

КРАТКИЕ СООБЩЕНИЯ

УДК 533.9+517.2+519.142.6

Исследование решений уравнения Лапласа в технологических процессах с использованием парогазовых разрядов с жидкостными электродами© Р. К. Галимова¹, З. Я. Якупов²

Аннотация. С целью расчёта распределения потенциала в объёме электролита применялись экспериментальные данные распределения потенциала электрического поля на поверхности электролита. Решалось уравнение, сводящееся к уравнению Лапласа. При этом использовались цилиндрическая система координат и метод переменных направлений на разностной сетке при соответствующих граничных условиях. Были рассчитаны распределения напряжённости электрического поля и плотности электрического тока вблизи микровыступов обрабатываемой поверхности попеременно–треугольным методом при фиксированной границе. Результаты численного расчёта процесса обработки микровыступа поверхности подтвердили факт более быстрого выравнивания поверхности за счёт большей плотности тока на вершине пика выступа.

Ключевые слова: численные методы, математическое моделирование, уравнение Лапласа, распределение потенциала, парогазовый разряд, жидкостный электрод, электролит, технологический процесс

1. Введение

Явления, протекающие на границе металл–электролит и в межэлектродном промежутке в процессе обработки поверхностей парогазовым разрядом с жидким электродом, представляют собой совокупность взаимосвязанных процессов физического, химического и электрохимического характера. К основным макроскопическим физико–химическим явлениям, определяющим процесс обработки поверхности, следует отнести электрическое поле, обеспечивающее обрабатываемость поверхности, и режим тепло-массопереноса между обрабатываемой поверхностью и электролитом [1– 5].

На основе экспериментальных данных разработаны методики определения напряжённости электрического поля и плотности тока на поверхности электролита в функции основных параметров парогазового разряда с жидким электродом (форма и геометрия электродов, полярность и величина приложенного напряжения, состав и концентрация примесей в жидком электроде). Результаты экспериментальных измерений распределения потенциала на поверхности электролита и результаты численного расчета распределения потенциала в объёме электролита, компонент напряжённости электрического поля и плотности тока на поверхности электролита использовались для моделирования процесса обработки поверхностей металлических изделий [1, 3].

¹ Доцент кафедры технической физики, Казанский национальный исследовательский технический университет им. А.Н.Туполева – КАИ (Казанский авиационный институт), г. Казань; zumat@bk.ru

² Доцент кафедры специальной математики, Казанский национальный исследовательский технический университет им. А.Н.Туполева – КАИ (Казанский авиационный институт), г. Казань; zumat@bk.ru

2. Численные методы

Исследована возможность применения уравнения Лапласа для моделирования технологического процесса обработки металлических поверхностей с использованием парогазовых разрядов с жидкостными электродами. Например, к исследованию простейшего уравнения класса уравнений эллиптического типа

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0,$$

и им подобным [2], приводит рассмотрение задач об электрических и магнитных полях, о стационарном тепловом состоянии, задач гидродинамики, диффузии и т. д.

Экспериментальные измерения потенциала на поверхности электролита с помощью одиночного цилиндрического зонда и уравнений

$$\begin{aligned} \operatorname{div} \vec{j} &= 0, \\ \vec{j} &= \sigma \vec{E}, \\ \vec{E} &= -\operatorname{grad} \varphi \end{aligned}$$

позволили рассчитать значения плотности тока на поверхности жидкого электрода [3]. Для расчета распределения потенциала в объеме электролита использовано уравнение

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(\sigma r \frac{\partial \varphi}{\partial r} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\sigma \frac{\partial \varphi}{\partial z} \right) = 0, \quad (1)$$

где r – расстояние от центра электролитической ячейки круглого сечения ($0 \leq r \leq R$), z – координата расстояния от металлического токоподвода на дне электролитической ячейки до поверхности электролита.

Уравнение (1) решается в цилиндрической системе координат при следующих граничных условиях

$$\left. \frac{\partial \varphi}{\partial r} \right|_{r=0} = 0, \quad (2)$$

$$\varphi(r, 0) = 0, \quad (3)$$

$$\varphi(r, h) = f(r), \quad (4)$$

$$\varphi(R, z) = 0, \quad (5)$$

где $R \gg h$, R – внешний радиус электролитической ячейки, h – текущее расстояние по оси z .

Условие (2) продиктовано соображениями симметрии распределения потенциала φ относительно оси z . Условие (4) – известное распределение потенциала φ на поверхности электролита.

Для решения уравнения (1) используется метод переменных направлений на разностной сетке. Применяется равномерная прямоугольная разностная сетка по (r, z) . Правильность расчётов оценивается соотношением

$$I = \int_S j_z dS,$$

где I – полный ток разряда, $j_z = \sigma E_z$, σ – удельная проводимость среды, j_z – компонента плотности тока. Интегрирование производится по поверхности электролита S .

Для моделирования процесса обработки проводилось численное решение уравнения

$$\operatorname{div}(\sigma \vec{E}) = 0. \quad (6)$$

Уравнение (6) решалось в малой области D микровыступа с плавным профилем высотой R_z . Начальный профиль микровыступа задавался как

$$y = \frac{R_z}{2} \cos\left(\frac{2\pi}{a}x\right),$$

где a – протяженность микровыступа вдоль координаты x . Высота области D выбиралась достаточно большой ($b \approx (3 \div 4)R_z$). Напряжённость электрического поля на верхней границе области считалась постоянной: $E|_{y=b} = E_0 = \text{const}$. Это значение находилось из решения уравнения (6). На обрабатываемой поверхности принималось граничное условие $\varphi|_{\Gamma} = 0$, Γ – граница поверхности изделия. На боковых границах области D граничное условие имело вид $\frac{\partial \varphi}{\partial x}|_{x=\pm a} = 0$.

Уравнение (6) решалось попеременно–треугольным методом при фиксированной границе Γ . Использовалась прямоугольная разностная сетка с равномерным шагом как по координате x , так и по координате y .

3. Результаты моделирования

Решение уравнения (6) позволяет получить распределение потенциала φ во всех узлах разностной сетки. Далее находится плотность тока вблизи границы Γ : $j_x = -\sigma \frac{\partial \varphi}{\partial x}$; $j_y = -\sigma \frac{\partial \varphi}{\partial y}$; $j = \sqrt{j_x^2 + j_y^2}$. Скорость съёма металла v_p принимается пропорциональной плотности тока $\vec{v}_p = k_v \vec{j}|_{\Gamma}$. Здесь k_v – удельный съём металла.

Проведённые вычисления показали, что при $k_v = 60 \div 100$ (мм³/А · ч) [3] экспериментальные данные по измерению R_z исследуемых металлических поверхностей до и после обработки хорошо согласуются с расчётными.

4. Выводы

Благодаря широким возможностям применения, интерес представляют способы получения низкотемпературной плазмы зажиганием разряда между твердым металлическим и жидким неметаллическим (электролиты с добавлением неорганических и органических примесей) электродами. Изучение явлений в таких разрядах заслуживает внимания специалистов по технологии обработки материалов с различными физико–механическими свойствами с целью улучшения их эксплуатационных свойств [1, 3, 5].

Многофакторность процесса и большое количество видов связи вызывает трудности планирования эксперимента в технологии обработки поверхностей изделий парогозовым разрядом между твердым металлическим и жидким неметаллическим электродами. Как и в большинстве технологических процессов, наряду с контролируруемыми факторами существует целый ряд неконтролируемых входных переменных. Поэтому изменение выходных параметров, например, шероховатости поверхности, носит случайный характер [4]. Несмотря на это, процессы прогнозирования результатов технологических процессов с использованием указанного типа разряда и их моделирование в настоящее время актуальны и востребованы.

В работе использовалась информация об обработке металлических поверхностей в электролитах с концентрацией растворенных веществ порядка 1%. Обычная электрохимическая обработка предполагает использование значительно концентрированных электролитов с агрессивными добавками [1, 3, 4]. Результаты моделирования и численные расчеты, представленные в работе, позволяют сделать заключение об одновременном воздействии на обрабатываемую поверхность парогазового разряда и электрохимического растворения, а также о значительной активации электрохимической обработки разрядными процессами.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Галимова Р. К., *Характеристики плазменной электротермической установки с жидкими электродами (электролиты с добавлением неорганических и органических примесей)*. Диссертация на соискание ученой степени кандидата технических наук., 1997, 202 с.
2. Якупов З. Я., “Ляпуновские преобразования стационарного уравнения Шрёдингера с возмущающим потенциалом”, *Математическое моделирование*, **7:5** (1995), 71 с.
3. Basyrov R. Sh., Galimova R. K., Khaziev R. M., “Modelling of the process of the treatment of metallic surfaces by the gas–vapour discharge with a liquid electrode”, *Материалы V международной научно-технической конференции «Машиностроение и техносфера на рубеже XXI века» в г. Севастополе.*, **3:6** (1998), 318–319.
4. Галимова Р. К., Якупов З. Я., “Исследование технологического процесса обработки поверхностей изделий парогазовым разрядом между твердым металлическим и жидким неметаллическим электродами”, *Fundamental and applied sciences today. CreateSpace. 4900 LaCross Road. North Charleston, SC, USA 29406*, spc Academic, M., 2013, 147–149.
5. Якупов З. Я., Галимова Р. К., “Об Адамаровых матрицах”, *Математика в современном мире: Материалы международной научно-практической конференции*. (7-11 октября 2013 г.), Изд-во ВГПУ, Вологда, 2014, 38–40.

Investigation of the solutions of the Laplace equation in processes using steam and gas discharges with liquid electrodes

© R. K. Galimova³, M. Y. Yakupov⁴

Abstract. For the purpose of calculation of distribution of potential in volume of electrolyte experimental data of distribution of potential of electric field on an electrolyte surface were applied. The equation which is reducing to the equation of Laplace was solved. The cylindrical system of coordinates and method of the variable directions on a differential grid were thus used under the corresponding boundary conditions. Distributions of intensity of electric field and density of electric current near microedges of a processed surface were calculated by an alternate and triangular method at the fixed border. Results of numerical calculation of processing of a microedge of a surface confirmed the fact of faster alignment of a surface at the expense of the bigger density of current at top of peak of a ledge.

Key Words: numerical methods, mathematical modeling, Laplace's equation, potential distribution, steam-gas category, liquid electrode, electrolyte, technological process

³ Associate professor of Technical Physics Chair, KNRTU-KAI named by A.N.Tupolev, Kazan; zymat@bk.ru.

⁴ Associate professor of Special Mathematics Chair, KNRTU-KAI named by A.N.Tupolev, Kazan; zymat@bk.ru.