УДК 519.3:62-50

Приближенное решение дифференциальных уравнений с нелинейным запаздыванием и приближенное вычисление функционала качества при известном управлении

© Т. К. Юлдашев [1]

Аннотация. Рассмотрены вопросы о приближенном решении дифференциальных уравнений с нелинейным запаздыванием при начальном условии и о приближенном вычислении функционала качества при известном управлении. В поставленной задаче управление ограничено по модулю константой и нелинейно входит в уравнение и в функционал качества. Использован случай, когда переменные принимают натуральные значения. Задача заменяется с её дискретным аналогом. Для каждого набора заданной координаты и управления начальная задача сведена к суммарному уравнению с запаздыванием. Доказано существование и единственность решения этого суммарного уравнения. При этом использован метод последовательных приближений в сочетании его с методом сжимающих отображений. Получена оценка для допускаемой погрешности по состоянию приближенного решения начальной разностной задачи. Далее доказано, что последовательность дискретных управлений является минимизирующей последовательностью для искомой задачи. В качества примера составлена простейшая динамическая модель производственного процесса предприятия, которая имеет вид рассматриваемого уравнения.

Ключевые слова: Дифференциальное уравнение, нелинейное запаздывание, начальное условие, оптимальное управление, приближенное решение, динамическая модель экономики.

Современные методы решения задач управления в значительной степени основываются на концепции оптимальности, что определяет широкое применение методов и алгоритмов теории оптимизации при проектировании и совершенствовании систем управления. Многие задачи управления формулируются как конечномерные оптимизационные задачи. К таким задачам относятся и задачи адаптивных систем управления [1] – [5].

Разработка математических методов и создание на их основе пакетов прикладных программных комплексов, ориентированных на автоматизацию проектно-конструкторских и научно-исследовательских работ с применением современных компьютеров, являются в настоящее время важнейшими задачами. Успешному решению этой задачи в значительной мере способствует разработка эффективных численных методов и программных средств для решения задач динамики и управления. При приближенном решении задач оптимального управления различными системами используются широкий спектр разных методов (см., напр. [6] – [11]).

В данной работе рассматриваются вопросы приближенного решения задачи оптимального управления для одного нелинейного обыкновенного дифференциального уравнения с нелинейным запаздывающим аргументом при начальным условии и с нелинейным критерием оптимальности.

[1] Доцент кафедры высшей математики, Сибирский государственный аэрокосмический университет имени академика М. Ф. Решетнева, г. Красноярск, tursunbay@rambler.ru

1. Постановка задачи

Пусть управляемый процесс на отрезке D_T описывается нелинейным дифференциальным уравнением вида

$$y'(t) = p(t)u(t) + \beta(t)q\Big[t - \tau\big(t, u(t), y'(t)\big)\Big]\times$$

$$\times y\Big[t - \tau\big(t, u(t), y'(t)\big)\Big] + f(t, y(t)) \tag{1.1}$$

с начальным условием

$$y(t) = \phi(t),\ t \in \big[-\eta; t_0\big], \tag{1.2}$$

где $p(t)$, $\beta(t)$ и $q(t)$ – заданные положительные непрерывные функции, ограниченные сверху числом 1, $f(t,y) \in C\big(D_T \times Y\big)$, $0 < \tau\big(t, u(t), y'(t)\big)$ – запаздывающая функция, такая, что $t - \tau\big(t, u(t), y'(t)\big) \le t_0 - \eta$, $0 < \eta = const$, $0 < u(t) \in C\big(D_T\big)$ – управляющая функция, Y – отрезок на положительной полуоси, $D_T \equiv \big[t_0; T\big]$, $0 < t_0 < T < \infty$.

Задача 1. Найти состояние $y^\star(t)$ – решение начальной задачи (1.1), (1.2) при известных управляющих воздействиях

$$u^\star(t) \in \big\{u^\star : \big|u^\star(t)\big| \le M_0,\ t \in D_T\big\},$$

что доставляют минимум функционалу

$$J[u(t)] = \int_{t_0}^{T} \tau\big(t, u(t), y'(t)\big)dt.$$

2. Дискретный аналог задачи 1

Вместо дифференциального уравнения (1.1) рассмотрим его разностный аналог

$$\Delta y(n) = p(n)u(n) + \beta(n)q\Big[n - \tau\big(n, u(n), \Delta y(n)\big)\Big]\times$$

$$\times y\Big[n - \tau\big(n, u(n), \Delta y(n)\big)\Big] + f(n, y(n)) \tag{2.1}$$

при начальном условии

$$y(n) = \phi(n),\ n \in D_1, \tag{2.2}$$

где $\Delta y(n) = y(n+1) - y(n)$, целочисленные функции $p(n)$, $\beta(n)$, $q(n)$, $f(n,y)$ определены для всех $n \in D_N$, целочисленная функция $\phi(n)$ определена для всех $n \in D_1 \equiv \Big\{n_0 - \eta \le n \le n_0\Big\}$, $\eta > 0$, $n \in D_N \equiv \Big\{n_0 \le n \le N\Big\}$, а n_0, n и N – натуральные числа.

Задача 2. Найти состояние $y^\star(n)$ – решение начальной задачи (2.1), (2.2) при известных управляющих воздействиях

$$u^\star(n) \in \big\{u^\star : \big|u^\star(n)\big| \le M_0,\ n \in D_N\big\},$$

что доставляют минимум функционалу

$$J[u(n)] = \sum_{n=n_0}^{N-1} \tau\big(n, u(n), \Delta y(n)\big). \tag{2.3}$$

В данной работе вместо задачи 1 будем рассматривать дискретную задачу 2.

Разностная начальная задача (2.1), (2.2) на множестве эквивалентна суммарному уравнению

$$y(n) \equiv \Theta(n,y) = \phi(n_0)+$$
$$+\sum_{m=n_0}^{n-1}\Big[p(m)u(m)+\beta(m)q\Big[m-\tau\big(m,u(m),\Delta y(m)\big)\Big]\times$$
$$\times y\Big[m-\tau\big(m,u(m),\Delta y(m)\big)\Big]+f(m,y(m))\Big]. \tag{2.4}$$

3. Однозначная разрешимость суммарного уравнения (2.4)

Мы используем следующие обозначения: $Bnd(M)$ – класс целочисленных функций, ограниченных по норме с положительным числом M; $Lip\Big\{L_{|u,v,\dots}\Big\}$ – класс функций, удовлетворяющих условию Липшица по переменным $u,v,\dots$ с положительным коэффициентом L.

В качестве нормы на множестве D_N для произвольной целочисленной функции $x(n)$ мы будем брать евклидову норму

$$\|x(n)\| = \max\big\{|x(n)| : n \in D_N\big\}.$$

Т е о р е м а 3.1. *Пусть выполняются следующие условия:*
1. $f(n,y) \in Bnd(M_1)\cap Lip\left\{L_{1|y}\right\}$, $0 < L_1 = const$;
2. $\tau(n,u,y) \in Lip\left\{L_{2|y}\right\}$, $0 < L_2 = const$;
3. $\max\Big\{|\phi(n_0)|; \|p(n)\|; \|y(n)\|\Big\} = \gamma_0 = const < \infty$;
4. $\big|q(n_1)-q(n_2)\big| \le L_{01}\big|n_1-n_2\big|$, $0 < L_{01} = const$;
5. $\big|y(n_1)-y(n_2)\big| \le L_{02}\big|n_1-n_2\big|$, $0 < L_{02} = const$;
6. $\rho = \max\Big\{\gamma_1;\gamma_2\Big\} < 1$, $\gamma_1 = \max\Big\{q_0+L_1; \big(q_0+L_1\big)(N-n_0-1)\Big\}$,
$\gamma_2 = \max\Big\{L_2\Big(\gamma_0L_{01}+q_0L_{02}\Big); L_2\Big(\gamma_0L_{01}+q_0L_{02}\Big)(N-n_0-1)\Big\}$,
$q_0 = \max\big\{q(n) : n \in D_N\big\}$.
Тогда суммарное уравнение (2.4) при фиксированных значениях управления $u(n)$ имеет единственное решение на множестве D_N.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Используем метод последовательных приближений в сочетании его с методом сжимающих отображений (см., напр. [12] – [14]). Рассмотрим следующий итерационный процесс Пикара:

$$\begin{cases} y_0(n) = \phi(n_0) + \sum_{m=n_0}^{n-1} p(m)u(m), \\ y_{k+1}(n) = \Theta(n,y_k),\ k=0,1,2,\dots; \end{cases} \tag{3.1}$$

$$\Delta y_{k+1}(n) = p(n)u(n)+\beta(n)q\Big[n-\tau\big(n,u(n),\Delta y_k(n)\big)\Big]\times$$
$$\times y_k\Big[n-\tau\big(n,u(n),\Delta y_k(n)\big)\Big]+f(n,y_k(n)). \tag{3.2}$$

В силу первого условия теоремы для нулевого приближения из (3.1) справедлива следующая оценка

$$\big\|y_0(n)\big\| \le \gamma_0+\gamma_0M_0 < \infty. \tag{3.3}$$

В силу условий теоремы, с учетом (3.3) из (3.1) для первого приближения имеем оценку

$$\left\|y_1(n)-y_0(n)\right\| \leq \sum_{m=n_0}^{n-1}\left\|y_0\Big[m-\tau\Big(m,u(m),\Delta y_0(m)\Big)\Big]\right\|+$$

$$+\sum_{m=n_0}^{n-1}\left\|f(m,y_0)\right\| \leq \Big[\gamma_0\Big(1+M_0\Big)+M_1\Big]\Big(N-n_0-1\Big)<\infty. \tag{3.4}$$

Аналогично для произвольного натурального числа $k>1$ из (3.1) по индукции получаем

$$\left\|y_{k+1}(n)-y_k(n)\right\| \leq \sum_{m=n_0}^{n-1}\Big[\left\|q\Big[m-\tau\Big(m,u(m),\Delta y_k(m)\Big)\Big]\right\|\times$$

$$\times\left\|y_k\Big[m-\tau\Big(m,u(m),\Delta y_k(m)\Big)\Big]-y_{k-1}\Big[m-\tau\Big(m,u(m),\Delta y_{k-1}(m)\Big)\Big]\right\|+$$

$$+\left\|y_{k-1}\Big[m-\tau\Big(m,u(m),\Delta y_k(m)\Big)\Big]\right\|\times$$

$$\times\left\|q\Big[m-\tau\Big(m,u(m),\Delta y_k(m)\Big)\Big]-q\Big[m-\tau\Big(m,u(m),\Delta y_{k-1}(m)\Big)\Big]\right\|\Big]+$$

$$+\sum_{m=n_0}^{n-1}\left\|f\big(m,y_k(m)\big)-f\big(m,y_{k-1}(m)\big)\right\|.$$

Отсюда, в силу условий теоремы, имеем

$$\left\|y_{k+1}(n)-y_k(n)\right\| \leq$$

$$\leq\Big\{q_0\left\|y_k\Big[n-\tau\Big(n,u(n),\Delta y_k(n)\Big)\Big]-y_{k-1}\Big[n-\tau\Big(n,u(n),\Delta y_k(n)\Big)\Big]\right\|+$$

$$+q_0\left\|y_{k-1}\Big[n-\tau\Big(n,u(n),\Delta y_k(n)\Big)\Big]-y_{k-1}\Big[n-\tau\Big(n,u(n),\Delta y_{k-1}(n)\Big)\Big]\right\|+$$

$$+\gamma_0 L_{01}\left|\tau\Big(n,u(n),\Delta y_k(n)\Big)-\tau\Big(n,u(n),\Delta y_{k-1}(n)\Big)\right|+$$

$$+L_1\left\|y_k(n)-y_{k-1}(n)\right\|\Big\}\ \big(N-n_0-1\big)$$

или

$$\left\|y_{k+1}(n)-y_k(n)\right\| \leq \big(N-n_0-1\big)\ \Big[\big(q_0+L_1\big)\left\|y_k(n)-y_{k-1}(n)\right\|+$$

$$+\Big(\gamma_0 L_{01}+q_0 L_{02}\Big)\left|\tau\Big(n,u(n),\Delta y_k(n)\Big)-\tau\Big(n,u(n),\Delta y_{k-1}(n)\Big)\right|\Big] \leq$$

$$\leq\Big[\big(q_0+L_1\big)\left\|y_k(n)-y_{k-1}(n)\right\|+$$

$$+L_2\Big(\gamma_0 L_{01}+q_0 L_{02}\Big)\left\|\Delta y_k(n)-\Delta y_{k-1}(n)\right\|\Big]\ \big(N-n_0-1\big), \tag{3.5}$$

где $q_0=\max\big\{q(n): n\in D_N\big\}$.

Аналогично из (3.2) имеем

$$\left\|\Delta y_{k+1}(n)-\Delta y_k(n)\right\| \leq \big(q_0+L_1\big)\left\|y_k(n)-y_{k-1}(n)\right\|+$$

$$+L_2\Big(\gamma_0 L_{01}+q_0 L_{02}\Big)\left\|\Delta y_k(n)-\Delta y_{k-1}(n)\right\|. \tag{3.6}$$

Из (3.5) и (3.6) следует, что

$$\begin{gathered}\big\|y_{k+1}(n)-y_k(n)\big\|+\big\|\Delta y_{k+1}(n)-\Delta y_k(n)\big\|\leq\\ \leq\gamma_1\big\|y_k(n)-y_{k-1}(n)\big\|+\gamma_2\big\|\Delta y_k(n)-\Delta y_{k-1}(n)\big\|\leq\\ \leq\rho\left[\big\|y_k(n)-y_{k-1}(n)\big\|+\big\|\Delta y_k(n)-\Delta y_{k-1}(n)\big\|\right],\end{gathered}\tag{3.7}$$

где $\gamma_1=\max\Big\{q_0+L_1;\big(q_0+L_1\big)(N-n_0-1)\Big\}$,

$\gamma_2=\max\Big\{L_2\Big(\gamma_0L_{01}+q_0L_{02}\Big);L_2\Big(\gamma_0L_{01}+q_0L_{02}\Big)(N-n_0-1)\Big\}$,

$q_0=\max\big\{q(n):n\in D_N\big\}$.

Из (3.4) и (3.7) следует, что оператор в правой части (2.4) является сжимающим. Следовательно, суммарное уравнение (2.4) при фиксированных значениях управления $u(n)$ имеет единственное решение на множестве D_N.
Доказательство закончено.

Теорема 3.2. *Пусть выполняются условия теоремы 3.1. Если* $2\rho<1$, *то при фиксированных значениях управления* $u(n)$ *справедлива оценка*

$$\big\|\Delta y(n)-\Delta y_k(n)\big\|\leq\frac{\rho^k\Big\{M_1+\Big[\gamma_0\Big(1+M_0\Big)+M_1\Big]\Big(N-n_0-1\Big)\Big\}}{2(1-2\rho)}.\tag{3.8}$$

Доказательство. Для разности $y(n)-y_k(n)$ с учетом (3.4) и (3.7) имеем оценку

$$\begin{gathered}\big\|y(n)-y_k(n)\big\|\leq\\ \leq\big\|y(n)-y_{k+1}(n)\big\|+\big\|y_{k+1}(n)-y_k(n)\big\|\leq\\ \leq\rho\left[\big\|y_k(n)-y_{k-1}(n)\big\|+\big\|\Delta y_k(n)-\Delta y_{k-1}(n)\big\|\right]+\\ +\rho^k\Big[\gamma_0\Big(1+M_0\Big)+M_1\Big]\Big(N-n_0-1\Big).\end{gathered}\tag{3.9}$$

Аналогично получаем, что

$$\begin{gathered}\big\|\Delta y(n)-\Delta y_k(n)\big\|\leq\\ \leq\rho\left[\big\|y_k(n)-y_{k-1}(n)\big\|+\big\|\Delta y_k(n)-\Delta y_{k-1}(n)\big\|\right]+M_1\rho^k.\end{gathered}\tag{3.10}$$

Из (3.9) и (3.10) следует оценка

$$\begin{gathered}\big\|y(n)-y_k(n)\big\|+\big\|\Delta y(n)-\Delta y_k(n)\big\|\leq\\ \leq2\rho\left[\big\|y_k(n)-y_{k-1}(n)\big\|+\big\|\Delta y_k(n)-\Delta y_{k-1}(n)\big\|\right]+\\ +\rho^k\Big\{M_1+\Big[\gamma_0\Big(1+M_0\Big)+M_1\Big]\Big(N-n_0-1\Big)\Big\}.\end{gathered}$$

Отсюда имеем

$$\begin{gathered}\big\|x(n)-x_k(n)\big\|\leq2\rho\big\|x(n)-x_k(n)\big\|+\\ +\frac{\rho^k}{2}\Big\{M_1+\Big[\gamma_0\Big(1+M_0\Big)+M_1\Big]\Big(N-n_0-1\Big)\Big\},\end{gathered}\tag{3.11}$$

где $\big\|x(n)-x_k(n)\big\|=\max\Big\{\big\|y(n)-y_k(n)\big\|;\big\|\Delta y(n)-\Delta y_k(n)\big\|\Big\}$ или

$$\big\|\Delta x(n)-\Delta x_k(n)\big\|\leq\frac{\rho^k\Big\{M_1+\Big[\gamma_0\Big(1+M_0\Big)+M_1\Big]\Big(N-n_0-1\Big)\Big\}}{2(1-2\rho)}.\tag{3.12}$$

Так как $\big\|\Delta y(n)-\Delta y_k(n)\big\|\leq\big\|\Delta x(n)-\Delta x_k(n)\big\|$, то из (3.12) следует оценка (3.8).
Доказательство закончено.

С л е д с т в и е 3.1. *Пусть выполняются условия теоремы 3.2. Тогда имеет место следующее соотношение*

$$\lim_{k\to\infty}\left\|\Delta y(n)-\Delta y_k(n)\right\|=0. \tag{3.13}$$

4. Сходимость функционала качества

С учетом последовательностей функций (3.1) и (3.2) функционал (2.3) запишем в виде

$$J[u_k(n)]=\sum_{n=n_0}^{N-1}\tau\Big(n,u(n),\Delta y_k(n)\Big). \tag{4.1}$$

Т е о р е м а 4.1. *Пусть выполняются условия теоремы 3.2. Тогда имеет место следующее предельное соотношение*

$$\lim_{k\to\infty}\Big|J[u(n)]-J_k[u(n)]\Big|=0. \tag{4.2}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. В силу условий теоремы, с учетом (3.8) из (2.3) и (4.1) получаем следующую оценку

$$\Big|J[u(n)]-J_k[u(n)]\Big|\le\frac{L_2\rho^k\Big\{M_1+\Big[\gamma_0\Big(1+M_0\Big)+M_1\Big]\Big(N-n_0-1\Big)\Big\}\Big(N-n_0-1\Big)}{2(1-2\rho)}.$$

Так как $2\rho<1$, то из последней оценки следует справедливость (4.2).
Д о к а з а т е л ь с т в о з а к о н ч е н о.

Пусть $u^\star(n)$ – оптимальное допустимое управление в задаче 2. Предполагается, что для этого оптимального управления справедлива следующая оценка

$$\left\|u^\star(n)-u_k^\star(n)\right\|\le\delta_k(n),\ \lim_{\mu\to\infty}\delta_k(n)=0. \tag{4.3}$$

Из (1.1), (2.1) – (3.2) и (4.1) приходим к следующим соотношениям:

$$\Delta y^\star(n)=p(n)u^\star(n)+\beta(n)q\Big[n-\tau\Big(n,u^\star(n),\Delta y^\star(n)\Big)\Big]\times$$

$$\times y\Big[n-\tau\Big(n,u^\star(n),\Delta y^\star(n)\Big)\Big]+f(n,y^\star(n)); \tag{4.4}$$

$$y^\star(n)\equiv\Theta(n,y^\star)=\phi(n_0)+$$

$$+\sum_{m=n_0}^{n-1}\Big[p(m)u^\star(m)+\beta(m)q\Big[m-\tau\Big(m,u^\star(m),\Delta y^\star(m)\Big)\Big]\times$$

$$\times y^\star\Big[m-\tau\Big(m,u^\star(m),\Delta y^\star(m)\Big)\Big]+f(m,y^\star(m))\Big]; \tag{4.5}$$

$$\Delta y_{k+1}^\star(n)=p(n)u^\star(n)+\beta(n)q\Big[n-\tau\Big(n,u^\star(n),\Delta y_k^\star(n)\Big)\Big]\times$$

$$\times y_k^\star\Big[n-\tau\Big(n,u^\star(n),\Delta y_k^\star(n)\Big)\Big]+f(n,y_k^\star(n)); \tag{4.6}$$

$$\begin{cases}y_0^\star(n)=\phi(n_0)+\sum_{m=n_0}^{n-1}p(m)u^\star(m),\\ y_{k+1}^\star(n)=\Theta(n,y_k^\star),\ k=0,1,2,\dots;\end{cases} \tag{4.7}$$

$$J[u^\star(n)] = \sum_{n=n_0}^{N-1} \tau\big(n, u^\star(n), \Delta y^\star(n)\big); \tag{4.8}$$

$$J_k[u^\star(n)] = \sum_{n=n_0}^{N-1} \tau\big(n, u^\star(n), \Delta y_k^\star(n)\big); \tag{4.9}$$

$$J_k[u_k^\star(n)] = \sum_{n=n_0}^{N-1} \tau\big(n, u_k^\star(n), \Delta y_k^\star(n)\big). \tag{4.10}$$

Т е о р е м а 4.2. *Пусть выполняются условия теоремы 4.1. Если*

$$\tau\big(n, u^\star, y^\star\big) \in Lip\Big\{L_{2\,\big|\,u^\star, y^\star}\Big\}$$

и выполняется условие (4.3), то имеет место следующее соотношение

$$\lim_{k\to\infty}\Big|J[u^\star(n)] - J_k[u_k^\star(n)]\Big| = 0. \tag{4.11}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Формулы (3.13) и (4.2) в случае (4.4) — (4.9) выглядят так

$$\lim_{k\to\infty}\Big|\Delta y^\star(n) - \Delta y_k^\star(n)\Big| = 0, \tag{4.12}$$

$$\lim_{k\to\infty}\Big|J[u^\star(n)] - J_k[u^\star(n)]\Big| = 0. \tag{4.13}$$

Рассмотрим оценку разности $J[u_k^\star(n)] - J_k[u_k^\star(n)]$. В силу условия теоремы, из (4.9) и (4.10) получаем

$$\Big|J[u_k^\star(n)] - J_k[u_k^\star(n)]\Big| \le L_2\left[\big\|u^\star(n) - u_k^\star(n)\big\| + \big\|\Delta y^\star(n) - \Delta y_k^\star(n)\big\|\right]. \tag{4.14}$$

С учетом (4.3) и (4.12) из (4.14) получаем, что справедливо соотношение

$$\lim_{k\to\infty}\Big|J[u_k^\star(n)] - J_k[u_k^\star(n)]\Big| = 0. \tag{4.15}$$

Так как

$$\Big|J[u^\star(n)] - J_k[u_k^\star(n)]\Big| \le \Big|J[u^\star(n)] - J_k[u^\star(n)]\Big| + \Big|J[u_k^\star(n)] - J_k[u_k^\star(n)]\Big|,$$

то, переходя к пределу при $k \to \infty$, с учетом (4.13) и (4.15) получаем (4.11).
Д о к а з а т е л ь с т в о з а к о н ч е н о.

5. Заключение

Аналитическое решение задач оптимального управления процессами, описываемыми дифференциальными уравнениями с нелинейным запаздывающим аргументом, очень сложно. Поэтому на практике используются приближенные методы построения программного и синтезирующего оптимального управления. В данной работе рассматриваются вопросы приближенного решения задачи оптимального управления для одного нелинейного обыкновенного дифференциального уравнения с нелинейным запаздывающим аргументом при начальным условии и с нелинейным критерием оптимальности. При этом используются итерации (4.7) и (4.10). Доказывается сходимость последовательности функционала качества (4.10). В качества примера для уравнения (1.1) составляется математическая модель экономики производственного предприятия.

6. Приложение

Обоснование постановку задачи. Рассмотрим производственный процесс одного предприятия в условиях рыночных отношений. Пусть $u(t)$ – объем продукции предприятия, реализованной к моменту времени t. Его доход к данному моменту времени t составит

$$y(t) = p(t)u(t), \tag{6.1}$$

где $p(t)$ – рыночная цена реализации продукции производимой предприятием в момент времени t.

Из (6.1) видно, что если цена реализации продукции возрастает, то и доход предприятия тоже возрастает к данному моменту времени t. Но, повышение цены может отрицательно отражаться в скорости реализации товара, производимой предприятием.

Путем дифференцирования формулы (6.1) по времени t находим скорость реализации продукции

$$y'(t) = p'(t)u(t) + p(t)u'(t), \tag{6.2}$$

где $p'(t)$ – тенденция формирования ценообразования.

Нас интересует случай, когда $y'(t) > 0$, т. е. с каждым днем больше продукции реализуются. Из формулы (6.2) видно, что это зависит от тенденции формирования ценообразования $p'(t)$ и скорости выпуска продукции $u'(t)$. Но, $p'(t)$ определяется из равновесия спроса и предложения на рынке к моменту времени t.

Скорость выпуска продукции определяется из следующего соотношения

$$u'(t) = \alpha(t)z\big(t - \tau(t)\big), \tag{6.3}$$

где $z(t)$ – функция инвестиций, направленных на расширение производства, $\alpha(t)$ – коэффициент эффективности использования инвестиций, $0 < \alpha(t) < 1$, $0 < t_0 < \tau(t) < t$. Если функция запаздывания $\tau(t)$ меньше будет, то это способствует тому, что скорость выпуска продукции больше становится. Если $\tau(t) = t$, то процесс инвестирования будет останавливаться. Очевидно, что запаздывание $\tau(t)$ зависит от объема продукции $u(t)$ и скорости реализации производимой предприятием продукции $y'(t)$ к моменту времени t

$$\tau(t) = \tau\big(t, u(t), y'(t)\big).$$

Тогда формула (6.3) приобретает вид

$$u'(t) = \alpha(t)z\Big(t - \tau\big(t, u(t), y'(t)\big)\Big), \tag{6.4}$$

Величина инвестиций $z(t)$ является частью дохода

$$z(t) = q(t)y(t), \tag{6.5}$$

где $q(t)$ – доля прибыли в составе дохода, $0 < q(t) < 1$. Величина $q(t)$ характеризует рентабельность производства.

Подставляя (6.5) в (6.4), получаем

$$u'(t) = \alpha(t)q\Big(t - \tau\big(t, u(t), y'(t)\big)\Big)y\Big(t - \tau\big(t, u(t), y'(t)\big)\Big). \tag{6.6}$$

Из формулы (6.6) следует, что величина скорости выпуска продукции взаимосвязана с величиной рентабельности производства. Запаздывание τ характеризуется величиной продукции, накопленных в складах предприятия, и скоростью выпуска продукции к данному моменту времени t.

Подстановка (6.6) в (6.2) дает нам следующее дифференциальное уравнение

$$y'(t) = p'(t)u(t) + \beta(t)q\Big(t - \tau\big(t, u(t), y'(t)\big)\Big)y\Big(t - \tau\big(t, u(t), y'(t)\big)\Big), \tag{6.7}$$

где $\beta(t) = p(t)\alpha(t)$, $0 < \beta(t) < 1$, $0 < q(t) < 1$ – известные функции, $y(t)$ – неизвестная функция, $u(t)$ – функция управления,

$$t - \tau\big(t, u(t), y'(t)\big) \geq t_0 - \eta,\ 0 < \eta = const.$$

В уравнении (6.7) учтем фактор внешнего воздействия $f(t)$. Отметим, что фактор внешнего воздействия чаще всего зависит от дохода самого предприятия. Если не учтем малых и случайных внешних факторов, то дифференциальное уравнение (6.7) приобретает вид

$$y'(t) = p'(t)u(t) + \beta(t)q\Big[t - \tau\big(t, u(t), y'(t)\big)\Big]\times$$
$$\times y\Big[t - \tau\big(t, u(t), y'(t)\big)\Big] + f(t, y(t)).$$

На большом временном отрезке $\Big[t - \tau\big(t, u(t), y'(t)\big); t\Big]$ максимизировать доход предприятия практически невозможно. Поэтому этот вопрос решается путем минимизации функции запаздывания $\tau\big(t, u(t), y'(t)\big)$ управлением объемом продукции на отрезке времени D_T.

Список литературы

1. Александров А. Г., *Оптимальные и адаптивные системы*, Высшая школа, М., 1989, 263 с.
2. Андреев Ю. Н., *Управление конечномерными линейными объектами*, Наука, М., 1976, 424 с.
3. Вязгин В. А., Федоров В. В., *Математические методы автоматизированного проектирования*, Высшая школа, М., 1989, 184 с.
4. Кротов В. Ф., Гурман В. И., *Методы и задачи оптимального управления*, Наука, М., 1973, 448 с.
5. Куропаткин П. В., *Оптимальные и адаптивные управления*, Наука, М., 1980, 228 с.
6. Евтушенко Ю. Г., *Методы решения экстремальных задач и их применение в системах оптимизации*, Наука, М., 1982, 432 с.
7. Срочко В. А., *Итерационные методы решения задач оптимального управления*, Физматлит, М., 2000, 160 с.
8. Тятюшкин А. И., *Численные методы и программные средства оптимизации управляемых систем*, СО "Наука", Новосибирск, 1992, 193 с.
9. Федоренко Р. П., *Приближенное решение задач оптимального управления*, Наука, М., 1978, 488 с.

10. Юлдашев Т. К., “Об одной задаче оптимального управления для нелинейного псевдогиперболического уравнения”, *Моделирование и анализ информационных систем*, **20**:5 (2013), 78 – 89.

11. Юлдашев Т. К., “Приближенное решение задачи оптимального управления для нелинейного псевдопараболического уравнения”, *Вестн. ВоронежГУ. Серия: Системный анализ и информационные технологии*, 2014, № 1, 45 – 51.

12. Yuldashev T. K., “On a summery equation with weak nonlinear right-hand side”, *Advanced Studies in Contemporary Mathematics*, **15**:1 (2007), 95 – 98.

13. Yuldashev T. K., “On solvability and stability of solutions of linear integral and summary equations of first kind”, *Advanced Studies in Contemporary Mathematics*, **17**:1 (2008), 41 – 56.

14. Yuldashev T. K., “On a solvability of nonlinear evolution summary equations with nonlinear deviation”, *Proc. of Jangjeon Math. Society*, **11**:1 (2008), 83 – 88.

15. Yuldashev T. K., “On a solvability of nonlinear summary equation of the third kind”, *Proc. of Jangjeon Math. Soc.*, **16**:1 (2013), 151 – 155.

16. Yuldashev T. K., “On a first order quasilinear partial difference equation”, *Advanced Studies in Contemporary Mathematics*, **23**:4 (2013), 677 – 680.

Approximate solving of differential equations with nonlinear delay and approximate calculation of functionality of quality at known operating influences

© **T. K. Yuldashev**[2]

Abstract. It is considered the questions of approximate solving of differential equations with nonlinear delay and of approximate calculation of functionality of quality at known operating influences. This problem is involved the control bounded by a constant and is contained it as nonlinear function into equation and into functionality of quality. It is considered the case when the variables are integer values. The problem is changed to its discrete analog. For each set of given coordinate and controls the initial value problem is reduced to a summary equation with nonlinear delay. It is proved the existence and uniqueness of solution of the summary equation. It is used the method of successive approximations, combined it with the method of compressing maps. It is estimated the permissible error with respect to state of approximation solution of initial value difference problem. Further it is proved that discrete control sequence is minimizing for the considering problem. As an example it is constructed a simple dynamical model of the economy in the form of differential equations with delay time, which is considered in this paper. This model takes into account the relationship of volume of production and income in certain conditions of market pricing.

Key Words: Differential equation, nonlinear delay, initial value condition, optimal control, approximate solution, dynamical model of economics.

[2] Associate professor of Higher Mathematics Chair, M. F. Reshetnev Siberian State Aerospace University, Krasnoyarsk, tursunbay@rambler.ru