

УДК 539.376

О модификации наилучшего параметра продолжения решения

© Е. Б. Кузнецов¹, С. С. Леонов²

Аннотация. В работе вводится понятие параметра продолжения решения локально эквивалентного наилучшему аргументу и дается ряд частных утверждений, касающихся его обусловленности. Под наилучшим понимается параметр, в каждой точке направленный по касательной к интегральной кривой рассматриваемой задачи. Показано применение преобразования к наилучшему и локально эквивалентному ему аргументу для задачи одноосного растяжения цилиндрических образцов из стали 45 при постоянной температуре в условиях ползучести. Проводится сравнение полученных результатов.

Ключевые слова: ползучесть, разрушение, длительная прочность, системы обыкновенных дифференциальных уравнений, продолжение решения по параметру, наилучшая параметризация.

1. Введение

На современном этапе развития перед человечеством ставятся все более сложные и трудоемкие задачи. Одна из них, расчет и эксплуатация конструкций из материалов со сложными реологическими свойствами, например композитов, в условиях сложного напряжено-деформированного состояния при высоких температурах. В связи с ростом мощностей вычислительной техники многие задачи этого класса решаются сегодня как на персональных, так и на высокопроизводительных компьютерах с использованием разностных и конечно-элементных подходов. Тем не менее, потребность в разработке новых эффективных и экономичных методов решения подобных задач не исчезла, более того, она ощущается все острее. Ведь не любую задачу можно решить простым увеличением мощности компьютера, именно комбинация производительности компьютера и эффективности алгоритма решения позволит существенно продвинуться дальше в исследовании поведения материалов при сложных режимах нагружения.

В последние десятилетия появился ряд работ, посвященных применению параметризации к решению задач механики деформируемого твердого тела. Так, в работе [1] вводится наилучший параметр, применяемый для решения задач нелинейного деформирования, сводящимся к системам нелинейных алгебраических уравнений. Под наилучшим понимается параметр, в каждой точке направленный по касательной к интегральной кривой рассматриваемой задачи. Обобщение данного подхода на системы обыкновенных дифференциальных (ОДУ) и дифференциально-алгебраических (ДАУ) уравнений было дано в работе [2]. Существенными преимуществами данного подхода является возможность построения решений сингулярных ОДУ, а также задач, интегральные кривые которых содержат критические или предельные точки [2].

В данной работе показано, что для некоторых практических задач наилучший параметр продолжения решения хотя и дает формально наименьшую погрешность, но вид

¹ Профессор кафедры «Дифференциальные уравнения», Московский авиационный институт (национальный исследовательский университет), г. Москва; kuznetsov@mai.ru.

² Аспирант кафедры «Дифференциальные уравнения», Московский авиационный институт (национальный исследовательский университет), г. Москва; powerandglory@yandex.ru.

параметризованных уравнений и их приближенные решения могут оказаться весьма сложными. Для решения данной задачи предложено вместо наилучшего параметра применять параметр близкий к нему по свойствам, но дающий более простой вид для параметризованной задачи. Будем рассматривать введение данного параметра на примере решения задачи об одноосном растяжении цилиндрических образцов из стали 45.

2. Постановка задачи

Для описания процесса деформирования металлических конструкций в условиях ползучести будем использовать уравнения теории структурных параметров Ю.Н. Работнова, которые в одномерном случае можно записать в виде системы двух ОДУ [3, 4, 5]

$$\begin{cases} \frac{d\epsilon}{dt} = \frac{f_1(\sigma, T)}{\Psi(\omega, T)}, \\ \frac{d\omega}{dt} = \frac{f_2(\sigma, T)}{\Psi(\omega, T)}, \end{cases} \quad (2.1)$$

где ϵ – деформация ползучести; ω – параметр поврежденности; σ – действующее напряжение; t – время; T – температура; функциональные зависимости, входящие в правые части, определяются по результатам эксперимента.

Для задачи одноосного растяжения цилиндрических образцов (диаметр $d = 42$ мм) из стали 45, широко используемой в авиации (например, для создания деталей трубопроводной арматуры после закалки и отпуска), при постоянных напряжении и температуре $T = 850^\circ\text{C}$ функцию $\Psi(\omega, T)$ примем в виде [4]

$$\Psi(\omega, T) = \omega^{-\alpha} (1 - \omega^{\alpha+1})^{-m}, \quad (2.2)$$

а функции $f_1(\sigma)$ и $f_2(\sigma)$ в форме степенной функции [4]

$$f_1(\sigma) = B_\epsilon \sigma^n, \quad f_2(\sigma) = B_\omega \sigma^k,$$

где B_ϵ , B_ω , n , k , α , m – характеристики ползучести материала.

Таким образом, в случае постоянного напряжения $\sigma = \sigma_0 = \text{const}$ получим систему ОДУ

$$\begin{cases} \frac{d\epsilon}{dt} = \frac{B_\epsilon \sigma_0^n}{\omega^\alpha (1 - \omega^{\alpha+1})^m}, \\ \frac{d\omega}{dt} = \frac{B_\omega \sigma_0^k}{\omega^\alpha (1 - \omega^{\alpha+1})^m}. \end{cases} \quad (2.3)$$

Отметим некоторые особенности системы (2.3). Искомыми функциями являются $\epsilon(t)$ и $\omega(t)$, σ_0 – начальное напряжение, постоянная величина. Решение задачи ищется в области $V = \{(\epsilon, \omega, t) \mid 0 \leq \epsilon \leq \epsilon^*, 0 \leq \omega \leq 1, 0 \leq t \leq t^*\}$, где ϵ^* – значение деформации ползучести в момент разрушения; t^* – длительная прочность конструкции, т. е. время, в течение которого образец не разрушится; при $\omega = 0$ материал считается абсолютно целым, а при достижении $\omega = 1$ наступает разрушение, понимаемое как разделение образца на две части. Можно видеть, что рассматриваемая система имеет две особые точки в которых правые части уравнений системы (2.3) обращаются в бесконечность. Это $\omega = 0$ в момент времени $t = 0$ и $\omega = 1$ в момент времени $t = t^*$.

В качестве начальных условий для системы ОДУ (2.3) берутся однородные

$$t = 0 : \omega(0) = 0, \epsilon(0) = 0. \quad (2.4)$$

Можно записать аналитическое решение задачи (2.3)-(2.4) [6]

$$\omega(t) = \left(1 - (1 - (\alpha + 1)(m + 1)B_\omega \sigma_0^k t)^{\frac{1}{m+1}} \right)^{\frac{1}{\alpha+1}}. \quad (2.5)$$

$$\epsilon(t) = \frac{B_\epsilon \sigma_0^n}{B_\omega \sigma_0^k} \left(1 - (1 - (\alpha + 1)(m + 1)B_\omega \sigma_0^k t)^{\frac{1}{m+1}} \right)^{\frac{1}{\alpha+1}}. \quad (2.6)$$

Учитывая, что при разрушении параметр поврежденности принимает значение равное единице, из выражения (2.5) получим значение длительной прочности t^* данной конструкции

$$t^* = [(m + 1)(\alpha + 1)B_\omega \sigma_0^k]^{-1}. \quad (2.7)$$

Полное решение задачи (2.3)-(2.4) в явном виде дается выражениями (2.5)-(2.7), что возможно лишь в исключительных случаях. На сегодняшний день основным инструментом анализа подобных задач остаются численные методы. Однако же, принимая во внимание особенности системы (2.3), в данном случае явные методы решения задачи Коши неприменимы, а неявные трудоемки в использовании. Для ослабления этих трудностей предлагается переход к новому аргументу. Рассмотрим применение метода продолжения решения по параметру и наилучшей параметризации к задаче растяжения образцов из стали 45.

3. Параметризация и продолжение решения по параметру

В качестве наилучшего для задачи (2.3)-(2.4) примем параметр, дифференциал которого удовлетворяет соотношению [2]

$$d\lambda = (\bar{\alpha}, d\bar{y}), \quad (3.1)$$

где $\bar{\alpha} = \left(\frac{d\epsilon}{d\lambda}, \frac{d\omega}{d\lambda}, \frac{dt}{d\lambda} \right)^T$ – вектор, определяющий направление отсчета параметра λ , $d\bar{y} = (d\epsilon, d\omega, dt)^T$.

Выражение (3.1) можно также записать в виде

$$(d\lambda)^2 = (d\epsilon)^2 + (d\omega)^2 + (dt)^2. \quad (3.2)$$

Используя соотношение (3.2), получим систему

$$\begin{cases} \frac{d\epsilon}{d\lambda} = \frac{B_\epsilon \sigma_0^n}{\sqrt{Q(\omega)}}, \\ \frac{d\omega}{d\lambda} = \frac{B_\omega \sigma_0^k}{\sqrt{Q(\omega)}}, \\ \frac{dt}{d\lambda} = \frac{\omega^\alpha (1 - \omega^{\alpha+1})^m}{\sqrt{Q(\omega)}}, \end{cases} \quad (3.3)$$

с начальными условиями

$$\lambda = 0 : \epsilon(0) = 0, \omega(0) = 0, t(0) = 0. \quad (3.4)$$

Функция $Q(\omega)$, входящая в знаменатели правых частей системы (3.3)

$$Q(\omega) = \omega^{2\alpha} (1 - \omega^{\alpha+1})^{2m} + B_\epsilon^2 \sigma_0^{2n} + B_\omega^2 \sigma_0^{2k}. \quad (3.5)$$

О п р е д е л е н и е 3.1. *Переход от задачи (2.3)-(2.4) к (3.3)-(3.4) будем называть λ -преобразованием.*

Задача (3.3)-(3.4) не имеет особенностей и может быть проинтегрирована с помощью любых методов решения задачи Коши.

Стоит отметить, что в некоторые моменты времени значение функции $Q(\omega)$ может оказаться близким к нулю (порядка 10^{-6}). И чем меньше характеристики ползучести, входящие в правые части уравнений системы, тем меньше знаменатели правых частей системы (3.3). Также можно видеть, что параметризованная задача имеет более сложный вид, нежели (2.3)-(2.4).

Чтобы устранить эту проблему, введем параметр μ , вектор $\bar{\alpha}'$ для которого получим, преобразуя вектор (3.1) к виду

$$\bar{\alpha}' = \left(\tilde{K}_1 \cdot \frac{d\epsilon}{d\lambda}, \tilde{K}_2 \cdot \frac{d\omega}{d\lambda}, \tilde{K}_3 \cdot \frac{dt}{d\lambda} \right)^T, \quad (3.6)$$

где $\tilde{K}_1, \tilde{K}_2, \tilde{K}_3$ – в общем случае функции, зависящие от ϵ, ω, t . Для сохранения одного направления движения для нового параметра μ и наилучшего параметра λ , введем ограничения

$$\tilde{K}_i \geq 0, \quad i = 1, 2, 3.$$

Домножая и деля каждую компоненту вектора (3.6) на $d\mu$, получим

$$\bar{\alpha}' = \left(\tilde{K}_1 \cdot \frac{d\mu}{d\lambda} \cdot \frac{d\epsilon}{d\mu}, \tilde{K}_2 \cdot \frac{d\mu}{d\lambda} \cdot \frac{d\omega}{d\mu}, \tilde{K}_3 \cdot \frac{d\mu}{d\lambda} \cdot \frac{dt}{d\mu} \right)^T.$$

Здесь $0 \leq \frac{d\mu}{d\lambda} < \infty$ – функция, зависящая от ϵ, ω, t .

Обозначая далее

$$K_i(\epsilon, \omega, t) = \tilde{K}_i \frac{d\mu}{d\lambda}, \quad i = 1, 2, 3,$$

запишем направляющий вектор в форме

$$\bar{\alpha}' = \left(K_1(\epsilon, \omega, t) \cdot \frac{d\epsilon}{d\mu}, K_2(\epsilon, \omega, t) \cdot \frac{d\omega}{d\mu}, K_3(\epsilon, \omega, t) \cdot \frac{dt}{d\mu} \right)^T.$$

Не ограничивая общности дальнейших рассуждений, примем

$$K_i(\epsilon, \omega, t) = \frac{1}{f_i^2(\epsilon, \omega, t)}, \quad i = 1, 2, 3$$

и окончательно получим

$$\bar{\alpha}' = \left(\frac{1}{f_1^2(\epsilon, \omega, t)} \cdot \frac{d\epsilon}{d\mu}, \frac{1}{f_2^2(\epsilon, \omega, t)} \cdot \frac{d\omega}{d\mu}, \frac{1}{f_3^2(\epsilon, \omega, t)} \cdot \frac{dt}{d\mu} \right)^T, \quad (3.7)$$

где $f_1(\epsilon, \omega, t), f_2(\epsilon, \omega, t), f_3(\epsilon, \omega, t)$ – произвольные функции.

Далее, параметр, определяемый вектором $\bar{\alpha}'$ (3.7) будем обозначать κ . В скалярном виде его можно представить как

$$(d\kappa)^2 = \left(\frac{d\epsilon}{f_1(\epsilon, \omega, t)} \right)^2 + \left(\frac{d\omega}{f_2(\epsilon, \omega, t)} \right)^2 + \left(\frac{dt}{f_3(\epsilon, \omega, t)} \right)^2. \quad (3.8)$$

Существенным недостатком при использовании параметра κ является то, что на сегодняшний день нет доказанных утверждений о его применимости. Неизвестно, будет ли система (3.14) обусловлена хуже, чем система (3.3). Однако для частного случая параметра κ

$$(d\kappa)^2 = (d\epsilon)^2 + (d\omega)^2 + \left(\frac{dt}{f(\epsilon, \omega, t)} \right)^2, \quad (3.9)$$

т. е. $f_1(\epsilon, \omega, t) = f_2(\epsilon, \omega, t) \equiv 1$ и $f_3(\epsilon, \omega, t) = f(\epsilon, \omega, t)$, можно доказать следующие две теоремы

Т е о р е м а 3.1. *Если в точке M_0 и некоторой ее окрестности функция $f(x_0, y_0, z_0) \neq 0$, то параметры λ и κ , задаваемые соотношениями (3.2) и (3.9), отличаются на бесконечно малую величину в окрестности точки M_0 , т. е.*

$$d\kappa = d\lambda + o(1). \quad (3.10)$$

О п р е д е л е н и е 3.2. *Параметры, удовлетворяющие соотношению (3.10) в окрестности каждой точки интегральной кривой, будем называть локально эквивалентными.*

Легко заметить, что при $f(x, y, z) \neq 0$ во всех точках рассматриваемого интервала изменения, параметры λ и κ являются локально эквивалентными в каждой точке рассматриваемого временного интервала. Относительно обусловленности задачи, полученной переходом к параметру κ , можно сказать, что она будет отличаться на бесконечно малую величину от соответствующей задачи, полученной λ -преобразованием.

Т е о р е м а 3.2. *Если в точке M_0 $f(x, y, z) = 0$, но частная производная $\frac{\partial f}{\partial z}$ отлична от нуля в ней и некоторой ее окрестности, то для параметров λ и κ , задаваемых соотношениями (3.2) и (3.9), в окрестности точки M_0 справедливо равенство*

$$\|d\bar{\lambda} - d\bar{\kappa}\|_2 = K, \quad (3.11)$$

$$\text{где } K = \left| c_1 \cdot \frac{\partial f}{\partial x} \Big|_{M_0} + c_2 \cdot \frac{\partial f}{\partial y} \Big|_{M_0} + \frac{\partial f}{\partial z} \Big|_{M_0} \right|^{-1}, \quad c_1 = \lim_{\rho \rightarrow 0} \frac{\Delta x}{\Delta z}, \quad c_2 = \lim_{\rho \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta z}, \quad 0 \leq c_1, c_2 < \infty,$$

$$\rho = \sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2 + (\Delta z)^2}.$$

Или в виде

$$d\kappa = d\lambda + O(1). \quad (3.12)$$

Используя результаты Теоремы 3.2 можно сформулировать следующее следствие

С л е д с т в и е 3.1. *Если в условиях Теоремы 3.2, если частные производные $\frac{\partial f}{\partial x}$ и $\frac{\partial f}{\partial y}$ обращаются в точке M_0 в ноль, то значение K в выражении (3.11) примет вид*

$$K = \left| \frac{\partial f}{\partial z} \Big|_{M_0} \right|^{-1}$$

и параметры λ и κ , задаваемые соотношениями (3.2) и (3.9), будут локально эквивалентными в окрестности точки M_0 тогда и только тогда, когда частная производная $\frac{\partial f}{\partial z}$ обращается в точке M_0 в бесконечность.

З а м е ч а н и е 3.1. Стоит отметить, что равенство нулю какой-либо из частных производных $\frac{\partial f}{\partial x}$ или $\frac{\partial f}{\partial y}$ в окрестности точки M_0 не свидетельствует о возникновении неопределенности вида $[0 \cdot \infty]$, но показывает, что слагаемое, соответствующее данной частной производной, отсутствует в выражении для K (3.11).

Полагая в выражении (3.9) $f(\epsilon, \omega, t) = \omega^\alpha (1 - \omega^{\alpha+1})^m$, получим параметр κ в виде

$$(d\kappa)^2 = (d\epsilon)^2 + (d\omega)^2 + \left(\frac{dt}{\omega^\alpha (1 - \omega^{\alpha+1})^m} \right)^2. \quad (3.13)$$

Используя выражение (3.13) для параметра продолжения, можно записать систему (2.3) в виде

$$\begin{cases} \frac{d\epsilon}{d\lambda} = \frac{B_\epsilon \sigma_0^n}{\sqrt{Q'}}, \\ \frac{d\omega}{d\lambda} = \frac{B_\omega \sigma_0^k}{\sqrt{Q'}}, \\ \frac{dt}{d\lambda} = \frac{\omega^\alpha (1 - \omega^{\alpha+1})^m}{\sqrt{Q'}}, \end{cases} \quad (3.14)$$

с начальными условиями

$$\kappa = 0 : \epsilon(0) = 0, \omega(0) = 0, t(0) = 0. \quad (3.15)$$

Знаменатель правых частей системы (3.14)

$$Q' = 1 + B_\epsilon^2 \sigma_0^{2n} + B_\omega^2 \sigma_0^{2k}. \quad (3.16)$$

О п р е д е л е н и е 3.3. Переход от задачи (2.3)-(2.4) к (3.14)-(3.15) будем называть κ -преобразованием.

Таким образом, знаменатели уравнений системы (3.14) не только не близки к нулю, но и больше единицы. Более того, система (3.14) имеет более простой вид, чем система (3.3), так как правые части первых двух уравнений системы (3.14) являются постоянными.

Используем результаты приведенных утверждений. Для задачи (3.14)-(3.15) функция $f(\epsilon, \omega, t) = \omega^\alpha (1 - \omega^{\alpha+1})^m$. Можно заметить, что она не зависит от ϵ и неявно зависит от времени t , т. е. $f(\epsilon, \omega, t) = f(\omega)$. Функция $f(\omega)$ не обращается в ноль ни в одной точке рассматриваемого временного интервала, кроме $\omega = 0$ при $t = 0$ и момента разрушения $\omega = 1$ при $t = t^*$. Таким образом, параметры (3.2) и (3.13) локально эквивалентны при $t \in (0, t^*)$, покажем, что они также локально эквивалентны и в граничных точках.

Очевидно, что производная по ϵ равна нулю, производная же по ω

$$\frac{df}{d\omega} = \omega^{\alpha-1} (1 - \omega^{\alpha+1})^{m-1} \cdot [\alpha (1 - \omega^{\alpha+1}) - m(\alpha + 1)\omega^{\alpha+1}]. \quad (3.17)$$

Можно видеть, что $\frac{df}{d\omega} = 0$ при $\omega = 0$ и $\omega = 1$.

Согласно условиям Следствия 3.1, для того, чтобы параметры (3.2) и (3.13) были локально эквивалентными в точках $t = 0$ и $t = t^*$ необходимо и достаточно равенство бесконечности производной по времени

$$\begin{aligned} \frac{df}{dt} &= \frac{df}{d\omega} \cdot \frac{d\omega}{dt} = \omega^{\alpha-1} (1 - \omega^{\alpha+1})^{m-1} \cdot [\alpha (1 - \omega^{\alpha+1}) - m(\alpha + 1)\omega^{\alpha+1}] \times \\ &\times \frac{B_\omega \sigma_0^k}{\omega^\alpha (1 - \omega^{\alpha+1})^m} = \frac{B_\omega \sigma_0^k \cdot [\alpha (1 - \omega^{\alpha+1}) - m(\alpha + 1)\omega^{\alpha+1}]}{\omega (1 - \omega^{\alpha+1})}. \end{aligned} \quad (3.18)$$

Данная производная при $t \rightarrow 0$ и $t \rightarrow t^*$ стремится к бесконечности. Таким образом, параметры λ и κ для данной задачи будут локально эквивалентными на всем рассматриваемом временном интервале, что говорит о близости обусловленности систем (3.3) и (3.14).

4. Численные результаты

Рассмотрим приближенное решение задач (2.3)-(2.4), (3.3)-(3.4) и (3.14)-(3.15). Поскольку численное решение непараметризованной задачи (2.3)-(2.4) затруднительно при помощи явных численных методов интегрирования, для решения данной задачи был выбран неявный метод Эйлера с переменным шагом интегрирования (получаемые системы нелинейных уравнений решаются методом простой итерации). Приближенное решение параметризованных задач (3.3)-(3.4) и (3.14)-(3.15) получено явным методом Эйлера и методом Рунге-Кутты четвертого порядка точности с переменным шагом интегрирования. Смена шага производится в соответствии с принципом Рунге-Ромберга-Ричардсона, с постоянными $\epsilon_1 = 10^{-4}$ и $\epsilon_2 = 5 \cdot 10^{-5}$, отражающими точность численного решения [7]. Данные методы были реализованы в вычислительной среде Matlab R2012b.

Расчет проводился на персональном компьютере Intel Core i5 – 2410M CPU 2,30 ГГц; 4,00 ГБ ОЗУ; видеокарта NVIDIA GeForce GT540M 2 ГБ; 64 – разрядная операционная система Windows 7 Домашняя базовая Service Pack 1.

Характеристики ползучести для систем уравнений (2.3) и (3.3) и имеют вид [4]: $B_\epsilon = 9,967 \cdot 10^{-20}$ МПа $^{-n}$ с $^{-1}$, $B_\omega = 9,689 \cdot 10^{-17}$ МПа $^{-k}$ с $^{-1}$, $\alpha = 0,849$, $n = 9,1$, $k = 6,97$, $m = 2,83$.

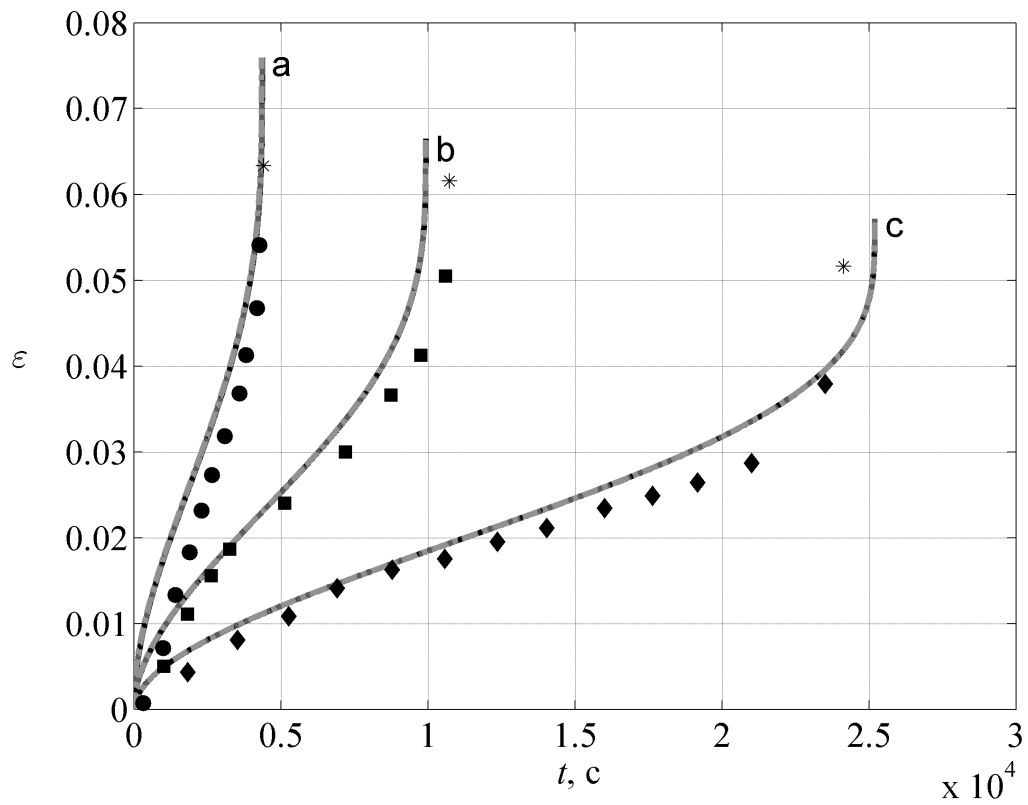
Получены зависимость деформации ползучести (рис. 1) и параметра поврежденности (рис. 2) от времени, где а – $\sigma_0 = 45$ МПа; б – $\sigma_0 = 40$ МПа; в – $\sigma_0 = 35$ МПа. На рис. 2, d – «единая кривая» в нормированных координатах $\omega - \bar{\tau}$, $\bar{\tau} = \frac{t}{t^*}$ – нормированное время.

Экспериментальные данные для $\sigma_0 = 45, 40, 35$ МПа обозначены кружками, квадратами и ромбами соответственно. Результаты эксперимента для деформации ползучести берутся из работы [4], данные для параметра поврежденности пересчитаны по формуле

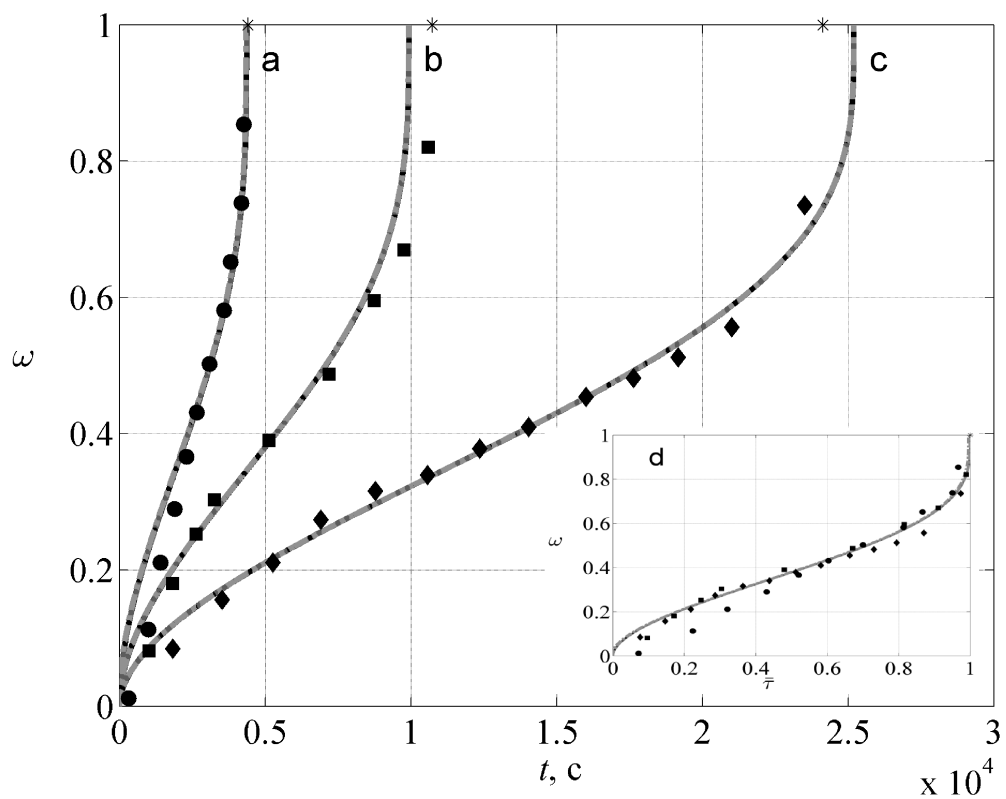
$$\omega = \frac{\epsilon}{\epsilon_*}. \quad (4.1)$$

Как можно видеть из рис. 1-2, аналитическое, а также приближенные решения задачи (2.3)-(2.4) неявным методом Эйлера и задачи (3.3)-(3.4) явным методом Рунге-Кутты четвертого порядка точности практически совпадают. На рисунках они обозначены сплошной, пунктирной и штрих-пунктирной линиями соответственно. Приближенные решения задачи (3.14)-(3.15) явными методами Эйлера, Рунге-Кутты четвертого порядка точности и задачи (3.3)-(3.4) явным методом Эйлера имеют вид аналогичный, приведенному на рис. 1-2.

Основные сведения о процессе вычисления приведены в табл. 1, где t^* – расчетное значение длительной прочности конструкции; $\bar{\tau}_*$ – расчетное значение времени в нормированных координатах $\omega - \bar{\tau}$ при разрушении; ϵ_* – расчетное значение деформации ползучести в момент разрушения; ω_* – расчетное значение параметра поврежденности в момент разрушения; t_n – время счета. Здесь и далее будем обозначать: 1 – явный метод Эйлера, λ -преобразование; 2 – метод Рунге-Кутты четвертого порядка точности, λ -преобразование; 3 – явный метод Эйлера, κ -преобразование; 4 – метод Рунге-Кутты четвертого порядка точности, κ -преобразование; 5 – неявный метод Эйлера, 6 – аналитическое решение, 7 – экспериментальные данные.



Р и с у н о к 4.1
Зависимость деформации ползучести от времени



Р и с у н о к 4.2
Зависимость параметра поврежденности от времени, единая кривая в нормированных координатах

Таблица 9: Результаты расчета образцов из стали 45 при растяжении

σ_0 , МПа	Метод	t_* , ч	$\bar{\tau}_*$	ϵ_*	ω_*	t_n , с
35	1	7,000494	1	0,057157	0,99997	0,086
	2	7,0004	0,99999	0,057157	0,99997	0,101
	3	7,000493	1	0,057156	0,99996	0,052
	4	7,000492	1	0,057146	0,9998	0,045
	5	6,99907	0,9998	0,057156	0,99996	0,159
	6	7,000492	1	0,057159	1	–
	7	6,706122	–	0,051606	1	–
40	1	2,7600999	1	0,066467	0,99999	0,092
	2	2,760061	0,99999	0,066453	0,99978	0,105
	3	2,7600994	1	0,066465	0,99996	0,06
	4	2,7600994	1	0,066439	0,9996	0,046
	5	2,756934	0,9989	0,066467	0,99998	0,171
	6	2,7600998	1	0,066477	1	–
	7	2,979592	–	0,061554	1	–
45	1	1,2144838	1	0,075927	0,99996	0,085
	2	1,214466	0,99999	0,075909	0,99972	0,103
	3	1,21448	1	0,075928	0,99997	0,055
	4	1,21448	1	0,075884	0,9994	0,041
	5	1,208119	0,99476	0,075926	0,99994	0,141
	6	1,2144836	1	0,075928	1	–
	7	1,22449	–	0,063327	1	–

5. Заключение

Численное решение рассматриваемой задачи, описываемой системой обыкновенных дифференциальных уравнений кинетической теории ползучести с однородными начальными условиями, затруднительно при помощи традиционных явных методов интегрирования задачи Коши в связи с наличием особенностей в начальный момент времени и при разрушении. В работе предложен подход к решению этой проблемы. Он основан на применении к исходной системе (3.3) метода продолжения решения по параметру, в качестве которого наряду с наилучшим аргументом λ предложено использовать локально эквивалентный ему параметр κ . В результате, для обоих параметров получили преобразованные задачи, которые особенностей не имеют и могут быть решены любым численным методом интегрирования задачи Коши.

Полученные параметризованные задачи (3.3)–(3.4) и (3.14)–(3.15) решались численно явными методами Эйлера и Рунге-Кутты четвертого порядка точности, непараметризованная задача (2.3)–(2.4) – неявным методом Эйлера. При сравнении решений этих задач с аналитическими и экспериментальными данными, можно указать следующие преимущества применения параметризации исходной задачи:

1. Численные решения хорошо согласуются с аналитическими и экспериментальными данными как для параметризованных, так и непараметризованной задач.
2. Время счета для параметризованных задач в 1,5 - 3 раза меньше, в зависимости от

используемого параметра продолжения и порядка точности используемого численного метода, по сравнению с непараметризованной задачей.

3. Применение параметра локально эквивалентного наилучшему аргументу λ позволяет преобразовать исходную задачу (2.3)–(2.4) к более простому для численного решения виду (3.14)–(3.15). Это позволяет сократить до 2 раз время счета по сравнению с λ -преобразованной задачей (3.3)–(3.4).

Приводимые результаты ярко иллюстрируют возможные преимущества подхода, основанного на переходе как к наилучшему аргументу, так и к локально эквивалентному ему. Отметим также, что использование неявных методов решения задачи Коши приводит к необходимости численного решения систем нелинейных уравнений, что сопряжено с известными трудностями, связанными как с выбором начального приближения и вопросами сходимости итерационных процессов, так и со сложностью реализации приближенных методов решения (приведение рассматриваемой задачи к специальному виду, аппроксимация производных и т. д.). В данной статье системы нелинейных уравнений в неявном методе Эйлера решаются методом простой итерации, однако, в общем случае, могут потребоваться более трудоемкие методы, требующие вычисления производных, например, метод Ньютона. Все это может привести к значительному усложнению процесса решения. Вышесказанное подчеркивает то преимущество, которое дает метод продолжения решения по параметру, позволяя применять явные методы интегрирования систем ОДУ к решению рассматриваемых задач.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского Фонда Фундаментальных Исследований, проект 13-08-00473.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Э.И. Григолюк, В.И. Шалашилин, *Проблемы нелинейного деформирования*, Наука, М., 1988, 232 с.
2. В.И. Шалашилин, Е.Б. Кузнецов, *Метод продолжения решения по параметру и наилучшая параметризация*, Эдиториал УРСС, М., 1999, 224 с.
3. Ю.Н. Работнов, *Ползучесть элементов конструкций*, Наука, М., 1966, 752 с.
4. Б.В. Горев, Т.Э. Захарова, И.Д. Клопотов, “К описанию процесса ползучести и разрушения материалов с немонотонным изменением деформационно-прочностных свойств”, *Физическая мезомеханика*, 5:2 (2002), 17–22.
5. B. V. Gorev, I. D. Klopotov, I. V. Lyubashevskaya, “Creep and damage behavior of AK4-1T and VT-9 alloys under different stress states”, *Theor. and Appl. Fract. Mech.*, 29 (1998), 1–10.
6. Б.В. Горев, *Высокотемпературная ползучесть конструкционных сплавов и ее приложение к формообразованию крупногабаритных деталей*, дисс. . . . докт. техн. наук, Новосибирск, 2003, 426 с.
7. О. Б. Арушанян, С.Ф. Залеткин, *Численное решение обыкновенных дифференциальных уравнений на Фортране*, Изд-во МГУ, М., 1990, 336 с.

On modification of the best parameter of solution continuation

© E. B. Kuznetsov³, S. S. Leonov⁴

Abstract. In this paper the concept of a local equivalent to the best solution continuation parameter is introduced. A number of particular assertions related to the parameterized problem conditionality is given. As the best parameter is denote a parameter, that at each point tangential to the integral curve of the problem. Application of the best and local equivalent argument transform to the uniaxial tension problem of cylindrical steel 45 specimens at a constant temperature under creep conditions is shown. A comparison of the results is considered.

Key Words: creep, fracture, long-term strength systems of ordinary differential equations, solution continuation with respect to a parameter, the best parametrization. A comparison of the results is considered.

³ Professor of «Differential Equations» Department, Moscow State Institute (National Research University), Moscow; kuznetsov@mai.ru.

⁴ Graduate student of «Differential Equations» Department, Moscow State Institute (National Research University), Moscow; powerandglory@yandex.ru.