УДК 517.9

Критические параметры плотности вероятности в индуцированных шумом переходах

© **С. Н. Нагорных**[1]

Аннотация. В развитие теории индуцированных шумом переходов [1] рассматриваются необходимые и достаточные условия существования решения уравнения Фоккера-Планка (плотности вероятности) в виде дельта-функции в точке бифуркации уравнения Ферхюльста, критические параметры и связь с теоремой Лиувилля.

Ключевые слова: критические параметры, плотность вероятности, уравнение Фоккера-Планка, уравнение Ферхюльста

Известна работа[1], в которой один критический параметр λ плотности вероятности (ПВ) в индуцированных шумом $\frac{\sigma^2}{2}$ переходах (ИШП) найден из условия $P'_S(x) = 0$ в виде $\lambda = \frac{\sigma^2}{2}$, где $P_S(x)$ - стационарная ПВ, или решение уравнения Фоккера-Планка (УФП). Другое критическое значение параметра $\lambda = 0$ найдено из смены граничных значений интегралов в классификации Гихмана-Скорохода при $\lambda < 0$ и $\lambda > 0$ для ПВ также являющейся решением УФП. Это значение соответствует точке бифуркации $\lambda = 0, x = 0$ уравнения Ферхюльста:

$$\dot{x} = \lambda x + x^2 \tag{1.1}$$

где: x-плотность, например.

Однако решение УФП в $x = 0$ не существует. В [1] ПВ, или решение УФП в $x = 0$ принято в виде дельта-функции $\delta(x)$.В данной работе ищем условия, в том числе критические значения параметров, при которых ПВ, то есть решение УФП в точке $x = 0$ может быть взято в виде $\delta(x)$.

Пусть известно $P_S(x)$ по Стратановичу:

$$P_S(x) = N x^{\frac{2\lambda}{\sigma^2}-1} \exp(\frac{-2x}{\sigma^2}), \tag{1.2}$$

где: $N = (\frac{2}{\sigma^2})^{\frac{2\lambda}{\sigma^2}} / \Gamma(\frac{2\lambda}{\sigma^2}), \Gamma(\frac{2\lambda}{\sigma^2})$-гамма-функция.

Представим (1.2) в виде произведения $a_\epsilon(x)\phi(x)$ согласно [2]:

$$a_\epsilon(x) = x^{\epsilon-1}\epsilon\chi(x) \tag{1.3}$$

$$\phi(x) = \frac{(\frac{\epsilon}{\lambda})^\epsilon}{\Gamma(\epsilon+1)} \exp(-\frac{\epsilon}{\lambda}x), \tag{1.4}$$

где параметр ПВ $\epsilon = \frac{2\lambda}{\sigma^2}, \chi(x)$-функция Хевисайда, $\Gamma(\epsilon+1) = \epsilon\Gamma(\epsilon)$ - гамма функция. Пробной назовем бесконечногладкую финитную функцию $\phi(x)$.

Найдем предел линейного функционала вида:

$$T_\epsilon[\phi(x)] = \int a_\epsilon(x)\phi(x)dx \tag{1.5}$$

при $\epsilon \to 0$ или вида:

$$T_\epsilon[\phi(x)] = \epsilon \int_0^M x^{\epsilon-1}\phi(x)dx \tag{1.6}$$

[1] Доцент кафедры прикладной математики, Нижегородский государственный технический университет им. Р. Е. Алексеева, г. Нижний Новгород; algoritm@sandy.ru

Верхний предел M обусловлен финитностью $\phi(x)$. В силу непрерывности и дифференцируемости $\phi(x)$ (1.4) можно найти в точке $v_x \in (0, x)$

$$\phi(x) = \phi(0) + x\phi'(v_x) \tag{1.7}$$

и переписать (1.6):

$$T_\epsilon[\phi(x)] = \phi(0)\epsilon \int_0^M x^{\epsilon-1}dx + \epsilon \int_0^M x^\epsilon \phi'(v_x)dx \tag{1.8}$$

Первый интеграл стремится к единице при $\epsilon \to 0$. Второй интеграл в силу $|\phi'(x)| < N, N < \infty$ сходится к нулю. Имеем:

$$\lim_{\epsilon \to 0} T_\epsilon[\phi(x)] = \phi(0) \tag{1.9}$$

Выражение (1.9) означает, что $a_\epsilon(x)$ слабо сходится к $\delta(x)$ при $\epsilon \to 0$. В силу (1.7) из (1.5) имеем:

$$P_S(x) = \delta(x) \tag{1.10}$$

Таким образом необходимо (1.10), чтобы $P_S(x)$ (1.2) было асимптотическим решением УФП в точке $x = 0, \lambda = 0$ (1.1).

Пусть известно решение УФП в виде:

$$P(x,t) = \delta(x - b(t)) \tag{1.11}$$

Тогда достаточно задать уравнение более общего вида, чем (1.1):

$$\frac{db(t)}{dt} = v(b(t),t) + v_1(b(t),t) \tag{1.12}$$

Дифференцируя (1.10) по времени t, получаем:

$$\frac{\partial p(x,t)}{\partial t} = -\dot{b}(t)\frac{\partial}{\partial x}\delta(x - b(t)) \tag{1.13}$$

В силу независимости от x вносим $\dot{b}(t)$ под знак $\frac{\partial}{\partial x}$. С учетом выкалывающего свойства $\delta(x)$ множитель $\dot{b}(t)$ становится зависимым от x, что дает УФП [1]:

$$\frac{\partial p}{\partial t} = -\frac{\partial I}{\partial x}, I = P(x,t)[(v(x(t),t) + v_1(x(t),t)], \tag{1.14}$$

где $v = f(x,t)$ - явления переноса или рождения и смерти типа (1.1)

$$v_1 = \frac{\sigma^2}{2}\frac{1}{p(x,t)}\frac{\partial(p(x,t)\xi^2(x,t))}{\partial x}, \tag{1.15}$$

где $\xi^2(x,t)$ - коэффициент диффузии.

Сформулируем (1.1-1.15) в виде теоремы Хорстхемке-Саичева: для существования и пересечения по x решения $P_S(x)$ УФП по Стратановичу в точке $x = 0$ со стационарным решением уравнения Ферхюльста в точке бифуркации $x = 0, \lambda = 0$ необходимо и достаточно, чтобы оно имело вид $\delta(x)$ или $\delta(x - b(t))$ в стационарном или нестационарном случае соответственно.

Следствие 1.2. *При* $\frac{\partial p}{\partial t} = 0, I = 0$ *в точке* $x_0 \neq 0$ $P_S(x) = \delta(x - x_0)$.

С л е д с т в и е 1.3. *При* $\frac{\partial p}{\partial t} = 0$ *и (1.14) типа Стратановича* [1] *наоборот имеем (1.12), например, вида*

$$\dot{x} = (\lambda - \frac{\sigma^2}{2})x - x^2(1 + \frac{\sigma^2}{2}\frac{\partial \ln P}{\partial x}|_{x=x_0}) \tag{1.16}$$

с точкой бифуркации $\lambda = \frac{\sigma^2}{2}, x = 0$. *Эта точка аналогична точке бифуркации ПВ* $P'_S(x) = 0$ *с критическим значением параметра* $\lambda = \frac{\sigma^2}{2}$.

С л е д с т в и е 1.4. *При* $\lambda \to 0$ *и* $\frac{\sigma^2}{2} \to \infty$ *вероятностная несовместность влечет:* $\lambda = \lambda_0 + \sigma\bar{\xi}$, *где* λ_0 *- параметр,* $\bar{\xi}$ *- белый шум. Для трех ПВ (1.10), (1.2) локализация максимальной вероятности возникает при* $\lambda_0 \to 0$, *то есть в окрестности точки бифуркации (1.1) или (1.16), что согласуется с теоремой Кифера* [3].

С л е д с т в и е 1.5. *При* $\frac{\partial p(x,t)}{\partial t} = 0, I(p(x,t), x(t), t) = 0$ *(1.14) получается* $P_S(x)$ *вида (1.2).*

С л е д с т в и е 1.6. *При расширении* $P_S(x,t)$ *до* $P_S(x,\bar{p},t)$, *в стационарном случае следует теорема Лиувилля, где* $\bar{p}$ *- импульс из гамильтоновой механики.*

Список литературы

1. Хорстхемке В., Лефевр Р., *Индуцированные шумом переходы*, Мир., 1987, 397 с.
2. Лапинова С. А., Саичев А. И., Филимонов В. А., *Современные методы прикладной математики (Обобщенные функции и асимптотические методы)*, Нижегородский университет., 2006, 148 с.
3. Кифер Ю. И., “О малых случайных возмущениях некоторых гладких динамических систем”, *Изв. АН СССР*, **38** (1974), 1091.

Critical Parameters of Probability Density in Noise-Induced Transitions.

© **S. N. Nagornykh**[2]

Abstract. Under development of the noise-induced transitions theory all necessary and sufficient conditions of Fokker-Plank equations solutions are considered as delta-function in bifurcation point of Verhulst equation in connection of Liouville theorem. The critical parameters of probability density are estimated.

Key Words: Critical parameters, probability density, Fokker-Plank equations, Verhulst equation.

[2] Docent of the applied mathematics chair, Nizhniy Novgorod State Technical University, Nizhniy Novgorod; algoritm@sandy.ru