УДК 517.9

Непрерывные потоки Морса-Смейла на проективно-подобных многообразиях

© Е. В. Жужома[1], В. С. Медведев[2], Н. А. Тарасова[3]

Аннотация. В статье изучается топологическая структура несущих многообразий для потоков Морса-Смейла, неблуждающее множество которых состоит ровно из трех состояний равновесия.

Ключевые слова: Поток Морса-Смейла, неблуждающее множество, проективно-подобное многообразие

Пусть f^t – непрерывный поток на замкнутом n-мерном топологическом многообразии M^n, $n \geq 2$. Это означает, что для любого $t \in \mathbb{R}$ задан гомеоморфизм $f_t : M^n \to M^n$ так, что $f_0 = id$ есть тождественное отображение и $f_{t_1+t_2} = f_{t_1} \circ f_{t_2}$ для любых t_1, $t_2 \in \mathbb{R}$. Напомним, что точка $x \in M^n$ называется *неблуждающей*, если для любой ее окрестности $U(x) = U$ и числа $T > 0$ найдется $t_0 \geq T$ такое, что $U(x) \cap f_{t_0}(U) \neq \emptyset$. Множество неблуждающих точек образует неблуждающее множество потока, которое обозначается через $NW(f^t)$. Известно, что $NW(f^t)$ состоит из целых траекторий, то есть является инвариантным множеством потока [1], [2].

В связи с открытием в середине прошлого века топологических многообразий, которые не допускают гладкой структуры (см., например [3]), такие проблемы, как исследование топологической структуры несущего многообразия и топологическая классификация должны рассматриваться не только для гладких потоков на гладких многообразиях, но и для непрерывных потоков на топологических многообразиях. Особый интерес представляют непрерывные потоки, у которых неблуждающие множества аналогичны неблуждающим множествам гладких потоков с гиперболической структурой, поскольку последние обладают определенным типом устойчивости [4]. Простейшими потоками с такими неблуждающими множествами являются потоки Морса-Смейла, введенные Смейлом [5] (см. также [4], [6] с историческими комментариями). Будем называть f^t (непрерывным) *потоком Морса-Смейла*, если выполняются следующие условия:

1) Неблуждающее множество $NW(f^t)$ состоит из конечного набора состояний равновесия и периодических траекторий, причем α- и ω-предельные множества любой траектории лежат в $NW(f^t)$.

2) В окрестности каждой траектории из $NW(f^t)$ поток локально топологически эквивалентен потоку либо с гиперболической периодической траекторией, либо с гиперболическим состоянием равновесия. Как следствие, для каждой траектории $l \subset NW(f^t)$ определяются (и существуют) устойчивое и неустойчивое многообразия $W^s(l)$, $W^u(l)$ соответственно, которые являются топологически вложенными подмногообразиями:

$$W^s(l) = \{x \in M^n \mid f_t(x) \to l\}, \quad W^u(l) = \{x \in M^n \mid f_{-t}(x) \to l\}, \quad t \to \infty.$$

3) Для любых траекторий l_1, $l_2 \subset NW(f^t)$ многообразия $W^s(l_1)$, $W^u(l_2)$ топологически трансверсальны (это означает, что в окрестности любой точки из $W^s(l_1) \cap W^u(l_2)$

[1] Профессор кафедры фундаментальной математики НИУ ВШЭ, Нижний Новгород; zhuzhoma@mail.ru

[2] Старший научный сотрудник НИИ ПМК ННГУ им. Лобачевского, Нижний Новгород; medvedev@unn.ac.ru

[3] Доцент кафедры математических и естественнонаучных дисциплин, Нижегородский государственный инженерно-экономический университет, Княгинино; tarasova-na-an@rambler.ru

пересечение многообразий $W^s(l_1)$, $W^u(l_2)$ локально гомеоморфно трансверсальному пересечению гиперплоскостей в n-мерном евклидовом пространстве $\mathbb{R}^n$).

Из неравенств Морса, которые справедливы для непрерывных потоков Морса-Смейла, вытекает, что любой поток Морса-Смейла на замкнутом многообразии имеет хотя бы одну притягивающую и хотя бы одну отталкивающую траектории [5]. Из связности несущего многообразия M^n (ниже мы всегда будем считать это многообразие связным, если не оговорено противное) вытекает, что если поток имеет ровно один устойчивый и ровно один неустойчивый узлы, то M^n является n-мерной сферой и поток топологически эквивалентен стандартному потоку типа "север-юг".

В настоящей работе рассматриваются непрерывные потоки Морса-Смейла, неблуждающее множество которых состоит ровно из трех состояний равновесия. Мы изучаем топологическую структуру несущих многообразий.

Нетрудно показать, что если двумерное замкнутое многообразие M^2 допускает поток Морса-Смейла, неблуждающее множество которого состоит из трех точек, то M^2 является проективной плоскостью, и любые два потока Морса-Смейла с тремя критическими точками на проективной плоскости топологически эквивалентны. Этот результат мотивирует введение специального класса многообразий. Пусть M^n – топологическое замкнутое n-мерное многообразие, $n \geq 2$. Напомним, что топологически вложенная в M^n k-мерная сфера S^k, $1 \leq k \leq n-1$, называется *локально плоско вложенной*, если для любой точки $z \in S^k$ существует окрестность $U(z) = U \subset M^n$ и гомеоморфизм $\varphi_z : U \to \mathbb{R}^n$ такие, что $\varphi_z(S^k \cap U) = \mathbb{R}^k \subset \mathbb{R}^n$. Многообразие M^n называется *проективно-подобным*, если

1. $n \in \{2, 4, 8, 16\}$;

2. M^n есть дизъюнктивное объединение[4] $\frac{n}{2}$-мерной сферы $S^{\frac{n}{2}}$, локально плоско вложенной в M^n, и открытого n-мерного шара B^n,
$$M^n = S^{\frac{n}{2}} \cup B^n, \quad S^{\frac{n}{2}} \cap B^n = \emptyset.$$

Сфера $S^{\frac{n}{2}}$ из вышеприведенного определения называется *образующей* для данного проективно-подобного многообразия. Основной результат настоящей работы относится к описанию топологической структуры несущего многообразия.

Теорема 1.1. *Пусть f^t – непрерывный поток Морса-Смейла, неблуждающее множество которого состоит из трех состояний равновесия, на замкнутом n-мерном топологическом многообразии M^n, $n \geq 2$. Тогда M^n является проективно-подобным многообразием. При этом, M^2 является проективной плоскостью $M^2 = \mathbb{P}^2$ (неориентируемой поверхностью рода единица с фундаментальной группой $\pi_1(M^2) = \mathbb{Z}_2$), а при $n \geq 4$*
$$\pi_1(M^n) = \cdots = \pi_{\frac{n}{2}-1}(M^n) = 0, \quad \text{и следовательно,} \quad M^n \quad \text{ориентируемое.}$$
Более того, на каждом проективно-подобном многообразии существует непрерывный поток Морса-Смейла, неблуждающее множество которого состоит из трех состояний равновесия.

Отметим результаты, имеющие отношение к рассматриваемой тематике. В 1962 году Иллс и Куипер [7] описали замкнутые многообразия (в топологической, кусочно линейной и гладкой категориях), допускающие непрерывные функции Морса с тремя критическими

[4] Объединение называется дизъюнктивным, если объединяемые множества попарно не пересекаются.

точками. Они доказали, что многообразия, допускающие такие функции Морса являются проективно-подобными (в [7] не использовалось понятие проективно-подобного многообразия, и мы интерпретируем результат работы [7] в введенных нами терминах). Однако, в топологической категории доказательство теоремы 1.1. не сводится непосредственно к основному результату работы [7], поскольку неясно можно ли непрерывный поток Морса-Смейла представить в виде градиентного потока относительно некоторой функции Морса. Кроме этого, для потоков даже в гладкой категории имеется априорная возможность дикого вложения замыканий сепаратрис седловых состояний равновесия (поэтому неясно можно ли представить несущее многообразие в виде локально плоско вложенной сферы и шара). Возможность дикого вложения топологического замыкания сепаратрис седловых периодических точек была открыта Пикстоном [8] для диффеоморфизмов Морса-Смейла трехмерной сферы. При решении проблемы классификации возможность дикого вложения была также независимо открыта Бонатти и Гринесом [9]. Для потоков Морса-Смейла нетрудно показать, что при $n = 2, 3$ замыкания сепаратрис всегда локально плоско вложены [10]. Что касается размерности $n \geq 4$ несущего многообразия, то в [11], [12] авторы показали, что для любого $n \geq 4$ существуют замкнутое многообразие M^n и градиентный полярный поток Морса-Смейла f^t на M^n такие, что f^t не имеет гетероклинических пересечений, неблуждающее множество f^t состоит из четырех неподвижных точек, и замыкание одной из сепаратрис потока f^t является дико вложенной сферой коразмерности два.

Следующее утверждение нам понадобится в доказательстве двух лемм. Поэтому мы сформулируем его для ссылок в виде предложения.

Предложение 1.1. *Пусть замкнутое n-мерное топологическое многообразие M^n, $n \geq 2$, является дизъюнктивным объединением локально плоско вложенной в M^n k-мерной сферы S^k, $1 \leq k \leq n-1$, и открытого n-мерного шара B^n, и пусть S^k обладает открытой трубчатой окрестностью $T(S^k)$ такой, что ее граница $\partial T(S^k)$ является плоско вложенным подмногообразием коразмерности один, причем окрестность $T(S^k)$ есть пространство локально тривиального расслоения $\pi : T(S^k) \to S^k$ над базой S^k и слоем, являющимся открытым $(n-k)$-диском D^{n-k}. Тогда существует плоско вложенная в M^n $(n-1)$-мерная сфера $\Sigma_T^{n-1} \subset T(S^k)$ такая, что 1) $S^k \cap \Sigma_T^{n-1} = \emptyset$; 2) сфера Σ_T^{n-1} ограничивает в M^n n-мерный шар b^n, содержащий $\partial T(S^k)$.*

Доказательство. Пусть Σ^{n-1} – плоско вложенная в M^n $(n-1)$-мерная сфера, окружающая n-шар b_0^n с точкой x_0 внутри и трансверсальная (в топологическом смысле) траекториям потока f_0^t. Из свойств этого потока и равенства $M^n = S^k \cup B^n$ вытекает, что для достаточно большого сдвига f_0^T на время T сферы Σ^{n-1} вдоль траекторий потока f_0^t множество $\Sigma_T^{n-1} = f_0^T(\Sigma^{n-1})$ является $(n-1)$-мерной сферой, принадлежащей $T(S^k)$. Из непрерывности потока f_0^t вытекает, что Σ_T^{n-1} плоско вложена в M^n. Граница $\partial T(S^k)$ является компактным подмножеством открытого шара B^n. Поскольку при увеличении времени траектории потока f_0^t стремятся к виртуальной границе шара B^n, то для достаточно большого T множество $\partial T(S^k)$ окажется внутри шара $b^n = f_0^T(b_0^n)$.
Доказательство закончено.

Ключевым результатом для доказательства теоремы 1.1. является следующее утверждение, имеющее самостоятельный интерес (достаточное условие для топологического многообразия быть проективно-подобным).

Лемма 1.1. *Пусть замкнутое n-мерное топологическое многообразие M^n, $n \geq 2$, является дизъюнктивным объединением локально плоско вложенной в M^n k-мерной сферы S^k, $1 \leq k \leq n-1$, и открытого n-мерного шара B^n. Тогда M^n есть* *проективно-подобное многообразие, то есть* $k = \frac{n}{2}$, *и* $S^k = S^{\frac{n}{2}}$ *является образующей сферой для* M^n *(при этом,* M^2 *является проективной плоскостью). Более того, граница трубчатой окрестности сферы* $S^{\frac{n}{2}}$ *гомеоморфна* $(n-1)$*-мерной сфере.*

Доказательство. Имеем $M^n = S^k \cup B^n$, $S^k \cap B^n = \emptyset$, $1 \le k \le n-1$, $n \ge 2$. Поскольку для $n = 2$ образующая окружность многообразия M^2 не может разбивать M^2, то ее трубчатая окрестность гомеоморфна листу Мебиуса. Поэтому M^2 является проективной плоскостью, $M^2 = \mathbb{P}^2$.

Далее мы будем предполагать $n \ge 3$. Из плоской вложимости $S^k \subset M^n$ вытекает, что S^k обладает открытой трубчатой окрестностью $T(S^k)$ такой, что ее граница $\partial T(S^k)$ является плоско вложенным подмногообразием коразмерности один, причем окрестность $T(S^k)$ есть пространство локально тривиального расслоения $\pi : T(S^k) \to S^k$ над базой S^k и слоем, являющимся открытым $(n-k)$-диском D^{n-k} [13]. Удобно считать D^{n-k} единичным диском так, что граница каждого слоя $\partial D^{n-k}_x = S^{n-k-1}_x$, где $x \in S^k$, $D^{n-k}_x = \pi^{-1}(x)$, принадлежит границе $\partial T(S^k)$ трубчатой окрестности $T(S^k)$.

Построим на B^n и $clos\, T(S^k) = T(S^k) \cup \partial T(S^k)$, вообще говоря, несвязанные друг с другом потоки f^t_0 и f^t_1 соответственно. Возьмем произвольную точку $x_0 \in B^n$, не принадлежащую $clos\, T(S^k)$. Так как B^n – шар, то на B^n существует непрерывный поток f^t_0 такой, что x_0 является неустойчивым узлом, а все остальные траектории покидают любую компактную часть шара B^n и потом в нее не возвращаются (траектории при увеличении времени стремятся к виртуальной границе шара B^n). За основу для построения потока f^t_1 возьмем поток на замкнутом диске $clos\, D^{n-k}$, у которого центр является устойчивым узлом, граница состоит из точек покоя, а остальные одномерные траектории по радиусам движутся от границы к центру. Поскольку $T(S^k)$ является локально тривиальным расслоением со слоем D^{n-k} и центр диска D^{n-k} отождествляется в этом расслоении с S^k, то на $clos\, T(S^k)$ существует поток f^t_1 такой, что множества $\partial T(S^k)$, S^k состоят из точек покоя, а остальные (одномерные) траектории движутся от $\partial T(S^k)$ к S^k при увеличении времени.

Пересечение $T(S^k) \cap f^T_0(b^n_0)$ есть открытое множество, граница которого содержит $\partial T(S^k)$. Поскольку $\partial T(S^k)$ суть подмногообразие коразмерности один, то у $\partial T(S^k)$ в множестве $clos\, \left(T(S^k) \cap f^T_0(b^n_0)\right)$ есть полуокрестность $\mathfrak{U} \subset \left(T(S^k) \cup \partial T(S^k)\right) \cap f^T_0(b^n_0)$ гомеоморфная $(0;1] \times \partial T(S^k)$. Возьмем открытое подмножество $int\, \mathfrak{U} \subset \mathfrak{U}$ гомеоморфное $(0;1) \times \partial T(S^k)$. Из свойств гомотопических групп вытекают следующие равенства

$$\pi_i(int\, \mathfrak{U}) = \pi_i\left((0;1) \times \partial T(S^k)\right) = \pi_i\left(\partial T(S^k)\right), \quad i = 0, \dots, n-2. \tag{1.1}$$

Множество $A_0 = B^n \setminus clos\, f^T_0(b^n_0)$ является открытым n-мерным кольцом, гомеоморфным $(0;1) \times \mathbb{S}^{n-1}$. Поэтому его гомотопические группы равны $\pi_i(A_0) = 0$ для всех $i = 0, \dots, n-2$. Рассмотрим представитель $\gamma : \mathbb{S}^i \to int\, \mathfrak{U}$ группы $\pi_i(int\, \mathfrak{U})$, где $\mathbb{S}^i$ – i-мерная (каноническая) сфера. Так как $\gamma(\mathbb{S}^i) \cap \partial T(S^k) = \emptyset$, то существует достаточно большой сдвиг f^R_1 вдоль траекторий потока f^t_1 такой, что $f^R_1(\gamma(\mathbb{S}^i)) \subset A_0$. Отсюда и (1.1) следует, что $\pi_i(\partial T(S^k)) = 0$ для всех $i = 0, \dots, n-2$. Из справедливости гипотезы Пуанкаре вытекает, что $\partial T(S^k)$ гомеоморфна $(n-1)$-мерной сфере [14], [15], [16], [17], [18]. Отсюда следует нетривиальность расслоения $\pi : T(S^k) \to S^k$. Более того, локально тривиальное расслоение $\pi : T(S^k) \to S^k$ индуцирует локально тривиальное расслоение $\partial T(S^k) \to S^k$, то есть расслоение $(n-1)$-мерной сферы S^{n-1} с базой S^k и слоем $S^{n-k-1} = \partial D^{n-k}$. Известно [19] (см. также [20]), что имеются только следующие такие расслоения

$$S^3 \to S^2, \text{ слой } S^1; \qquad S^7 \to S^4, \text{ слой } S^3; \qquad S^{15} \to S^8, \text{ слой } S^7.$$

Нетрудно видеть, что этим расслоениям соответствуют следующие пары (n, k): $(4, 2)$, $(8, 4)$, $(16, 8)$. Это завершает доказательство леммы.
Доказательство закончено.

Следующая лемма дает достаточное условие гомеоморфности проективно-подобных многообразий.

Лемма 1.2. *Пусть M_1^n, M_2^n – проективно-подобные многообразия, и S_1, S_2 – их образующие сферы соответственно. Тогда если S_1, S_2 локально эквивалентно вложены, то M_1^n, M_2^n гомеоморфны.*

Доказательство. Множество $O_i = M_i^n \setminus S_i$ гомеоморфно открытому n-шару, $i = 1, 2$. По условию леммы, для некоторых окрестностей $U(S_1)$, $U(S_2)$ сфер S_1, S_2 соответственно существует гомеоморфизм $\varphi_0 : U(S_1) \to U(S_2)$, $\varphi_0(S_1) = S_2$. Перейдя, если необходимо, к меньшей окрестности, можно считать окрестность $U(S_1)$ трубчатой. В силу предложения 1.1., существует $(n-1)$-сфера $S^{n-1} \subset U(S_1)$, $S^{n-1} \cap S_1 = \emptyset$, плоско вложенная в M_1^n. Покажем, что существует гомеоморфизм $\varphi : M_1^n \to M_2^n$, совпадающий с φ_0 в некоторой окрестности сферы S_1.

Так как $M_1^n = S_1 \cup O_1$, то $S^{n-1} \subset O_1$, поскольку $S^{n-1} \cap S_1 = \emptyset$. Так как сфера S^{n-1} плоско вложена, и O_1 гомеоморфно n-шару, то S^{n-1} ограничивает в O_1 n-шар τ_1^n, $\tau_1^n \cap S_1 = \emptyset$. Согласно предложению 1.1., мы можем считать, что граница $\partial U(S_1)$ трубчатой окрестности $U(S_1)$ лежит в шаре τ_1^n.

Поскольку $S^{n-1} \subset U(S_1)$ и $\partial U(S_1) \subset \tau_1^n$, то $M_1^n = U(S_1) \cup \tau_1^n$. Более того, множество $M_1^n \setminus \tau_1^n$ принадлежит $U(S_1)$. Из того, что φ_0 – гомеоморфизм вытекает, что $(n-1)$-сфера $\varphi_0(S^{n-1})$ плоско вложена в M_2^n, и $\varphi_0(S^{n-1}) \cap S_2 = \emptyset$, так как $\varphi_0(S_1) = S_2$. Поэтому $\varphi_0(S^{n-1})$ ограничивает в M_2^n n-шар τ_2^n, такой, что $\tau_2^n \cap S_2 = \emptyset$ (здесь мы учитываем равенство $M_2^n = S_2 \cup O_2$). Далее, из того, что S^{n-1} ограничивает в O_1 n-шар τ_1^n вытекает, что ограничение $\varphi_0|_{S^{n-1}} : S^{n-1} \to \phi_0(S^{n-1})$ продолжается до некоторого гомеоморфизма $\tau_1^n \to \tau_2^n$, который образует совместно с $\varphi_0|_{M_1^n \setminus \tau_1^n}$ требуемый гомеоморфизм $\varphi : M_1^n \to M_2^n$.
Доказательство закончено.

***Доказательство теоремы 1.1.*.** Поток Морса-Смейла f^t необходимо имеет устойчивый сток ω и неустойчивый источник α. Из связности несущего многообразия M^n вытекает, что третье состояние равновесия является седлом σ с k-мерным ($1 \le k \le n-1$) устойчивым $W^s(\sigma)$ и $(n-k)$-мерным неустойчивым многообразием $W^u(\sigma)$. Множество $Sep^\tau(\sigma) = W^\tau(\sigma) \setminus \{\sigma\}$ называется сепаратрисой (τ либо s, либо u). Если $Sep^\tau(\sigma)$ не пересекается с сепаратрисами других седел, то $Sep^\tau(\sigma)$ принадлежит неустойчивому (если $\tau = s$) или устойчивому (если $\tau = u$) многообразию некоторого стока (соответственно, источника), скажем N. Тогда топологическое замыкание сепаратрисы $Sep^\tau(\sigma)$ равно $W^\tau(\sigma) \cup \{N\}$, и является топологически вложенной в M^n сферой (k-сферой или $(n-k)$-сферой соответственно) [21], [22], [23]. Поскольку сепаратрисы одного седла у потока f^t Морса-Смейла не пересекаются, то топологическое замыкание неустойчивой сепаратрисы $Sep^u(\sigma)$ является топологически вложенной k-сферой $W^u(\sigma) \cup \{\omega\} = S_\omega$, а топологическое замыкание устойчивой сепаратрисы $Sep^s(\sigma)$ является топологически вложенной $(n-k)$-сферой $W^s(\sigma) \cup \{\alpha\} = S_\alpha$. Иногда, чтобы подчеркнуть, что речь идет о сепаратрисе седла потока f^t мы будем обозначать сепаратрису через $Sep^\tau(\sigma, f^t)$. Нам нужно показать, что хотя бы одна из сфер S_ω, S_α локально плоско вложена. Поскольку для размерности $n = 4$ обозначения и конструкция доказательства нам понадобится при рассмотрении топологической эквивалентности, то мы сформулируем утверждение в виде предложения. Далее будут использованы введенные выше обозначения.

П р е д л о ж е н и е 1.2. *Хотя бы одна из сфер S_ω, S_α локально плоско вложена.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Отметим, что из определения потока Морса-Смейла вытекает, что инвариантные многообразия седел являются локально плоско вложенными подмногообразиями. Поэтому единственной точкой дикого вложения сферы S_ω (соотв. сферы S_α) может быть только точка ω (соотв. α).

Для $n = 2$ сферы S_ω, S_α являются окружностями. Известно, что топологически вложенная окружность плоско вложена [24], [25].

Из работы [26] вытекает, что на трехмерных замкнутых многообразиях не существуют потоков Морса-Смейла с тремя состояниями равновесия (на самом деле в [26] доказан более сильный результат для систем Морса-Смейла, но нам достаточно частного случая).

При $n \geq 5$ одна из сфер S_ω или S_α, скажем S_ω, имеет коразмерность не менее трех. Тогда из [27] следует, что S_ω локально плоско вложена.

Осталось рассмотреть случай $n = 4$. Если одна из сфер S_ω, S_α трехмерная, то известно, что она не может быть дико вложенной только в одной точке [28] (см. также [27], [29]). Поэтому далее будем считать, что обе сферы S_ω, S_α двумерные (для сфер коразмерности два имеется априорная возможность быть дико вложенной ровно в одной точке, см. [30]).

Сперва рассмотрим в евклидовом пространстве $\mathbb{R}^4$ с координатами $(x_1, \ldots, x_4)$, векторное поле $\vec{V}_s$, которое задается системой дифференциальных уравнений

$$\dot{x}_1 = -x_1,\ \dot{x}_2 = -x_2, \quad \dot{x}_3 = x_3,\ \dot{x}_4 = x_4. \tag{1.2}$$

Ясно, что начало координат $O = (0, \ldots, 0)$ является седлом поля $\vec{V}_s$ с 2-мерной устойчивой сепаратрисой $W^s(O)$ и 2-мерной неустойчивой сепаратрисой $W^u(O)$, где $W^s(O) = \{(x_1, \ldots, x_4) \mid x_3 = 0, x_4 = 0\} \subset \mathbb{R}^4$, $W^u(O) = \{(x_1, \ldots, x_4) \mid x_1 = 0, x_2 = 0\} \subset \mathbb{R}^4$. Нетрудно видеть, что функция $F(x_1, \ldots, x_4) = \sum_{i=1}^{2} x_i^2 \sum_{j=3}^{4} x_j^2$ является интегралом системы (1.2) (см. детали в [11]). Из вида F следует, что гиперповерхность $F = 1$ является 3-мерным многообразием, которое разбивает $\mathbb{R}^4$ на два открытых множества

$$\{\vec{x} = (x_1, \ldots, x_4) \mid F(\vec{x}) < 1\} \stackrel{\mathrm{def}}{=} U_0, \quad \{\vec{x} = (x_1, \ldots, x_4) \mid F(\vec{x}) > 1\} \stackrel{\mathrm{def}}{=} U_\infty.$$

Объединение $W^s(O) \cup W^u(O)$ определяется равенством $F = 0$. Поскольку $O \in W^s(O) \cup W^u(O)$, то $O \in U_0$. Таким образом, U_0 - инвариантная окрестность седла O, которую мы будем называть *специальной*. Отметим, что множества

$$P_1 = \{(x_1, \ldots, x_4) \mid x_1^2 + x_2^2 \leq 1,\ x_3^2 + x_4^2 = 1\}, \quad P_2 = \{(x_1, \ldots, x_4) \mid x_1^2 + x_2^2 = 1,\ x_3^2 + x_4^2 \leq 1\}$$

являются полноториями с общей границей $\partial P_1 = \partial P_2 = P_1 \cap P_2$, которая представляет собой двумерный тор.

Окружим сток ω и источник α потока f^t четырехмерными шарами B_1, B_2 соответственно такими, что их границы $\partial B_1 = S_1^3$, $\partial B_2 = S_2^3$ трансверсальны потоку, а седло σ принадлежит $M^4 \setminus (B_1 \cup B_2)$. Тогда сепаратрисы $Sep^u(\sigma)$, $Sep^s(\sigma)$ пересекают S_1^3, S_2^3 по замкнутым простым кривым C_1, C_2 соответственно. Отметим, что поток индуцирует отображения последования Пуанкаре

$$\xi : \left(S_2^3 \setminus C_2\right) \to \left(S_1^3 \setminus C_1\right),$$

и ниже будет показано, что 3-сфера S_1^3 получается из 3-сферы S_2^3 в результате перестройки S_2^3 по узлу C_2 с помощью отображения, которое индуцирует ξ на границе трубчатой окрестности узла C_2.

Докажем, что каждая кривая C_1, C_2 является тривиальным узлом соответственно в S_1^3 и S_2^3. Эти кривые на инвариантных многообразиях $W^s(\sigma)$, $W^u(\sigma)$ ограничивают замкнутые двумерные диски D_1, D_2 соответственно. Так как сферы S_1^3, S_2^3 трансверсальны векторному полю, то седло σ лежит внутри каждого диска D_1, D_2. Из того, что в потоках Морса-Смейла отсутствуют петли сепаратрис следует, что D_1, D_2 пересекаются ровно в одной точке $\sigma = D_1 \cap D_2$.

Предположим противное, и рассмотрим для определенности случай, когда кривая C_1 образует нетривиальный узел в S_1^3 (случай, когда C_2 образует нетривиальный узел в S_2^3 рассматривается аналогично). Согласно расширенной версии теоремы Гробмана-Хартмана, существует окрестность U множества $D_1 \cup D_2$, в которой поток топологически эквивалентен линейному потоку, определяемому линейной частью векторного поля $\vec{V}$ в точке σ. В силу предложения 2.15 [31], линейные гиперболические векторные поля топологически сопряжены тогда и только тогда, когда они имеют одинаковый тип состояния равновесия. Поэтому поле $\vec{V}$ в U топологически сопряжено векторному полю $\vec{V}_s$, которое определяется системой дифференциальных уравнений (1.2). В частности, U гомеоморфна достаточно большой части специальной окрестности U_0, содержащей седло O. Не уменьшая общности, можно считать, что U гомеоморфна окрестности $W_0 \subset U_0$. Из классических теорем теории дифференциальных уравнений следует, что ξ - гомеоморфизм. Таким образом, C_1 и C_2 - два узла с гомеоморфными дополнениями. В силу [32], нетривиальность узла C_1 влечет нетривиальность узла C_2.

Рассмотрим полноторий $P_1 \subset U \cap S_1^3$, являющийся трубчатой окрестностью кривой C_1 в S_1^3. Поскольку C_1 - гладкая кривая, то такая окрестность существует. Из эквивалентности поля $\vec{V}$ в окрестности U с полем $\vec{V}_s$ вытекает, что $\xi(P_1 - C_1)$ совместно с C_2 образуют трубчатую окрестность (обозначим ее через P_2) кривой C_2. Уменьшив, если необходимо, полнотории P_1 и P_2, можно считать, что P_1, P_2 принадлежат границе окрестности U. Поскольку U гомеоморфна окрестности $W_0 \subset U_0$, то границы полноторий P_1, P_2 соединены отрезками траекторий векторного поля $\vec{V}$, причем ограничение $\xi|\partial P_1 : \partial P_1 \to \partial P_2$ переводит меридиан полнотория P_1 в параллель полнотория P_2, а параллель P_1 - в меридиан P_2.

Покажем, что сфера S_2^3 гомеоморфна многообразию, которое получается после перестройки сферы S_1^3 вдоль узла C_1. Действительно, удалим из S_1^3 полноторий P_1 и вклеим вместо него полноторий P_2 с помощью гомеоморфизма $\xi|\partial P_1 : \partial P_1 \to \partial P_2$. Поскольку приклеивающий гомеоморфизм $\xi|\partial P_1$ является продолжением гомеоморфизма $\xi|S_1^3 \setminus P_1 : S_1^3 \setminus P_1 \to S_2^3 \setminus P_2$, то отображение $\xi_* : (S_1^3 \setminus P_1) \cup_\xi P_2 \to S_2^3$, которое совпадает с ξ на $S_1^3 \setminus P_1$ и суть тождественное на P_2, является корректно определенным гомеоморфизмом. Таким образом, сфера S_2^3 получается в результате перестройки сферы S_1^3 вдоль узла C_1 с помощью нетривиального гомеоморфизма $\xi|\partial P_1 : \partial P_1 \to \partial P_2$. Так как C_1 - нетривиальный узел, то в результате такой перестройки всегда получается многообразие, отличное от 3-сферы [32] (см. также [33]). Полученное противоречие доказывает предложение.

Доказательство закончено.

Таким образом, M^n является дизъюнктивным объединением локально плоско вложенной в M^n k-мерной сферы $S^k = S_\omega$, $1 \le k \le n-1$, и неустойчивого многообразия $W^u(\alpha)$ источника α, которое гомеоморфно открытому n-мерному шару B^n. Отсюда и леммы 1.1. следует, что M^n является проективно-подобным многообразием.

Из того, что M^n есть дизъюнктивное объединение сферы $S^{\frac{n}{2}}$ и n-мерного шара B^n вытекают равенства $\pi_1(M^n) = \cdots = \pi_{\frac{n}{2}-1}(M^n) = 0$ при $n \ge 4$. Из $\pi_1(M^n) = 0$ следует ориентируемость M^n.

Пусть M^n – проективно-подобное многообразие с образующей сферой $S^{\frac{n}{2}}$. Определим

на $S^{\frac{n}{2}}$ поток Морса-Смейла $\widetilde{f}^t$ ровно с одним стоком ω и ровно одним источником $\widetilde{\sigma}$. Поскольку, в силу леммы 1.1., граница $\partial T(S^{\frac{n}{2}})$ трубчатой окрестности $T(S^{\frac{n}{2}})$ сферы $S^{\frac{n}{2}}$ есть $(n-1)$-мерная сфера, то $\widetilde{f}^t$ можно продолжить на $T(S^{\frac{n}{2}})$ так, чтобы $S^{\frac{n}{2}}$ стала притягивающим инвариантным множеством с седлом $\widetilde{\sigma}$ и притягивающей областью $T(S^{\frac{n}{2}})$, а $\partial T(S^{\frac{n}{2}})$ была трансверсальна потоку $\widetilde{f}^t$. Так как дополнение к $T(S^{\frac{n}{2}})$ гомеоморфно открытому шару, то нетрудно продолжить $\widetilde{f}^t$ на M^n с источником α внутри данного открытого шара. В результате получается непрерывный поток Морса-Смейла на M^n с тремя состояниями равновесия: стоком ω, седлом $\widetilde{\sigma}$ и источником α.
Доказательство закончено.

Благодарности. Авторы благодарят В.З. Гринеса и О.В. Починку, а также участников семинара "Топологическая динамика" в Национальном исследовательском университете «Высшая школа экономики» за полезные обсуждения. Авторы благодарят РФФИ, гранты 13-01-12452 офи-м, 15-01-03687, 13-01-00589, и РНФ, грант 14-41-00044, за финансовую поддержку. Работа выполнена в рамках Программы фундаментальных исследований НИУ ВШЭ в 2015 году (проект «Динамические системы и их приложения»).

Список литературы

1. Аносов Д. В., “Исходные понятия. Элементарная теория.”, *Современные проблемы математики, Фундаментальные направления (Итоги науки и техники), Дин. системы - 1*, **1** (1985), 156–204.

2. Немыцкий В. В., Степанов В. В., *Качественная Теория Дифференциальных Уравнений*, ОГИЗ, Москва, Ленинград, М., 1947

3. Milnor J., “On manifolds homeomorphic to the 7-sphere”, *Annals of Math.*, **64**:2 (1956), 399–405.

4. Аносов Д. В., “Грубые системы”, *Труды МИАН СССР*, 1985, № 169, 59–93.

5. Smale S., “Morse inequalities for a dynamical system”, *Bull. Amer. Math. Soc.*, **66** (1960), 43–49.

6. Жужома Е. В., Медведев В. С., “Глобальная динамика систем Морса-Смейла”, *Труды МИАН*, **261** (2008), 115–139.

7. Eells J., Kuiper N., “Manifolds which are like projective planes”, *Publ. Math. IHES*, **14** (1962), 5–46.

8. Pixton D., “Wild unstable manifolds”, *Topology*, **16** (1977), 167–172.

9. Bonatti Ch., Grines V., “Knots as topological invariant for gradient-like diffeomorphisms of the sphere S^3”, *Journal of Dyn. and Control Syst.*, **6** (2000), 579–602.

10. Гринес В. З., Починка О. В., *Введение в топологическую классификацию диффеоморфизмов на многообразиях размерности два и три*, Москва-Ижевск, М., 2011, 424 с.

11. Жужома Е. В., Медведев В. С., “Градиентные потоки с дико вложенными замыканиями сепаратрис”, *Труды МИАН*, **270** (2010), 138–146.

12. Жужома Е. В., Медведев В. С., “Системы Морса-Смейла с тремя неблуждающими точками”, *Доклады РАН*, **440**:1 (2011), 11–14.

13. Hirsch M. W., *Differential Topology*, Graduate Texts in Mathematics, Springer-Verlag, 1976, 424 pp.

14. Freedman M., “The topology of four-manifolds”, *J. Diff. Geometry*, **17** (1982), 357–453.

15. Newman M., “The engulfing theorem for topological manifolds”, *Ann. of Math.*, **84** (1966), 555–571.

16. Perelman G., “Ricci flow with surgery on three-manifolds”, *Arxiv.org/abs/math.DG/0303109*, **1–10** (2003), 22 pp.

17. Perelman G., “Finite extension time for the solutions to the Ricci flow on certain three-manifolds”, *Arxiv.org/abs/math.DG/0307245*, **1–17** (2003), 7 pp.

18. Smale S., “Generalized Poincaré’s conjecture in dimensions greater than four”, *Ann. of Math.*, **74** (1961), 391–406.

19. Adams J. F., “On the non-existence of elements of Hopf invariant one”, *Annals of Math.*, **72**:1 (1960), 20–104.

20. Новиков С. П., *Топология*, Москва-Ижевск: Институт комп. исследований, М., 2002

21. Бонатти Х., Гринес В. З., Медведев В. С., Пеку Е., “О топологической классификации градиентноподобных диффеоморфизмов без гетероклинических кривых на трехмерных многообразиях”, *Доклады РАН*, **377**:2 (2001), 151–155.

22. Бонатти Х., Гринес В. З., Медведев В. С., Пеку Е., “О диффеоморфизмах Морса-Смейла без гетероклинических пересечений на трехмерных многообразиях”, *Труды МИАН*, **236** (2002), 66–78.

23. Гринес В. З., Жужома Е. В., Медведев В. С., “О диффеоморфизмах Морса-Смейла с четырьмя периодическими точками на замкнутых ориентируемых многообразиях”, *Матем. Заметки*, **74**:3 (2003), 369–386.

24. Келдыш Л. В., “Топологические вложения в евклидово пространство”, *Труды Матем. инст. им. В.А. Стеклова*, **81** (1966), 3–184.

25. Daverman R. J., Venema G. A., *Embeddings in Manifolds*, GSM, Amer. Math. Soc., Providence, M., 2009

26. Bonatti Ch., Grines V., Medvedev V., Pecou E., “Three-dimensional manifolds admitting Morse-Smale diffeomorphisms without heteroclinic curves”, *Topology and Appl.*, 2002, № 117, 225–344.

27. Чернавский А. В., “Об особых точках топологических вложений многообразий и объединении локально плоских клеток”, *Докл. АН СССР*, **167**:3 (1966), 528–530.

28. Cantrell J. C., “Almost locally flat embeddings of S^{n-1} in S^n”, *Bull. Amer. Math. Soc.*, 1963, № 69, 716–718.

29. Cantrell J., Edwards C., “Almost locally flat imbeddings of manifolds”, *Michigan Math. Jour.*, 1965, № 12, 217–223.

30. Andrews J., Curtis M., “Knotted 2-spheres in the 4-sphere”, *Annals of Math.*, 1959, № 3, 565–571.

31. Палис Ж., Ди Мелу В., *Геометрическая теория динамических систем ВВедение.*, Из-во "Мир Москва, М., 1986

32. Gordon C. McA., Luecke J., “Knots are determinned by their complements”, *Amer. Math. Soc.*, 1989, № 2, 371–415.

33. Kronheimer P., Mrowka T., “Witten’s conjecture and property P.”, *Geometry and Topology*, 2004, № 8, 295–310.

Continuous Morse-Smale flows on projective-like manifolds

© **E. V. Zhuzhoma**[5], **V. S. Medvedev**[6], **N. A. Tarasova**[7]

Abstract. In the paper, one studies a topological structure of supported manifold for Morse-Smale flows the non-wandering set of those consists of three critical points.

Key Words: Morse-Smale flow, non-wandering set, projective-like manifolds

[5] Professor of Department of fundamental mathematics of Higher School of Economics, Nizhny Novgorod; zhuzhoma@mail.ru

[6] Senior Researcher, Research Institute Applied Mathematics and Cybernetics, Nizhny Novgorod; medvedev@unn.ac.ru

[7] Associate Professor Department of Mathematical and Natural Sciences, Institute of Food Technology and Design, Knyaginino,tarasova-na-an@rambler.ru