Краткие сообщения

УДК 517.929

Необходимые и достаточные условия однородности интервальных полиномов

© И. В. Зубов [1], А. Ф. Зубова [2], С .А. Стрекопытов [3]

Аннотация. В работе рассматривается вопрос о робастной устойчивости и неустойчивости характеристического полинома матрицы линейной динамической системы. Предлагаемый подход позволяет исследовать робастную устойчивость и неустойчивость множества семейств, полученных при пропорциональном изменении интервалов вещественных и мнимых частей коэффициентов полиномов исходного семейства.

Ключевые слова: устойчивость, полином, динамическая система, коэффициент, интервальное семейство

При исследовании поведения линейной динамической системы часто ставится задача об определении робастной устойчивости семейства систем с интервальными ограничениями на коэффициенты характеристического полинома. Эта задача эффективно решается с помощью теоремы Харитонова и графического критерия Ципкина-Поляка. Более полную информацию об исследуемой системе может дать приведенный ниже подход. Он решает вопрос не только о робастной устойчивости, но и робастной неустойчивости интервального семейства полиномов в смысле принадлежности всех полиномов семейства классу (n, k) - эквивалентности. Более того, этот подход позволяет определить робастную устойчивость и неустойчивость множества семейств, полученных при пропорциональном изменении интервалов вещественных и мнимых частей коэффициентов полиномов исходного семейства.

Рассмотрим интервальное семейство полиномов с комплексными коэффициентами вида:

$$\Phi(S) = \begin{cases} f(S) = A_0 + A_1 S + \ldots + A_n S^n, \\ A_i = a_i + jb_i,\ |a_i - a_i^0| \le \alpha_i \gamma, \\ |b_i - b_i^0| \le \beta_i \mu,\ \alpha_i \ge 0,\ \beta_i \ge 0,\ \gamma > 0,\ \mu > 0. \end{cases} \tag{1.1}$$

Рассмотрим номинальный годограф при $-\infty < \omega < \infty$:

$$f_0(j\omega) = g_0(\omega) + jh_0(\omega) \tag{1.2}$$

$$\begin{cases} g_0(\omega) = a_0^0 - b_1^0\omega - a_2^0\omega^2 + b_3^0\omega^3 + a_4^0\omega^4 - \ldots, \\ h_0(\omega) = b_0^0 + a_1^0\omega - b_2^0\omega^2 - a_3^0\omega^3 + b_4^0\omega^4 + \ldots \end{cases} \tag{1.3}$$

Для номинального годографа (2) рассмотрим нормировочные функции:

$$\begin{cases} R(\omega) = \alpha_0 + \frac{\mu}{\gamma}\beta_1|\omega| + \alpha_2\omega^2 + \frac{\mu}{\gamma}\beta_3|\omega|^3 + \alpha_4\omega^4 + \ldots, \\ T(\omega) = \beta_0 + \frac{\gamma}{\mu}\alpha_1|\omega| + \beta_2\omega^2 + \frac{\gamma}{\mu}\alpha_3|\omega|^3 + \beta_4\omega^4 + \ldots \end{cases} \tag{1.4}$$

[1] Профессор кафедры теории управления; СПбГУ, г. Санкт-Петербург; ddemidova@mail.ru
[2] Профессор кафедры теории управления; СПбГУ, г. Санкт-Петербург; ddemidova@mail.ru
[3] Доцент кафедры теории управления; СПбГУ, г. Санкт-Петербург; ddemidova@mail.ru

Покажем, что множество значений $S(\omega)$ годографов $f(j\omega)$ интервального полинома (1) является прямоугольником:

$$S(\omega)=\begin{cases} f(j\omega)=x(\omega)+jy(\omega);\\ |x-g_0(\omega)|\le\gamma R(\omega),\\ |y-h_0(\omega)|\le\mu T(\omega).\end{cases} \tag{1.5}$$

В стандартных обозначениях $x(\omega)=g(\omega)$; $y(\omega)=h(\omega)$ и неравенства (5) можно записать точнее:

$$\begin{cases} g_0(\omega)-\gamma R(\omega)\le g(\omega)\le g_0(\omega)+\gamma R(\omega),\\ h_0(\omega)-\mu T(\omega)\le h(\omega)\le h_0(\omega)+\mu T(\omega).\end{cases} \tag{1.6}$$

Чтобы доказать неравенства (6) сделаем очевидные преобразования с границами первого неравенства из (6):

Для $\omega>0$:

$$g_0(\omega)-\gamma R(\omega)=(a_0^0-b_1^0\omega-a_2^0\omega^2+b_3^0\omega^3+a_4^0\omega^4-\ldots)-$$

$$-\gamma(\alpha_0+\beta_1\frac{\mu}{\gamma}\omega+\alpha_2\omega^2+\beta_3\frac{\mu}{\gamma}\omega^3+\alpha_4\omega^4+\ldots)=$$

$$=(a_0^0-\gamma\alpha_0)-(b_1^0+\beta_1\mu)\omega-(a_2^0+\gamma\alpha_2)\omega^2+$$

$$+(b_3^0-\beta_3\mu)\omega^3+(a_4^0-\gamma\alpha_4)\omega^4-\ldots=\underline{g_1}(\omega).$$

Аналогично при $\omega\ge 0$:

$$g_0(\omega)+\gamma R(\omega)=(a_0^0+\gamma\alpha_0)-(b_1^0-\beta_1\mu)\omega-(a_2^0-\gamma\alpha_2)\omega^2+$$

$$+(b_3^0+\beta_3\mu)\omega^3+(a_4^0+\gamma\alpha_4)\omega^4-\ldots=\underline{g_1}(\omega).$$

Для $\omega\le 0$:

$$g_0(\omega)-\gamma R(\omega)=(a_0^0-b_1^0\omega-a_2^0\omega^2+b_3^0\omega^3+a_4^0\omega^4-\ldots)-$$

$$-\gamma(\alpha_0-\beta_1\frac{\mu}{\gamma}\omega+\alpha_2\omega^2-\beta_3\frac{\mu}{\gamma}\omega^3+\alpha_4\omega^4\ldots)=$$

$$=(a_0^0-\gamma a_0)-(b_1^0-\beta_1\mu)\omega-(a_2^0+\alpha_2\gamma)\omega^2+$$

$$+(b_3^0+\beta_3\mu)\omega^3+(a_4^0-\gamma\alpha_4)\omega^4-\ldots=$$

$$=(a_0^0-\gamma\alpha_0)+(b_1^0-\beta_1\mu)|\omega|-(a_2^0+\alpha_2\gamma)\omega^2-$$

$$-(b_3^0+\beta_3\mu)|\omega|^3+(a_4^0-\gamma\alpha_4)\omega^4-\ldots=\underline{g_2}(\omega)$$

$$g_0(\omega)+\gamma R(\omega)=(a_0^0+\gamma\alpha_0)+(b_1^0+\beta_1\mu)|\omega|-$$

$$-(a_2^0 - \alpha_2\gamma)\omega^2 - (b_3^0 - \beta_3\mu)|\omega|^3 = \overline{g_2}(\omega)$$

Теперь рассмотрим границы второго неравенства из (6). Для $\omega \geq 0$:

$$h_0(\omega) - \mu T(\omega) = (b_0^0 - \mu\beta_0) + (a_1^0 - \gamma\alpha_1)\omega - (b_2^0 + \mu\beta_2)\omega^2 -$$

$$-(a_3^0 + \gamma\alpha_3)\omega^3 + (b_4^0 - \mu\beta_4)\omega^4 + \ldots = \underline{h_1(\omega)}$$

Аналогично при $\omega \geq 0$:

$$h_0(\omega) + \mu T(\omega) = (b_0^0 + \mu\beta_0) + (a_1^0 + \gamma\alpha_1)\omega - (b_2^0 - \mu\beta_2)\omega^2 -$$

$$-(a_3^0 - \gamma\alpha_3)\omega^3 + (b_4^0 + \mu\beta_4)\omega^4 + \ldots = \overline{h_1}(\omega)$$

Для $\omega \leq 0$:

$$h_0(\omega) - \mu T(\omega) = (b_0 - \mu\beta_0) + (a_1^0 + \gamma\alpha_1)\omega - (b_2^0 + \mu\beta_2)\omega^2 -$$

$$-(a_3^0 - \gamma\alpha_3)\omega^3 + (b_4^0 - \mu\beta_4)\omega^4 + \ldots = \underline{h_2}(\omega)$$

$$h_0(\omega) + \mu T(\omega) = (b_0 + \mu\beta_0) + (a_1^0 - \gamma\alpha_1)\omega - (b_2^0 - \mu\beta_2)\omega^2 -$$

$$-(a_3^0 + \gamma\alpha_3)\omega^3 + (b_4^0 + \mu\beta_4)\omega^4 + \ldots = \overline{h_2}(\omega)$$

Таким образом, доказано, что семейство значений $S(\omega)$ годографов $f(i\omega)$ находится при $-\infty < \omega < \infty$ в прямоугольнике $[\underline{g_1}, \overline{g_1}] \times [\underline{h_1}, \overline{h_1}]$ при $\omega \geq 0$ и в прямоугольнике $[\underline{g_2}, \overline{g_2}] \times [\underline{h_2}, \overline{h_2}]$ при $\omega \leq 0$, т. е. доказаны неравенства (5) и (6).

Заметим, что при $\omega = 0$ значения $S(\omega)$ семейства годографов $f(j\omega)$ остаются прямоугольником:

$$S(0) = [a_0^0 - \gamma\alpha_0, a_0^0 + \gamma\alpha_0] \times [b_0^0 - \mu\beta_0, b_0^0 + \mu\beta_0].$$

Условие $0 \notin S(\omega)$ и (5) для выполнения принципа исключения нуля в комплексном случае. Эквивалентно тому, что

$$|\frac{g_0(\omega)}{R(\omega)}| > \gamma, \ |\frac{h_0(\omega)}{T(\omega)} > \mu.$$

Определение 1.1. *Назовем при* $\alpha_0 > 0$, $\beta_0 > 0$, $\alpha_n > 0$, $\beta_n > 0$, *функцию* $Z(\omega)$

$$Z(\omega) = \frac{g_0(\omega)}{R(\omega)} + j\frac{h_0(\omega)}{T(\omega)},$$

определенную на всей вещественной оси, сложным нормированным номинальным годографом или кратко - сложным годографом.

Теорема 1.1. *Для робастной устойчивости комплексного интервального полинома $\Phi(S)$ степени n при $\alpha_0 > 0$, $\beta_0 > 0$, $\alpha_n > 0$, $\beta_n > 0$, необходимо и достаточно выполнение двух условий:*

1.

$$\begin{cases} \max((a_0^0)^2 - (\gamma\alpha_0)^2,\ (b_0^0)^2 - (\mu\beta_0)^2) > 0, \\ \max((a_n^0)^2 - (\gamma\alpha_n)^2,\ (b_n^0)^2 - (\mu\beta_n)^2) > 0. \end{cases}$$

2. $Z(\omega)$ при $-\infty < \omega < \infty$ проходит последовательно $2n$ квадратов не пересекая прямоугольника с вершинами $(\pm\gamma, \pm\mu)$.

Из определения выше следует, что сложный годограф $Z(\omega)$ является ограниченным при $-\infty < \omega < \infty$, и функции $ReZ(\omega)$, $ImZ(\omega)$ могут иметь скачок первой производной при $\omega = 0$.

Определение 1.2. *Полином степени n с вещественными или комплексными коэффициентами, не имеющий нулевых и чисто мнимых корней*

$$\varphi(s) = a_0 + a_1 s + \ldots + a_n s^n,\ a_0 \neq 0,\ a_n \neq 0,$$

принадлежит классу (n, k) - эквивалентности, если k его корней, с учетом их кратности, лежат в правой полуплоскости.

Назовем интервальный полином $\Phi(S)$ интервальным полиномом класса (n, k) - эквивалентности, если любой полином из этого семейства принадлежит классу (n, k) - эквивалентности.

Теорема 1.2. *Для того, чтобы комплексный интервальный полином $\Phi(S)$ степени n был интервальным полиномом класса (n, k) - эквивалентности при $\alpha_0 > 0$, $\beta_0 > 0$, $\alpha_n > 0$, $\beta_n > 0$, необходимо и достаточно выполнение двух условий: 1.*

$$\begin{cases} \max((a_0^0)^2 - (\gamma\alpha_0)^2,\ (b_0^0)^2 - (\mu\beta_0)^2) > 0, \\ \max((a_n^0)^2 - (\gamma\alpha_n)^2,\ (b_n^0)^2 - (\mu\beta_n)^2) > 0. \end{cases}$$

2. Годограф $Z(\omega)$ при изменении ω от $-\infty$ до ∞ проходит последовательно против часовой стрелки ровно $n - 2k$ полуоборотов, не пересекая прямоугольника с вершинами $(\pm\gamma, \pm\mu)$.

Замечание 1.1. *При $k = 0$ речь идет об устойчивых интервальных семействах, при $k > 0$ о неустойчивых.*

Замечание 1.2. *За счет изменения двух независимых параметров γ и μ можно исследовать на робастную устойчивость и неустойчивость интервальные полиномы с комплексными коэффициентами, варьируя величину интервалов по реальной и мнимой частям коэффициентов, что дает две степени свободы.*

Замечание 1.3. *За счет потери ограниченности и непрерывности сложного годографа $Z(\omega)$ можно отбросить условие на масштабные множители: $\alpha_0 > 0$, $\beta_0 > 0$, $\alpha_n > 0$, $\beta_n > 0$ заменив их условиями:*

$$\sum_{\substack{2r+1 \leq n \\ 2m \leq n}}^{n} (\alpha_{2m} + \beta_{2r+1}) > 0, \qquad \sum_{\substack{2r+1 \leq n \\ 2m \leq n}} (\alpha_{2r+1} + \beta_{2m}) > 0$$

или одним условием $T(\omega)R(\omega) > 0$.

З а м е ч а н и е 1.4. *Если γ и μ зависимы линейно, т. е. $\mu = k\gamma$, то можно указать $\gamma_{\max}$, что интервальный полином $\Phi(S)$ робастно устойчив или неустойчив при $\gamma < \gamma_{\max}$. В этом случае нормировочные функции $R(\omega)$ и $T(\omega)$ не зависят от γ и μ, $\gamma_{\max}$ определяется по формуле $\gamma_{\max} = \min(\gamma^\star, \gamma_\infty)$, где $2\gamma^\star$, $2k\gamma^\star$ - размеры наибольшего прямоугольника, вписанного в сложный годограф $Z(\omega)$. В условиях теоремы (годограф $Z(\omega)$ - ограниченный и непрерывный) число γ_∞ определяется формулой $\gamma_\infty = \frac{|b_n|}{k\beta_n}$ при нечетном n и $\gamma_\infty = \frac{|a_n|}{k\alpha_n}$ при четном n. Если же сложный годограф:*

$Z(\omega)$ неограничен, но непрерывен, то $\gamma_{\max} = \min(\gamma^\star, \gamma^0)$;

$Z(\omega)$ неограничен из-за разрыва при $\omega = 0$, а в окрестности $\omega = \infty$ $Z(\omega)$ ограниченная функция, то $\gamma_{\max} = \min(\gamma^\star, \gamma_{infty})$.

Работа выполнена при поддержке РФФИ грант № 10-08-000624.

Список литературы

1. Г.А. Зеленков В.В. Дикусар Н.В. Зубов, *Методы анализа робастной утойчивости и неустойчивости*, ВЦ РАН, М, 2007, 234 с.

2. Б.Т. Поляк П.С. Щербаков, *Робастная устойчивость и управление*, Наука, М, 2002, 303 с.

3. А.В. Зубов Н.В. Зубов В.Н. Лаптинский, *Динамика управляемых систем*, СПбГУ, СПб, 2008, 337 с.

The interval family of polynoms with complex coefficients

© I. V. Zubov [4], A. F. Zubova [5], S. A. Strecopitov [6]

Abstract. In work is considers the question about robust stability and instability of characteristic polynomials of matrix linear dynamical system. The proposing approach ia allows to investigate robust stability and instability of multitude families, giving with proportion change of intervals substantial and insubstantial parts coefficient polynomial first family.

Key Words: stability, polinomial, dynamical system, coefficient, interval family

[4] Professor chair theory of control; SPbGU, t. Saint-Petersburg; ddemidova@mail.ru

[5] Professor chair theory of control; SPbGU, t. Saint-Petersburg; ddemidova@mail.ru

[6] Docent chair theory of control; SPbGU, t. Saint-Petersburg; ddemidova@mail.ru