УДК 517.938

Хаотическое поведение счетных топологических марковских цепей с мероморфной дзета-функцией

© **М. И. Малкин**[1]

Аннотация. В данной статье рассматриваются счетные топологические марковские цепи (ТМЦ). Предполагается, что любая степень матрицы переходов ТМЦ имеет конечный след и, тем самым, для ТМЦ корректно определена динамическая дзета-функция Артина-Мазура. Кроме того, предполагается, что выполнены два условия: 1) радиус сходимости дзета-функции у подсистем ТМЦ, соответствующих подматрицам с достаточно большими номерами состояний, больше радиуса сходимости $r(A)$ дзета-функции исходной ТМЦ с матрицей переходов A, и 2) дзета-функция ТМЦ мероморфна в некотором диске радиуса, большего $r(A)$. Данные условия являются естественными, т.к. выполняются для счетных ТМЦ, являющихся символическими моделями одномерных кусочно-монотонных отображений с положительной топологической энтропией. В работе показано, что при данных условиях для неразложимой ТМЦ её матрица переходов является $r(A)$-положительной, и, как следствие, дзета-функция ТМЦ имеет простые полюса на окружности $|z| = r(A)$ комплексной плоскости, а ТМЦ обладает основными эргодическими свойствами конечных ТМЦ (в частности, у неё существует и единственна мера максимальной энтропии).

Ключевые слова: топологические марковские цепи, дзета-функция, топологическая энтропия

1. Введение

В данной статье продолжено исследование (см. [8]) динамических и эргодических свойств счетных топологических марковских цепей. Топологические марковские цепи служат символическими моделями для различных классов динамических систем с гиперболической структурой, включая неравномерно гиперболические и частично гиперболические системы, когда фазовое пространство таких систем обычно допускает марковское разбиение (возможно, счётное). К таким классам систем относятся системы, удовлетворяющие аксиоме А С.Смейла, гиперболические бильярды, геометрические модели аттрактора Лоренца, одномерные кусочно-монотонные отображения с положительной топологической энтропией и др. (см. [1], [3],[4], [10], [2], [6]). В частности, Ф. Хофбауэр доказал (см. [5]), что для кусочно-монотонного, кусочно-непрерывного отображения f интервала I с положительной топологической энтропией можно построить конечную или счётную ТМЦ (Ω_A, σ) с матрицей переходов A, такую, что $f : I \to I$ топологически сопряжено с отображением сдвига $\sigma : \Omega_A \to \Omega_A$. Тем самым, изучение топологических и эргодических свойств одномерных кусочно-монотонных отображений с положительной топологической энтропией можно свести к рассмотрению счётных топологических марковских цепей.

В отличие от конечных топологических марковских цепей, пространство Ω_A счетной ТМЦ некомпактно и поэтому возникают проблемы при обобщении результатов теории марковских цепей, в основном — теории Перрона-Фробениуса. Для неразложимой бесконечной матрицей переходов A соответствующая ТМЦ топологически транзитивна, и в этом случае, как показали Д. Вер-Джонс и Б.М. Гуревич (см. [15], [13], [14]) удается частично обобщить результаты теории Перрона-Фробениуса. Однако для ТМЦ с бесконечной матрицей переходов, даже в случае её неразложимости, могут не выполняться

[1] Доцент кафедры дифференциальных уравнений и математического анализа, Нижегородский государственный университет им. Н.И.Лобачевского, Нижний Новгород; malkin@unn.ru

важные эргодические свойства, известные для конечных ТМЦ, такие, как существование и единственность меры с максимальной энтропией. Как следует из работы Б.М. Гуревича, свойством бесконечной матрицы, отвечающим за возможность такого обобщения для счетных ТМЦ, является R-положительность матрицы переходов, где R — параметр сходимости матрицы, совпадающий (см. [14], [8]) с радиусом сходимости $r(A)$ дзета-функции и со значением $exp(-h_{top}(A)$, где $h_{top}(A)$ — топологическая энтропия ТМЦ. Мы доказываем в данной статье, что это важное свойство R-положительности имеет место для ТМЦ, у которых дзета-функция обладает естественными свойствами, и, в частности, для ТМЦ, являющихся символическими моделями кусочно-монотонных, кусочно-непрерывных одномерных отображений с положительной топологической энтропией.

В статье рассматриваются счетные ТМЦ с неразложимыми матрицами переходов A. Условия, накладываемые на матрицы переходов, следующие. Предполагается, что любая степень матрицы переходов имеет конечный след и, тем самым, для ТМЦ корректно определена динамическая дзета-функция Артина-Мазура $\zeta_A(z)$. Кроме того, предполагается, что радиус сходимости дзета-функции у подсистем ТМЦ, соответствующих подматрицам с достаточно большими номерами состояний, больше радиуса сходимости $r(A)$ дзета-функции исходной ТМЦ; точнее, предполагается, что

$$\lim_{n\to\infty} r(\hat{A}|_n) > r(A), \qquad (*)$$

где $\hat{A}|_n$ — это подматрица матрицы A, у которой (бесконечное) индексное множество есть $\{n, n+1, \dots\}$. Данное условие означает, что "хвостовая"подматрица матрицы переходов становится всё более разреженной, когда индексы принимают достаточно большие значения. Второе условие, которое мы будем предполагать выполненным, состоит в следующем:

$$\zeta_{\hat{A}|_n}(z) \text{ мероморфна в диске } |z| < r(A)+\varepsilon \text{ для некоторого } \varepsilon > 0 \text{ при всех } n \qquad (**)$$

Отметим, что указанные условия являются естественными, т.к. они выполняются для счетных ТМЦ, являющихся символическими моделями одномерных кусочно-монотонных отображений с положительной топологической энтропией. Более того, для таких отображений условие (**) на самом деле выполняется в более сильной форме (см. [5]), а именно, можно показать мероморфность указанных дзета-функций в открытом единичном диске. В настоящей работе показано, что при данных условиях матрица переходов является R-положительной. Тем самым, для ТМЦ имеют место сильные хаотические (эргодические) свойства и в частности, в ТМЦ обладает единственной мерой с максимальной энтропией, причем эта мера может быть эффективно вычислена в терминах собственных векторов матрицы ТМЦ. Другими словами, мероморфность дзета-функции гарантирует возможность существенного продвижения в теории Перрона-Фробениуса в случае бесконечных матриц. Кроме того, в работе показано, что дзета-функция $\zeta_A(z)$ имеет простые полюса на окружности $|z| = r(A)$ и получена аппроксимационная оценка числа периодических точек больших периодов.

2. Предварительные сведения и основная теорема

Рассмотрим бесконечную матрицу $A = (a_{i,j})_{i,j=1}^{\infty}$ из нулей и единиц. Данной матрице следующим образом ставится в соответствие счетная топологическая марковская цепь (ТМЦ). Пусть $\mathbf{N} = \{1, 2, \dots\}$ — множество символов (алфавит) и пусть $\Omega_A \subset \mathbf{N}^{\mathbf{Z}}$ — множество всех бесконечных в обе стороны последовательностей $\underline{x} = (x_n)_{n=-\infty}^{+\infty}$ натуральных чисел, для которых при всех $n \in \mathbf{Z}$ выполняется

$$a_{x_n, x_{n+1}} = 1.$$

Метрика ρ на пространстве Ω_A вводится так:

$$\rho(\underline{x}, \underline{y}) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{1}{2^{|n|}} \mid \frac{1}{x_n} - \frac{1}{y_n} \mid . \tag{2.1}$$

ТМЦ (Ω_A, σ) есть топологическое (метрическое) пространство Ω_A, на котором действует отображение сдвига $\sigma \colon \Omega_A \to \Omega_A$, задаваемое формулой $\sigma(\underline{x}) = \underline{y}$, где $y_n = x_{n+1}$ для всех $n \in \mathbf{Z}$. Очевидно, метрика ρ согласована с топологией прямого (тихоновского) произведения на пространстве $\mathbf{N}^{\mathbf{Z}}$; здесь предполагается, что множество $\mathbf{N}$ наделено дискретной топологией.

Таким образом, пространство Ω_A некомпактно. Чтобы компактифицировать Ω_A, рассмотрим расширенный алфавит с дополнительным символом ∞, т.е. $\overline{\mathbf{N}} = \mathbf{N} \bigcup \{\infty\}$. Метрика на $\overline{\mathbf{N}}$ задается по формуле $d(n, m) = \mid \frac{1}{n} - \frac{1}{m} \mid$, где естественно предполагается, что $\frac{1}{\infty} = 0$. Далее рассматривается замыкание пространства Ω_A в $\overline{\mathbf{N}}^{\mathbf{Z}}$, т.е. $\overline{\Omega}_A = Clos(\Omega_A)$. Легко видеть, что на пространство $\overline{\Omega}_A$ корректно продолжается метрика ρ, задаваемая формулой (1), и, кроме того, $\overline{\Omega}_A$ является σ-инвариантным.

Мы всюду без ограничения общности предполагаем, что A — бесконечная матрица из нулей и единиц, не имеющая ни нулевых строк, ни нулевых столбцов (иначе соответствующий символ следует исключить из алфавита). Далее, мы предполагаем, что для матрицы A определены (конечны) все положительные степени, т.е. A^k, i.e. $a_{i,j}^{(k)} < +\infty$ при любых i, j, k. Для $I \subset \mathbf{N}$ мы обозначаем через $A|_I$ подматрицу матрицы A с индексным множеством I. Для простоты записи мы обозначаем через $A|_n$ конечную подматрицу $A|_{\{1,2,\ldots,n\}}$, а через $\hat{A}|_k$ — бесконечную подматрицу $A|_{\{k,k+1,\ldots\}}$.

Матрица A называется неразложимой, если для любых $i, j \in \mathbf{N}$ найдется натуральное число k такое, что $a_{i,j}^{(k)} > 0$. В противном случае матрица A разложима. Точно так же, как и в случае конечных ТМЦ (см., например, [11]), доказывается, что неразложимость матрицы A эквивалентна транзитивности системы (Ω_A, σ). Для неразложимой матрицы A обозначим через $d = d(A)$ её индекс цикличности (период). В случае $d > 1$ множество индексов $\mathbf{N}$ можно разбить на d подмножеств $I_1, I_2, \ldots I_d$ так, что для любых двух индексов $i \in I_s, j \in I_t$ будет существовать $k > 0$, удовлетворяющее условию $a_{i,j}^{(k)} > 0$, в том и только в том случае, когда $k \equiv (s-t) \mathbf{mod}\ d$.

Пусть $h(A)$ — топологическая энтропия сдвига σ на компактификации $\overline{\Omega}_A$. Для конечной матрицы B обозначим через $h(B)$ топологическую энтропию ограничения $h(\sigma|\Omega_B)$. Б.М. Гуревич показал (см. [13], [14]), что для неразложимой матрицы A существует последовательность конечных неразложимых подматриц $A|_{J_n}$, такая, что

$$J_n \subset J_{n+1} \text{ для всех } n, \ \bigcup J_n = \mathbf{N} \tag{2.2}$$

и выполняется

$$h(A) = \lim_{n\to\infty} h(A|_{J_n}) = \lim_{n\to\infty} h(A|_n). \tag{2.3}$$

В работе [7] доказано, что равенство $h(A) = \lim_{n\to\infty} h(A|_n)$ справедливо и для разложимых матриц. Для разложимой матрицы A и индекса $i \in \mathbf{N}$ обозначим через $I(i)$ максимальное подмножество (возможно, пустое) $J \subset \mathbf{N}$ такое, что $i \in J$ и матрица $A|_J$ неразложима, т.е.

$$I(i) = \{j \in \mathbf{N} \colon \exists k_1 > 0, \exists k_2 > 0 \text{ т.ч. } a_{ij}^{(k_1)} > 0, a_{ji}^{(k_2)} > 0\}.$$

Обозначим для простоты матрицу $A|_{I(i)}$ через A_i. Заметим, что если множество $I(i)$ конечно, то $\overline{\Omega}_{A_i} = \Omega_{A_i}$, где запись $\overline{\Omega}_{A_i}$ означает замыкание множества Ω_{A_i} в пространстве $\overline{\Omega}_A$.

В работе [7] показано также, что неблуждающее множества компактификации $(\overline{\Omega}_A, \sigma)$ имеет следующее разложение (в формулировке использовано обозначение $(\infty) = (\ldots \infty\infty\infty \ldots) \in \overline{\mathbf{N}}^{\mathbf{Z}}$):

Теорема 2.1. *Неблуждающее множество отображения сдвига σ на компактификации $\overline{\Omega}_A$ представляется в виде*

$$NW(\sigma|\overline{\Omega}_A) = (\bigcup \overline{\Omega}_{A_i}) \bigcup P,$$

где $P = (\infty)$, когда индексное множество $I(i)$ конечно для всех i, и $P = \emptyset$ в противном случае.

Нам потребуются некоторые соотношения для производящих функций, ассоциированных с матрицей A. Для произвольных индексов i, j эти функции определяются следующим образом):

$$T_{i,j}(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_{i,j}^{(k)} z^k; \quad F_{i,j}(z) = \sum_{k=0}^{\infty} f_{i,j}^{(k)} z^k; \quad L_{i,j}(z) = \sum_{k=0}^{\infty} l_{i,j}^{(k)} z^k \tag{2.4}$$

где $a_{i,j}^{(0)} = \delta_{i,j}; f_{i,j}^{(0)} = l_{i,j}^{(0)} = 0; a_{i,j}^{(1)} = f_{i,j}^{(1)} = l_{i,j}^{(1)} = a_{i,j}$

$$a_{i,j}^{(k+1)} = \sum_{n} a_{i,n}^{(k)} a_{n,j}; \quad f_{i,j}^{(k+1)} = \sum_{n \neq j} a_{i,n} f_{n,j}^{(k)}; \quad l_{i,j}^{(k+1)} = \sum_{n \neq i} l_{i,n}^{(k)} a_{n,j}$$

Справедливы соотношения (см. [15]):

$$T_{i,i}(z) = 1/(1 - F_{i,i}(z)) = 1/(1 - L_{i,i}(z)) \tag{2.5}$$

$$T_{i,j}(z) = T_{i,i}(z) \cdot L_{i,j}(z) = F_{i,j}(z) \cdot T_{j,j}(z), \quad (i \neq j) \tag{2.6}$$

$$F_{i,j}(z) = z a_{i,j}(1 - F_{j,j}(z)) + z \sum_{k=0}^{\infty} a_{i,k} F_{k,j}(z); \; L_{i,j}(z) = z \sum_{k=0}^{\infty} L_{i,k}(z) a_{k,j} + z a_{i,j}(1 - L_{i,i}(z)) \tag{2.7}$$

$$\sum_{k=0}^{\infty} L_{i,k}(z) F_{k,i}(z) = z \frac{dF_{ii}(z)}{dz} - F_{ii}(z) \cdot (1 - F_{ii}(z)) \tag{2.8}$$

Мы будем также обозначать данные функции $T_{i,j}(A, z), F_{i,j}(A, z), L_{i,j}(A, z)$, когда требуется подчеркнуть зависимость от A. Напомним некоторые свойства неразложимых матриц (см. [15]). Для любых $i, j \in \mathbf{N}$ существует предел $\lim(a_{i,j}^{(k)})^{-1/k}$, когда $k \to \infty$, находясь в таком подмножестве индексов I_m, для которого не все степени $a_{i,j}^{(k)}$ равны нулю. Этот предел, скажем, R, не зависит от i, j и, кроме того, он равен радиусу сходимости ряда $\sum_{k=1}^{\infty} a_{i,j}^{(k)} z^k$. Число $R = R(A)$ называется *параметром сходимости* матрицы A.

Неразложимая матрица A с параметром сходимости R называется *R-рекуррентной*, если ряд $\sum_{k=1}^{\infty} a_{i,j}^{(k)} R^k$ расходится, т.е. $T_{i,j}(R) = \infty$. Если, кроме того, $a_{i,j}^{(k)} R^k$ не стремится к нулю при $k \to \infty$, то A называется *R-положительной* (и это определение корректно, т.к. не зависит от i, j в силу неразложимости матрицы A). При доказательстве основной теоремы будет использован такой результат из [7].

Лемма 2.1. *Пусть A — R-рекуррентная матрица и пусть $B = A|_J$ — её R-рекуррентная подматрица. Тогда $B = A$.*

Далее мы будеи предполагать, что для любого k след $N_k(A)=\sum_{i=1}^{\infty} a_{i,i}^{(k)}$ конечен. Легко видеть, что $N_k(A)$ равно числу неподвижных точек отображения $\sigma^k|\Omega_A$. Для системы (Ω_A,σ) дзета-функция Артина-Мазура $\zeta_A(z)$ определяется следующим образом:

$$\zeta_A(z)=exp(\sum_{k=1}^{\infty}\frac{N_k(A)z^k}{k}). \tag{2.9}$$

Другое представление дзета-функции дается формулой :

$$\zeta_A(z)=\prod_{orb}(1-z^{p(orb)})^{-1} \tag{2.10}$$

где бесконечное произведение берется по всем периодическим орбитам системы (Ω_A,σ), а $p(orb)$ обозначает период соответствующей орбиты. Из этого представления вытекает следующая лемма.

Л е м м а 2.2. *Для бесконечной матрицы A выполняется:*

$$\zeta_A(z)=\prod\zeta_{A_i}(z),$$

где произведение берется по всем максимальным неразложимым подматрицам $A_i = A|_{I(i)}$.

Пусть $r(A)$ — радиус сходимости ряда (11), т.е. $r(A)=(\overline{\lim}_{k\to\infty}\sqrt[k]{N_k(A)})^{-1}$. Из определений радиуса и параметра сходимости с помощью приведенных лемм нетрудно получить следующий результат.

Л е м м а 2.3. *Если A — неразложимая бесконечная матрица, то $r(A)\le R(A)<1$.*

Обобщением на разложимые матрицы является следующая лемма.

Л е м м а 2.4. *Для бесконечной матрицы A выполняется*

$$r(A)\le\exp(-h(A)). \tag{2.11}$$

Для произвольной матрицы B (над $\mathbf{C}$) обозначим через $B^*_{i,j}$ подматрицу, которая получается из B удалением i-ой строки и j-го столбца. Аналогично, для подмножеств $I,J\subset\mathbf{N}$ пусть $B^*_{I,J}$ обозначает матрицу, которая получается из B удалением строк и столбцов с индексами, принадлежащими I и J соответственно. Из этих определений нетрудно получить соотношение:

$$\zeta_A(z)=\zeta_{A^*_{i,i}}(z)\cdot T_{ii}(z). \tag{2.12}$$

Теперь рассмотрим бесконечные подматрицы $\hat{A}|_n=A|_{\{n,n+1\ldots\}}$. Очевидно, что $r(\hat{A}|_n)\le r(\hat{A}|_{n+1})$ при всех n. Мы будем использовать естественное ограничение на матрицу A, определяемое условием:

$$\lim_{n\to\infty} r(\hat{A}|_n)>r(A). \qquad (*)$$

Основная теорема о совпадении инвариантов энтропийного типа для счетных ТМЦ с матрицей переходов, удовлетворяющей условию $(*)$, состоит в следующем (см. [8]).

Теорема 2.2. *Если матрица переходов A удовлетворяет условию $(*)$, то*

$$r(A) = \exp(-h(A)) = \lim_{n\to\infty} r(A|_n) = \inf_j R_{j,j}(A) = \inf_i R(A_i) = \inf_i r(A_i),$$

и более того, все нижние грани в указанных соотношениях достигаются.

Теперь мы будем предполагать, что выполнено и второе условие — условие (**)

$$\zeta_{\hat{A}|_n}(z) \text{ мероморфна в диске } |z| < r(A) + \varepsilon \text{ для некоторого } \varepsilon > 0 \text{ при всех } n \qquad (**)$$

При этих условиях докажем основную теорему данной работы.

Теорема 2.3. *Пусть A — неразложимая матрица периода d с параметром сходимости R и пусть для A выполняются условия $(*)$ и $(**)$. Тогда*
i) A является R-положительной матрицей;
ii) дзета-функция $\zeta_A(z)$ имеет ровно d полюсов на окружности $|z| = R$, а именно, $z_j = R\exp(2\pi ij/d), j = 0, 1, \ldots, d-1$, и все эти полюса простые.

Доказательство. Пусть n_0 — наименьшее натуральное число, для которого $r(\hat{A}|_{n_0}) > r(A) = R$. Тогда $\zeta_{\hat{A}|_{n_0}}(R) \neq \infty$, и $\zeta_A(R) = \infty$, поскольку R — полюс дзета-функции $\zeta_A(z)$. Из условия $(**)$ следует, что

$$\zeta_{\hat{A}|_{n_0-1}}(R) = \infty \text{ и } \zeta_{\hat{A}|_{n_0}}(R) \neq \infty$$

Обозначим $B = \hat{A}|_{n_0-1}$, тогда $r(B) = R$. Поскольку матрица B удовлетворяет условию $(*)$, из теоремы 2.2. следует, что существует неразложимая подматрица B_{i_0} матрицы B, обладающая такими свойствами

$$R(B_{i_0}) = r(B_{i_0}) = R, \quad \zeta_{B_{i_0}}(R) = \infty$$

Сначала покажем, что матрица B_{i_0} является R-рекуррентной. Пусть $C = B_{i_0}$, а подматрица $C^*_{1,1}$ получена из C удалением первой строки и первого столбца. Таким образом, $C^*_{1,1}$ есть подматрица матрицы $\hat{A}|_{n_0}$, и поэтому $\zeta_{C^*_{1,1}}(R) < \infty$. Из соотношения (2.12) имеем $T_{1,1}(C, z) = \zeta_C(z)/\zeta_{C^*_{1,1}}(z)$ для всех z из диска $|z| < r(C) = R$. Следовательно, $\lim_{x\uparrow R} T_{1,1}(C, x) = \infty$. Таким образом, ряд $\sum_{k=0}^{\infty} c^{(k)}_{1,1} R^k$ расходится, что означает R-рекуррентность матрицы C. Поскольку C — подматрица матрицы A, отсюда следует, что $T_{i,i}(A, R) = \infty$ для некоторого i (а значит, в силу неразложимости, для всех i).

Из леммы 2 следует, что C не может быть собственной подматрицей матрицы A. Таким образом, $C = A$ и $n_0 = 2$. Следовательно, $r(\hat{A}|_2) = r(A^*_{1,1}) > R$, и поэтому функция

$$T_{1,1}(A, z) = \zeta_A(z)/\zeta_{A^*_{1,1}}(z) \tag{2.13}$$

продолжается до мероморфной функции в открытом единичном диске. Более того, функции $\zeta_A(z)$ и $T_{1,1}(z)$ имеют на окружности $|z| = R$ одни и те же полюся с одинаковыми кратностями. В частности, особенность $z = R$ функции $T_{1,1}(z)$ есть полюс и поэтому последовательность $a^{(k)}_{11} R^k$ не стремится к нулю при $k \to \infty$. Таким образом, матрица A является R-положительной.

Докажем теперь второе утверждение теоремы. Сначала рассмотрим случай, когда A — апериодическая матрица, и пусть z_0 — полюс дзета-функции $\zeta_A(z)$ на окружности

$|z| = R$. Тогда из равенства (2.13) следует, что z_0 — полюс функции $T_{1,1}(z)$, а из (5) следует, что z_0 — полюс функции $1 - F_{1,1}(z)$. Таким образом,

$$1 = |\sum_{k=0}^{\infty} f_{1,1}^{(k)} z_0^k| \leq \sum_{k=o}^{\infty} f_{1,1}^{(k)} R^k = 1$$

, поскольку A является R-рекуррентной по доказанному выше. Отсюда следует, что $z_0^k = R^k$ для всех k таких, что $f_{1,1}^{(k)} \neq 0$. Теперь мы можем доказать, что НОД $k\colon f_{1,1}^{(k)} \neq 0\} = 1$. От противного, если этот НОД равен некоторому $k_0 > 1$, то ряд $F_{1,1}(z)$ имеет ненулевые коэффициенты лишь при степенях z, кратных k_0. Но это означало бы, что ряд

$$T_{1,1}(z) = \frac{1}{1 - F_{1,1}(z)} = \sum_{k=0}^{\infty} (F_{1,1}(z))^k$$

имеет ненулевые коэффициенты лишь при этих степенях z. Однако это противоречит апериодичности матрицы A. Таким образом, существуют положительные целые $k_1, \ldots, k_t$ такие, что НОД $(k_1, \ldots, k_t) = 1$ и $z_0^{k_i} = R^{k_i}, i = 1, \ldots, t$. Поэтому $k_1 m_1 + \cdots + k_t m_t = 1$ для некоторых целых $m_1, \ldots, m_t$, и значит,

$$z_0 = z_0^{k_1 m_1 + \cdots + k_t m_t} = (z_0^{k_1})^{m_1} \cdots (z_0^{k_t})^{m_t} = R^{k_1 m_1 + \cdots + k_t m_t} = R$$

Следовательно, дзета-функция $\zeta_A(z)$ имеет единственный полюс на окружности $|z| = R$, и этот полюс есть R. Осталось показать что полюс $z = R$ простой. Из (10),(11) и соотношения $F_{1,1}(R) = 1$ имеем

$$\lim_{x \uparrow R} (R - x) \zeta_A(x) = \zeta_{A_{1,1}^*}(R) \cdot \lim_{x \uparrow R} (R - x) T_{1,1}(x) =$$

$$\zeta_{A_{1,1}^*}(R) / \lim_{x \uparrow R} \frac{1 - F_{1,1}(x)}{R - x} = \zeta_{A_{1,1}^*}(R) / (\frac{dF_{1,1}(x)}{dx}|_{x=R-0})$$

Поскольку производная $\frac{dF_{1,1}(x)}{dx}$ в точке R не равна нулю для R-положительной матрицы (см. критерий R-положительности в работе [15]), доказательство в апериодическом случае завершено.

Пусть теперь A — периодическая матрица периода d и пусть $I_0, I_1, \ldots, I_{d-1}$ её индексные множества такие, что $\sigma(\Omega_j) = \Omega_{(j+1)\mathbf{mod}\ d}$, где $\Omega_j = \{\underline{x} = (x_n) \in \Omega_A \colon x_0 \in I_j\}, j = 0, 1, \ldots, d - 1$. Тогда σ топологически сопрягает $\sigma^d|\Omega_j$ с $\sigma^d|\Omega_{j+1}$. Отсюда следует, что $\zeta_A(z) = \zeta_{A^d|_{I_j}}(z^d)$ при всех j. Поскольку матрица $A^d|_{I_j}$ апериодична, результат следует из доказанного результата в апериодическом случае.

Доказательство закончено.

Следствие 2.1. *В условиях теоремы 7*

$$\lim_{k \to \infty} N_{kd}(A) R^{kd} = d$$

Доказательство. Напомним следующее утверждение из работы [9]: если дзета-функция $\zeta(z)$ продолжается до мероморфной функции в некотором диске disc $|z| < R + \varepsilon$, где R — радиус сходимости $\zeta(z)$, и если $z_1, \ldots, z_s$ — её полюса на окружности $|z| = R$ с кратностями $a_1, \ldots, a_s;$, то $N_k = a_1 z_1^{-k} + \ldots + a_s z_s^{-k} + o((R + \varepsilon)^{-k})$. Таким образом, следствие вытекает из теоремы 7 и данного утверждения.

Доказательство закончено.

Работа выполнена при поддержке РФФИ, грант 12-01-00672.

Список литературы

1. R. Bowen., *Equlibrium states and the ergodic theory of Anosov diffeomorphisms. Lecture Notes Math. 470*, Springer-Verlag, Berlin-New York, 1975.

2. W. de Melo, S. van Strien, *One-Dimensional Dynamics*, Springer-Verlag, New York, 1993.

3. Л. А. Бунимович, Н. И. Чернов, Я. Г. Синай, “Марковские разбиения двухмерных гиперболических биллиардов”, *УМН*, **45** (1990), 97-134.

4. Y. Guivarch, J. Hardy, “Theorem limites pour une classe de chaines de Marcov et applications aux classe de chaines de Marcov et applications aux diffeomorphismes d’Anosov”, *Ann. Inst. H.Poincare Probab. Statist.*, **24** (1988), 73-98.

5. F. Hofbauer, “On intrinsic ergodicity of piecewise monotone transformations with positive entropy”, *Israel J. Math.*, **34** (1979), 213-236.

6. M. Malkin, “On continuity of entropy of discontinuous mappings of the interval”, *Selecta Mathematica Sovietica*, **8** (1989), 131-139.

7. М.И. Малкин, “Разложение неблуждающего множества для нетранзитивных счетных топологических марковских цепей”, *Журнал СВМО*, **15**:2 (2013), 49-54.

8. М.И. Малкин, “Инварианты энтропийного типа для нетранзитивных счетных топологических марковских цепей”, *Журнал СВМО*, **15**:4 (2013), 148-155.

9. J. Milnor, W. Thurston, *On iterated maps of the interval. Lec. Notes Math. 1342*, Springer-Verlag, New York, 1988.

10. В.С. Афраймович, В.В. Быков, Л.П. Шильников, “О притягивающих негрубых предельных множествах типа аттрактора Лоренца”, *Труды ММО*, **44** (1982), 150-212.

11. А.Б. Каток, Б. Хассельблат, *Введение в современную теорию динамических систем*, Факториал, М., 1999.

12. M.-C. Li, M. Malkin, “Smooth symmetric and Lorenz models for unimodal maps”, *Int. Jour. of Bifurcation and Chaos*, **13** (2003), 3353-3372.

13. Б.Н. Гуревич, “Топологическая энтропия счетной цепи Маркова”, *ДАН СССР*, **187** (1969), 715-718.

14. Б.Н. Гуревич, “Энтропия сдвига и марковские меры в пространстве счетного графа”, **192** (1970), 963-965.

15. D. Vere-Jones, “Ergodic properties of nonnegative matrices”, *Pacific Journ. Math.*, **22** (1967), 361-386.

Chaotic behavior countable topological Markov chains with meromorphic zeta function

© M. I. Malkin[2]

Abstract. Countable topological Markov chains (TMC) are considered. It is assumed that any power of the transition matrix of TMC has finite trace and thus, for TMC, the dynamical Artin-Mazur zeta function is well-defined. Furthermore, it is assumed that the following two conditions are satisfied: 1) the radius of convergence of zeta functions for subsystems of TMC corresponding to submatrices with sufficiently large indexes is greater than $r(A)$, the radius of convergence of zeta function of original TMC, and 2) zeta function is meromorphic in a disk of radius greater than $r(A)$. These conditions are natural because they take place for countable TMC which are the symbolic models of one-dimensional piecewise-monotone maps with positive topological entropy. We show that under these conditions, the transition matrix of irreducible TMC is $r(A)$-positive and, as a consequence, zeta function of TMC has simple poles on the circle $|z| = r(A)$ of the complex plane, and so, TMC has principal ergodic properties of finite TMC (in particular, there exists a unique measure of maximal entropy).

Key Words: topological Markov chains, zeta function, topological entropy

[2] Associate Professor of Department of differential equations and mathematical Analysis, Nizhny Novgorod State University, Nizhny Novgorod; malkin@unn.ru.