \in U_h$, где $\{\alpha_h\}$ – произвольная последовательность положительных чисел, сходящаяся к нулю при $|h| \to 0$. Рассмотрим теперь задачу минимизации функционала $T_{h\delta_h\alpha_h}(\Phi_h)$ на U_h: при каждом $h = (h_1, h_2)$ определим сеточное управление $\hat\Phi_h = \Phi_{h\delta_h\alpha_h\nu_h}(x) \in U_h$, удовлетворяющее условиям

$$T_{h\delta_h\alpha_h*} = \inf\{T_{h\delta_h\alpha_h}(\Phi_h) : \Phi_h \in U_h\} \le T_{h\delta_h\alpha_h}(\hat\Phi_h) \le T_{h\delta_h\alpha_h*} + \nu_h, \qquad (5.6)$$

где $\nu_h \ge 0$ и $\nu_h \to +0$ при $|h| \to 0$. Введем множество Ω-нормальных решений задачи оптимального управления (2.11), (2.1)-(2.10): $U_{**} = \{g_{**} \in U_* : \Omega(g_{**}) = \inf\{\Omega(g_*) : g_* \in U_*\} = \Omega_*\}$. Так как функционал $\Omega(g)$ является слабым стабилизатором в H задачи (2.11), (2.1)-(2.10) и функционалы $J(g)$ и $\Omega(g)$ – полунепрерывны снизу на U в слабой топологии пространства $H = W_2^1(\Omega_1) \times W_2^1(\Omega_2)$, то $U_{**} \ne \emptyset$ [1].

Теорема 5.4. *Пусть последовательность сеточных управлений* $\{\hat\Phi_h\} \subset U_h$ *определена из условий* (5.6). *Тогда последовательность управлений* $\{F_h\hat\Phi_h(r)\} \subset U_h$ *является минимизирующей для функционала* $J(g)$ *исходной экстремальной задачи* (2.11), (2.1)-(2.10), *т.е.* $\lim J(F_h\hat\Phi_h) = J_*$ *при* $|h| \to 0$ *и справедлива оценка скорости сходимости*

$$0 \le J(F_h\hat\Phi_h) - J_* \le M[|h| + \nu_h + \delta_h + \alpha_h]. \qquad (5.7)$$

Если, кроме того, параметры ν_h, δ_h, α_h *согласованы с* $|h|$ *так, что* $\nu_h, \delta_h, \alpha_h \to +0$ *при* $|h| \to 0$ *и* $(|h|+\nu_h+\delta_h)/\alpha_h \to 0$ *при* $|h| \to 0$, *то последовательность* $\{F_h\hat\Phi_h\}$ *сильно сходится в* H *к множеству* Ω*-нормальных (в смысле минимальной нормы) оптимальных управлений* U_{**} *задачи* (2.11), (2.1)-(2.10).

Доказательство теоремы проводится на основе методики из [1], [32] и опирается на полученные выше результаты.

Замечание 5.1. *Полученные результаты не зависят от способа решения разностных задач оптимального управления* (3.9)-(3.16).

Список литературы

1. Васильев Ф. П., *Методы оптимизации*, Факториал Пресс, М., 2002.

2. Лионс Ж.-Л., *Оптимальное управление системами, описываемыми уравнениями с частными производными*, Мир, М., 1972.

3. Лурье К. А., *Оптимальное управление в задачах математической физики*, Наука, М., 1975.

4. Литвинов В. Г., *Оптимизация в эллиптических граничных задачах с приложениями к механике*, Наука, М., 1987.

5. Райтум У. Ё., *Задачи оптимального управления для эллиптических уравнений*, Зинатне, Рига, 1989.

6. Егоров А. И., *Оптимальное управление тепловыми и диффузионными процессами*, Наука, М., 1978.

7. Ишмухаметов А. З., *Вопросы устойчивости и аппроксимации задач оптимального управления*, ВЦ РАН, М., 1999.

8. Ишмухаметов А. З., *Вопросы устойчивости и аппроксимации задач оптимального управления системами с распределенными параметрами*, ВЦ РАН, М., 2001.

9. Потапов М. М., *Аппроксимация экстремальных задач в математической физике (гиперболические уравнения)*, Изд-во МГУ, М., 1985.

10. Лубышев Ф. В., *Разностные аппроксимации задач оптимального управления системами, описываемыми уравнениями в частных производных*, БашГУ, Уфа, 1999.

11. Самарский А. А., Андреев В. Б., *Разностные методы для эллиптических уравнений*, Наука, М., 1976.

12. Самарский А. А., *Теория разностных схем*, Наука, М., 1989.

13. Самарский А. А., Лазаров Р. Д., Макаров В. Л., *Разностные схемы для дифференциальных уравнений с обобщенными решениями*, Высшая школа, М., 1987.

14. Самарский А. А., Вабищевич П. Н., *Вычислительная теплопередача*, Книжный дом «ЛИБРОКОМ», М., 2009.

15. Лубышев Ф. В., “Точность разностных аппроксимаций и регуляризация задач оптимального управления для эллиптического уравнения с управлениями в коэффициентах”, *Журнал вычисл. матем. и матем. физики*, **29**:9 (1989), 1431–1444.

16. Лубышев Ф. В., “Аппроксимация и регуляризация задач оптимального управления для несамосопряженного эллиптического уравнения с переменными коэффициентами”, *Журнал вычисл. матем. и матем. физики*, **31**:1 (1991), 17–30.

17. Лубышев Ф. В., “Аппроксимация и регуляризация задач оптимального управления коэффициентами параболических уравнений”, *Журнал вычисл. матем. и матем. физики*, **33**:8 (1993), 1166–1183.

18. Лубышев Ф. В., “Аппроксимация и регуляризация задач оптимального управления для параболических уравнений с управлениями в коэффициентах”, *Доклады РАН*, **349**:5 (1996), 598–602.

19. Лубышев Ф. В., Файрузов М. Э., “Аппроксимация и регуляризация задач оптимального управления для квазилинейных эллиптических уравнений”, *Журнал вычисл. матем. и матем. физики*, **41**:8 (2001), 1148–1164.

20. Лубышев Ф. В., Манапова А. Р., “О некоторых задачах оптимального управления и их разностных аппроксимациях и регуляризации для квазилинейных эллиптических уравнений с управлениями в коэффициентах”, *Журнал вычисл. матем. и матем. физики*, **47**:3 (2007), 376–396.

21. Цурко В. А., “О точности разностных схем для параболических уравнений с разрывным решением”, *Дифференц. уравнения*, **36**:7 (2000), 986–992.

22. Цурко В. А., “Разностные методы для задач конвекции-диффузии с разрывными коэффициентами и решениями”, *Дифференц. уравнения*, **41**:2 (2005), 274–280.

23. Карташов Э. М., *Аналитические методы в теории теплопроводности твердых тел*, Высшая школа, М., 1985.

24. Соболев С. Л., *Некоторые применения функционального анализа в математической физике*, СО АН СССР, Новосибирск, 1962.

25. Ладыженская О. А., *Краевые задачи математической физики*, Наука, М., 1973.

26. Гаевский Х., Грегер К., Захариас К., *Нелинейные операторные уравнения и операторные дифференциальные уравнения*, Мир, М., 1978.

27. Куфнер А., Фучик Ф., *Нелинейные дифференциальные уравнения*, Наука, М., 1988.

28. Гилбарг Д., Трудингер Н., *Эллиптические дифференциальные уравнения с частными производными второго порядка*, Наука, М., 1989.

29. Киндерлелер Д., Стампаккья Г., *Введение в вариационные неравенства и их приложения*, Мир, М., 1983.

30. Ректорис К., *Вариационные методы в математической физике и технике*, Мир, М., 1985.

31. Браудер Ф.Е., *Материалы к совместному советско-американскому симпозиуму по уравнениям с частными производными*, Новосибирск, 1963.

32. Тихонов А. Н., Арсенин В. Я., *Методы решения некорректных задач*, Наука, М., 1986.

Grid approximation of optimal control problems for semilinear elliptic equations with discontinuous coefficients and solutions, with offices in the coefficients of the highest derivatives

© **F. V. Lubyshev**[3], **M. E. Fairuzov**[4]

Abstract. Discusses and examines the mathematical formulation of nonlinear optimal control problems for semilinear elliptic equations with discontinuous coefficients and solutions, with offices in the coefficients of the highest derivatives. Built difference approximation of extremal problems, establish estimates of the accuracy of the approximations on the condition and functionality, proved weak convergence of approximations. Held regularization approximations on Tikhonov.

Key Words: the problem of optimal control, semilinear elliptic equations, differential solution method, regularization method.

[3] Full professor of Department of Applied Computer Science and Numerical Methods, Bashkir State University, Ufa; fairuzovme@mail.ru.

[4] Associate Professor of Department of Applied Computer Science and Numerical Methods, Bashkir State University, Ufa; fairuzovme@mail.ru.