УДК 517.9

Задача на собственные значения для оператора Лапласа в s-мерном шаре в $\mathbb{R}^{s+1}$ со смещениями в производных II

© А. В. Герасимов[1], Б. В. Логинов[2], Н. Н. Юлдашев[3]

Аннотация. В классе непрерывных и непрерывно дифференцируемых до 2-го порядка функций рассматривается задача на собственные значения для оператора Лапласа в s-мерном единичном шаре Ω со смещениями в производных по радиусам концентрических сфер радиусов $0 < r_0 < 1$ и 1, $u \in C^{2+\alpha}(\Omega)$ и $\frac{\partial u(r_0,\Theta)}{\partial r} = \frac{\partial u(1,\Theta)}{\partial r}$. В предыдущей работе авторов [1] были найдены собственные значения и при $s = 2$ собственные и присоединенные функции (жордановы цепочки) прямой задачи; причём их длина не превышает 3-х. В данной работе вычислены жордановы цепочки сопряжённой задачи при $s = 2$, прямой и сопряжённой задач при $s > 2$, и доказано, что в случае $s > 2$ они обрываются на вторых элементах.

Ключевые слова: оператор Лапласа, единичный шар в $\mathbb{R}^{s+1}$, собственные значения, собственные и присоединенные функции, жордановы цепочки, прямая и сопряжённая задачи при $s = 2$ и $s > 2$.

1. Введение

Данная работа является непосредственным продолжением предыдущей работы [1], краткое содержание которой дано в аннотации.

Следует заметить, что в работе [1] третий элемент ЖЦ вычислен в предположении кратного собственного значения. Поэтому требуется пересчет 3-го элемента ЖЦ прямой задачи.

2. Вычисление 3-го элемента ЖЦ прямой задачи ($s = 2$) в условиях $f(\alpha) = 0$, $f'(\alpha) = 0$, $f''(\alpha) = 0$

$$f(\alpha) = J'_n(\alpha) - J'_n(\alpha r_0) = 0, \tag{2.1}$$

$$f'(\alpha) \cong (n^2 - \alpha^2) r_0 J_n(\alpha) + (r_0^2\alpha^2 - n^2) J_n(\alpha r_0) = 0, \tag{2.2}$$

$$f''(\alpha) \cong 2(r_0 J_n(\alpha r_0) - J_n(\alpha)) + \alpha(r_0^2 - 1) J'_n(\alpha) = 0, \tag{2.3}$$

где «$\cong$» означает «с точностью до постоянного множителя».

$X^{(3)}(r)$ является решением неоднородного уравнения Бесселя с условиями смещения и гладкости

[1] Аспирант кафедры прикладной математики, дифференциальных уравнений и теоретической механики, Мордовский государственный университет им. Н.П. Огарева, г. Саранск; gerasimov_artyom@mail.ru.

[2] Профессор кафедры высшей математики, Ульяновский государственный технический университет, г. Ульяновск; bvllbv@yandex.ru.

[3] Доцент кафедры высшей математики, Ташкентский институт текстильной и легкой промышленности, г. Ташкент; nurilla1956@mail.ru.

$$X^{(3)\prime\prime}(r)+\frac{1}{r}X^{(3)\prime}(r)+\left(\alpha^2-\frac{n^2}{r^2}\right)X^{(3)}(r)=-\frac{r}{2\alpha}J_n'(\alpha r),$$
$$u\in C^{2+\alpha}(\Omega),\ \Omega=\{r,\theta|r\le 1\},\ \frac{\partial u(r_0,\theta)}{\partial r}=\frac{\partial u(1,\theta)}{\partial r}. \tag{2.4}$$

Согласно методу Лагранжа, решение (2.4) разыскивается в виде

$$X^{(3)}(r)=\begin{cases}C_{11}^{(3)}(r)J_n(\alpha r)+C_{12}^{(3)}(r)N_n(\alpha r), & 0\le r\le r_0,\\ C_{21}^{(3)}(r)J_n(\alpha r)+C_{22}^{(3)}(r)N_n(\alpha r), & r_0\le r\le 1,\end{cases}$$

где на левом полуинтервале
$C_{11}^{(3)}(r)=\frac{\pi}{4\alpha}\int\limits_0^r\rho^2J_n'(\alpha\rho)N_n(\alpha\rho)d\rho$, $C_{12}^{(3)}(r)=-\frac{\pi}{4\alpha}\int\limits_0^r\rho^2J_n'(\alpha\rho)J_n(\alpha\rho)d\rho$,
$C_{120}^{(3)}=0$, т.к. $|X^{(3)}(r)|<\infty$.

Следовательно,
$C_{11}^{(3)}(r)=-\frac{r^2}{8\alpha^2}+\frac{\pi n^2}{8\alpha^4}J_n(\alpha r)N_n(\alpha r)-\frac{\pi}{8\alpha^2}r^2J_n'(\alpha r)N_n'(\alpha r)+C_{110}^{(3)}$,
$C_{12}^{(3)}(r)=-\frac{\pi n^2}{8\alpha^4}J_n^2(\alpha r)+\frac{\pi}{8\alpha^2}r^2J_n'^2(\alpha r)$.

Аналогично, на правом полуинтервале
$C_{21}^{(3)}(r)=\frac{\pi}{4\alpha}\int\limits_{r_0}^r\rho^2J_n'(\alpha\rho)N_n(\alpha\rho)d\rho$, $C_{22}^{(3)}(r)=-\frac{\pi}{4\alpha}\int\limits_{r_0}^r\rho^2J_n'(\alpha\rho)J_n(\alpha\rho)d\rho$.

Следовательно,
$C_{21}^{(3)}(r)=-\frac{r^2}{8\alpha^2}+\frac{\pi n^2}{8\alpha^4}J_n(\alpha r)N_n(\alpha r)-\frac{\pi}{8\alpha^2}r^2J_n'(\alpha r)N_n'(\alpha r)+\frac{r_0^2}{8\alpha^2}-\frac{\pi n^2}{8\alpha^4}J_n(\alpha r_0)N_n(\alpha r_0)+$
$+\frac{\pi r_0^2}{8\alpha^2}J_n'(\alpha)N_n'(\alpha r_0)+C_{210}^{(3)}$,
$C_{22}^{(3)}(r)=-\frac{\pi n^2}{8\alpha^4}J_n^2(\alpha r)+\frac{\pi}{8\alpha^2}r^2J_n'^2(\alpha r)+\frac{\pi n^2}{8\alpha^4}J_n^2(\alpha r_0)-\frac{\pi r_0^2}{8\alpha^2}J_n'^2(\alpha)+C_{220}^{(3)}$.

Таким образом, на левом полуинтервале
$\underset{0\le r\le r_0}{X^{(3)}(r)}=-\frac{1}{4\alpha^3}rJ_n'(\alpha r)-\frac{1}{8\alpha^2}r^2J_n(\alpha r)+C_{110}^{(3)}J_n(\alpha r)$,
и на правом —
$\underset{r_0\le r\le 1}{X^{(3)}(r)}=-\frac{1}{4\alpha^3}rJ_n'(\alpha r)-\frac{1}{8\alpha^2}r^2J_n(\alpha r)+\frac{r_0^2}{8\alpha^2}J_n(\alpha r)-\frac{\pi n^2}{8\alpha^4}J_n(\alpha r_0)N_n(\alpha r_0)J_n(\alpha r)+$
$+\frac{\pi r_0^2}{8\alpha^2}J_n'(\alpha)N_n'(\alpha r_0)J_n(\alpha r)+\frac{\pi n^2}{8\alpha^4}J_n^2(\alpha r_0)N_n(\alpha r)-\frac{\pi r_0^2}{8\alpha^2}J_n'^2(\alpha)N_n(\alpha r)+C_{210}^{(3)}J_n(\alpha r)+C_{220}^{(3)}N_n(\alpha r)$.

Из условий непрерывности $X^{(3)}(r)$ и её производной в точке $r=r_0$ следует

$$(C_{110}^{(3)}-C_{210}^{(3)})J_n(\alpha r_0)=C_{220}^{(3)}N_n(\alpha r_0)+\frac{r_0^2}{8\alpha^2}J_n(\alpha r_0)+\frac{r_0}{4\alpha^3}J_n'(\alpha). \tag{2.5}$$

$$(C_{110}^{(3)}-C_{210}^{(3)})\alpha J_n'(\alpha)=C_{220}^{(3)}\alpha N_n'(\alpha r_0)+\frac{r_0^2}{8\alpha}J_n'(\alpha)+\frac{n^2}{4\alpha^4r_0}J_n(\alpha r_0). \tag{2.6}$$

Формулы (2.5) и (2.6) позволяют определить $C_{220}^{(3)}$
$C_{220}^{(3)}=\frac{\pi r_0^2}{8\alpha^2}J_n'^2(\alpha)-\frac{\pi n^2}{8\alpha^4}J_n^2(\alpha r_0)$.

Из условия смещения в производных следует
$(C_{110}^{(3)}-C_{210}^{(3)})\alpha J_n'(\alpha)=C_{220}^{(3)}\alpha N_n'(\alpha)-\frac{n^2}{4\alpha^4}J_n(\alpha)-\frac{1}{8\alpha}J_n'(\alpha)+\frac{r_0^2}{4\alpha}J_n'(\alpha)-\frac{\pi n^2}{8\alpha^3}J_n'(\alpha)J_n(\alpha r_0)N_n(\alpha r_0)+$
$+\frac{\pi r_0^2}{8\alpha}J_n'^2(\alpha)N_n'(\alpha r_0)+\frac{\pi n^2}{8\alpha^3}J_n^2(\alpha r_0)N_n'(\alpha)-\frac{\pi r_0^2}{8\alpha}J_n'^2(\alpha)N_n'(\alpha)+\frac{n^2}{4\alpha^4r_0}J_n(\alpha r_0)$.

Подстановка определенного выше в условие смещения производных определяет $C_{110}^{(3)}$ через $C_{210}^{(3)}$
$C_{110}^{(3)}=C_{210}^{(3)}+\frac{r_0^2}{4\alpha^2}-\frac{1}{8\alpha^2}-\frac{\pi n^2}{8\alpha^4}J_n(\alpha r_0)N_n(\alpha r_0)+\frac{\pi r_0^2}{8\alpha^2}J_n'(\alpha)N_n'(\alpha r_0)+\frac{n^2}{4\alpha^5r_0J_n'(\alpha)}[J_n(\alpha r_0)-r_0J_n(\alpha)]$,
откуда согласно

$$2n^2(r_0J_n(\alpha)-J_n(\alpha r_0))=-\alpha^3r_0\left(1-r_0^2\right)J_n'(\alpha)$$

$C^{(3)}_{110} = C^{(3)}_{210} - \frac{\pi n^2}{8\alpha^4} J_n(\alpha r_0) N_n(\alpha r_0) + \frac{\pi r_0^2}{8\alpha^2} J'_n(\alpha) N'_n(\alpha r_0) + \frac{2r_0^3\alpha^3 J'_n(\alpha) - \alpha^3 r_0 J'_n(\alpha) + 2n^2[J_n(\alpha r_0) - r_0 J_n(\alpha)]}{8\alpha^5 r_0 J'_n(\alpha)} =$
$= C^{(3)}_{210} - \frac{\pi n^2}{8\alpha^4} J_n(\alpha r_0) N_n(\alpha r_0) + \frac{\pi r_0^2}{8\alpha^2} J'_n(\alpha) N'_n(\alpha r_0) + \frac{r_0^2}{8\alpha^2}$.

Окончательно, на $0 \le r \le 1$
$X^{(3)}(r) = \frac{r_0^2 - r^2}{8\alpha^2} J_n(\alpha r) - \frac{r}{4\alpha^3} J'_n(\alpha r) - \frac{\pi n^2}{8\alpha^4} J_n(\alpha r_0) N_n(\alpha r_0) J_n(\alpha r) + \frac{\pi r_0^2}{8\alpha^2} J'_n(\alpha) N'_n(\alpha r_0) J_n(\alpha r) +$
$+ C^{(3)}_{210} J_n(\alpha r)$.

Выражение $C^{(3)}_{210}$ через $C^{(3)}_{110}$ даёт дополнительное упрощение
$X^{(3)}(r) = -\frac{1}{4\alpha^3} r J'_n(\alpha r) - \frac{1}{8\alpha^2} r^2 J_n(\alpha r) + C J_n(\alpha r)$.

3. Присоединённые функции сопряжённой задачи при $s = 2$ без предположения непрерывности функции в точке r_0

Сопряжённая задача имеет вид

$$\begin{gathered}\Delta v + \lambda v = 0 \text{ в областях } \Omega_{r_0} \text{ и } \Omega \setminus \Omega_{r_0},\\ \frac{\partial v(r_0 - 0, \theta)}{\partial r} = \frac{\partial v(r_0 + 0, \theta)}{\partial r},\ \frac{\partial v(1, \theta)}{\partial r} = 0,\\ r_0[-v(r_0 + 0, \theta) + v(r_0 - 0, \theta)] + v(1 - 0, \theta) = 0.\end{gathered} \tag{3.7}$$

Если же кроме того предположить непрерывность $v(r, \theta)$ в точке $r = r_0$, то возникают условия

$$v(r_0 - 0, \theta) = v(r_0 + 0, \theta),\ \frac{\partial v(r_0 - 0, \theta)}{\partial r} = \frac{\partial v(r_0 + 0, \theta)}{\partial r},\ v(1, \theta) = 0.$$

Однако при таком дополнительном условии оказывается, что присоединённые элементы отсутствуют.

В силу ограниченности и периодичности $v(r, \theta)$ по θ (3.7) имеет решение [1] $v(r, \theta) =$
$= \mathcal{X}^{(1)}(r)[d_{n1} \cos(n, \theta) + d_{n2} \sin(n, \theta)]$, где

$$\mathcal{X}^{(1)}(r) = \begin{cases} [N'_n(\alpha r_0) - N'_n(\alpha)] J_n(\alpha r), & 0 \le r < r_0,\\ J'_n(\alpha) N_n(\alpha r) - N'_n(\alpha) J_n(\alpha r), & r_0 < r \le 1, \end{cases} \tag{3.8}$$

отвечающее собственным значениям $\lambda = \alpha^2 = \alpha^2(n)$, где α является корнями уравнения (2.1).

3.1. Вычисление 2-го элемента жордановой цепочки

Присоединенные функции 1-го порядка имеют вид $\Psi^{(2)}_n(r, \theta) = \mathcal{X}^{(2)}(r)[d_{n1} \cos(n, \theta) +$
$+ d_{n2} \sin(n, \theta)]$ с условием их существования (отсутствия) $I^{(1)}_n(\alpha) = \int\limits_0^1 \rho \mathcal{X}^{(1)}(\rho) X^{(1)}(\rho) d\rho =$
$= (n^2 - \alpha^2) r_0 J_n(\alpha) + (r_0^2 \alpha^2 - n^2) J_n(\alpha r_0) \cong f'(\alpha) = 0\ (\ne 0)$.

$\mathcal{X}^{(2)}(r)$ определяется как решение граничной задачи Бесселя с правой частью (3.8)

$$\begin{gathered}\mathcal{X}^{(2)\prime\prime}(r) + \frac{1}{r} \mathcal{X}^{(2)\prime}(r) + \left(\alpha^2 - \frac{n^2}{r^2}\right) \mathcal{X}^{(2)}(r) = \mathcal{X}^{(1)}(r),\\ \frac{d\mathcal{X}^{(2)}(r_0 - 0)}{dr} = \frac{d\mathcal{X}^{(2)}(r_0 + 0)}{dr},\ \frac{d\mathcal{X}^{(2)}(1)}{dr} = 0,\\ r_0[\mathcal{X}^{(2)}(r_0 - 0) - \mathcal{X}^{(2)}(r_0 + 0)] + \mathcal{X}^{(2)}(1) = 0.\end{gathered}$$

Согласно методу Лагранжа вариации произвольных постоянных, применяемому отдельно в областях $0 \le r < r_0$ и $r_0 < r \le 1$ решение $\mathcal{X}^{(2)}(r)$ ищется в виде

$$\mathcal{X}^{(2)}(r) = \begin{cases} D_{11}^{(2)}(r)J_n(\alpha r) + D_{12}^{(2)}(r)N_n(\alpha r), & 0 \le r < r_0, \\ D_{21}^{(2)}(r)J_n(\alpha r) + D_{22}^{(2)}(r)N_n(\alpha r), & r_0 < r \le 1, \end{cases}$$

где

$$D_{11}^{(2)}(r) = -\tfrac{\pi}{2}[N_n'(\alpha r_0) - N_n'(\alpha)]\int\limits_0^r \rho J_n(\alpha\rho)N_n(\alpha\rho)d\rho =$$
$$= -\tfrac{\pi}{4}[N_n'(\alpha r_0) - N_n'(\alpha)]\left\{\left(r^2 - \tfrac{n^2}{\alpha^2}\right)J_n(\alpha r)N_n(\alpha r) + r^2 J_n'(\alpha r)N_n'(\alpha r)\right\} + D_{110}^{(2)},$$
$$D_{12}^{(2)}(r) = \tfrac{\pi}{2}[N_n'(\alpha r_0) - N_n'(\alpha)]\int\limits_0^r \rho J_n^2(\alpha\rho)d\rho =$$
$$= \tfrac{\pi}{4}[N_n'(\alpha r_0) - N_n'(\alpha)]\left\{\left(r^2 - \tfrac{n^2}{\alpha^2}\right)J_n^2(\alpha r) + r^2 J_n'^2(\alpha r)\right\},$$
$$D_{21}^{(2)}(r) = -\tfrac{\pi}{2}J_n'(\alpha)\int\limits_{r_0}^r \rho N_n^2(\alpha\rho)d\rho + \tfrac{\pi}{2}N_n'(\alpha)\int\limits_0^r \rho J_n(\alpha\rho)N_n(\alpha\rho)d\rho =$$
$$= -\tfrac{\pi}{4}J_n'(\alpha)\left\{r^2 N_n'^2(\alpha r) + \left(r^2 - \tfrac{n^2}{\alpha^2}\right)N_n^2(\alpha r) - r_0^2 N_n'^2(\alpha r_0) - \left(r_0^2 - \tfrac{n^2}{\alpha^2}\right)N_n^2(\alpha r_0)\right\} +$$
$$+\tfrac{\pi}{4}N_n'(\alpha)\left\{\left(r^2 - \tfrac{n^2}{\alpha^2}\right)J_n(\alpha r)N_n(\alpha r) + r^2 J_n'(\alpha r)N_n'(\alpha r) -\right.$$
$$\left. - \left(r_0^2 - \tfrac{n^2}{\alpha^2}\right)J_n(\alpha r_0)N_n(\alpha r_0) - r_0^2 J_n'(\alpha)N_n'(\alpha r_0)\right\} + D_{210}^{(2)},$$
$$D_{22}^{(2)}(r) = \tfrac{\pi}{2}J_n'(\alpha)\int\limits_{r_0}^r \rho J_n(\alpha\rho)N_n(\alpha\rho)d\rho - \tfrac{\pi}{2}N_n'(\alpha)\int\limits_{r_0}^r \rho J_n^2(\alpha\rho)d\rho =$$
$$= \tfrac{\pi}{4}J_n'(\alpha)\left\{r^2 J_n'(\alpha r)N_n'(\alpha r) + \left(r^2 - \tfrac{n^2}{\alpha^2}\right)J_n(\alpha r)N_n(\alpha r) - r_0^2 J_n'(\alpha)N_n'(\alpha r_0) -\right.$$
$$\left. - \left(r_0^2 - \tfrac{n^2}{\alpha^2}\right)J_n(\alpha r_0)N_n(\alpha r_0)\right\} - \tfrac{\pi}{4}N_n'(\alpha)\left\{r^2 J_n'^2(\alpha r) + \left(r^2 - \tfrac{n^2}{\alpha^2}\right)J_n^2(\alpha r) - r_0^2 J_n'^2(\alpha) -\right.$$
$$\left. - \left(r_0^2 - \tfrac{n^2}{\alpha^2}\right)J_n^2(\alpha r_0)\right\} + D_{220}^{(2)}.$$

Таким образом, при $0 \le r < r_0$

$$\mathcal{X}^{(2)}_{0\le r<r_0}(r) = -\tfrac{1}{2\alpha}\left[N_n'(\alpha r_0) - N_n'(\alpha)\right] r J_n'(\alpha r) + D_{110}^{(2)} J_n(\alpha r),$$

и при $r_0 < r \le 1$

$$\mathcal{X}^{(2)}_{r_0<r\le 1}(r) = -\tfrac{1}{2\alpha}J_n'(\alpha) r N_n'(\alpha r) + \tfrac{1}{2\alpha}N_n'(\alpha) r J_n'(\alpha r) + \tfrac{\pi r_0^2}{4}J_n'(\alpha)N_n'^2(\alpha r_0)J_n(\alpha r) +$$
$$+\tfrac{\pi}{4}\left(r_0^2 - \tfrac{n^2}{\alpha^2}\right)J_n'(\alpha)N_n^2(\alpha r_0)J_n(\alpha r) - \tfrac{\pi r_0^2}{4}J_n'(\alpha)N_n'(\alpha)N_n'(\alpha r_0)J_n(\alpha r) -$$
$$-\tfrac{\pi}{4}\left(r_0^2 - \tfrac{n^2}{\alpha^2}\right)N_n'(\alpha)J_n(\alpha r_0)N_n(\alpha r_0)J_n(\alpha r) - \tfrac{\pi r_0^2}{4}J_n'^2(\alpha)N_n'(\alpha r_0)N_n(\alpha r) -$$
$$-\tfrac{\pi}{4}\left(r_0^2 - \tfrac{n^2}{\alpha^2}\right)J_n'(\alpha)J_n(\alpha r_0)N_n(\alpha r_0)N_n(\alpha r) + \tfrac{\pi r_0^2}{4}J_n'^2(\alpha)N_n'(\alpha)N_n(\alpha r) +$$
$$+\tfrac{\pi}{4}\left(r_0^2 - \tfrac{n^2}{\alpha^2}\right)N_n'(\alpha)J_n^2(\alpha r_0)N_n(\alpha r) + D_{210}^{(2)}J_n(\alpha r) + D_{220}^{(2)}N_n(\alpha r).$$

Используя граничные условия (3.7), получаем систему линейных неоднородных алгебраических уравнений для определения постоянных интегрирования $D_{110}^{(2)}$, $D_{210}^{(2)}$ и $D_{220}^{(2)}$

$$\begin{cases} J'_n(\alpha)D_{110}^{(2)} - J'_n(\alpha)D_{210}^{(2)} - N'_n(\alpha r_0)D_{220}^{(2)} = -\frac{1}{\pi\alpha^2}\left(1-\frac{n^2}{\alpha^2 r_0^2}\right) - \frac{1}{2\alpha r_0}\left(r_0^2-\frac{n^2}{\alpha^2}\right)J'_n(\alpha)N_n(\alpha r_0)+ \\ +\frac{1}{2\alpha r_0}\left(r_0^2-\frac{n^2}{\alpha^2}\right)J_n(\alpha r_0)N'_n(\alpha), \\ J'_n(\alpha)D_{210}^{(2)} + N'_n(\alpha)D_{220}^{(2)} = \frac{1}{\pi\alpha^2}\left(1-\frac{n^2}{\alpha^2}\right) - \frac{\pi r_0^2}{4}J'^2_n(\alpha)N'^2_n(\alpha r_0) - \frac{\pi}{4}\left(r_0^2-\frac{n^2}{\alpha^2}\right)J'^2_n(\alpha)N^2_n(\alpha r_0)+ \\ +\frac{\pi r_0^2}{2}J'^2_n(\alpha)N'_n(\alpha)N'_n(\alpha r_0) + \frac{\pi}{2}\left(r_0^2-\frac{n^2}{\alpha^2}\right)J'_n(\alpha)N'_n(\alpha)J_n(\alpha r_0)N_n(\alpha r_0) - \frac{\pi r_0^2}{4}J'^2_n(\alpha)N'^2_n(\alpha)- \\ -\frac{\pi}{4}\left(r_0^2-\frac{n^2}{\alpha^2}\right)J^2_n(\alpha r_0)N'^2_n(\alpha), \\ r_0J_n(\alpha r_0)D_{110}^{(2)} + [J_n(\alpha)-r_0J_n(\alpha r_0)]D_{210}^{(2)} + [N_n(\alpha)-r_0N_n(\alpha r_0)]D_{220}^{(2)} = \\ = -\frac{\pi r_0^2}{4}J'_n(\alpha)N'^2_n(\alpha r_0)J_n(\alpha) - \frac{\pi}{4}J'_n(\alpha)\left(r_0^2-\frac{n^2}{\alpha^2}\right)N^2_n(\alpha r_0)J_n(\alpha)+ \\ +\frac{\pi r_0^2}{4}J'_n(\alpha)N'_n(\alpha)N'_n(\alpha r_0)J_n(\alpha) + \frac{\pi}{4}N'_n(\alpha)\left(r_0^2-\frac{n^2}{\alpha^2}\right)J_n(\alpha r_0)N_n(\alpha r_0)J_n(\alpha)+ \\ +\frac{\pi r_0^2}{4}J'^2_n(\alpha)N'_n(\alpha r_0)N_n(\alpha) + \frac{\pi}{4}J'_n(\alpha)\left(r_0^2-\frac{n^2}{\alpha^2}\right)J_n(\alpha r_0)N_n(\alpha r_0)N_n(\alpha)- \\ -\frac{\pi r_0^2}{4}N'_n(\alpha)J'^2_n(\alpha)N_n(\alpha) - \frac{\pi}{4}N'_n(\alpha)\left(r_0^2-\frac{n^2}{\alpha^2}\right)J^2_n(\alpha r_0)N_n(\alpha)+ \\ +\frac{r_0^2}{2\alpha}J'_n(\alpha)N'_n(\alpha r_0) - \frac{r_0^2}{2\alpha}J'_n(\alpha)N'_n(\alpha), \end{cases}$$

с нулевым определителем. Выражая из первых двух уравнений системы $D_{110}^{(2)}$ и $D_{210}^{(2)}$ через $D_{220}^{(2)}$ и полагая $D_{220}^{(2)} = J'_n(\alpha)D$, определяем решение $\mathcal{X}^{(2)}(r)$ с точностью до слагаемого $D\mathcal{X}^{(1)}(r)$. Таким образом, $\mathcal{X}^{(2)}(r)$ принимает вид:

$$\begin{aligned} \mathcal{X}^{(2)}_{0\le r<r_0}(r) &= -\frac{1}{2\alpha}\left[N'_n(\alpha r_0)-N'_n(\alpha)\right]rJ'_n(\alpha r) + \frac{n^2(1-r_0^2)}{\pi\alpha^4 r_0^2 J'_n(\alpha)}J_n(\alpha r) - \frac{1}{2\alpha r_0}\left(r_0^2-\frac{n^2}{\alpha^2}\right)N_n(\alpha r_0)J_n(\alpha r)+ \\ &+\frac{1}{2\alpha r_0}\left(r_0^2-\frac{n^2}{\alpha^2}\right)\frac{N'_n(\alpha)}{J'_n(\alpha)}J_n(\alpha r_0)J_n(\alpha r) - \frac{\pi r_0^2}{4}J'_n(\alpha)N'^2_n(\alpha r_0)J_n(\alpha r)- \\ &-\frac{\pi}{4}\left(r_0^2-\frac{n^2}{\alpha^2}\right)J'_n(\alpha)N^2_n(\alpha r_0)J_n(\alpha r) + \frac{\pi r_0^2}{2}J'_n(\alpha)N'_n(\alpha)N'_n(\alpha r_0)J_n(\alpha r)+ \\ &+\frac{\pi}{2}\left(r_0^2-\frac{n^2}{\alpha^2}\right)N'_n(\alpha)J_n(\alpha r_0)N_n(\alpha r_0)J_n(\alpha r) - \frac{\pi r_0^2}{4}J'_n(\alpha)N'^2_n(\alpha)J_n(\alpha r)- \\ &-\frac{\pi}{4}\left(r_0^2-\frac{n^2}{\alpha^2}\right)\frac{N'^2_n(\alpha)}{J'_n(\alpha)}J^2_n(\alpha r_0)J_n(\alpha r) + D[N'_n(\alpha r_0)-N'_n(\alpha)]J_n(\alpha r) \end{aligned}$$

и

$$\begin{aligned} \mathcal{X}^{(2)}_{r_0<r\le 1}(r) &= -\frac{1}{2\alpha}J'_n(\alpha)rN'_n(\alpha r) + \frac{1}{2\alpha}N'_n(\alpha)rJ'_n(\alpha r) + \frac{\pi r_0^2}{4}J'_n(\alpha)N'_n(\alpha)N'_n(\alpha r_0)J_n(\alpha r)+ \\ &+\frac{\pi}{4}\left(r_0^2-\frac{n^2}{\alpha^2}\right)N'_n(\alpha)J_n(\alpha r_0)N_n(\alpha r_0)J_n(\alpha r) - \frac{\pi r_0^2}{4}J'^2_n(\alpha)N'_n(\alpha r_0)N_n(\alpha r)- \\ &-\frac{\pi}{4}\left(r_0^2-\frac{n^2}{\alpha^2}\right)J'_n(\alpha)J_n(\alpha r_0)N_n(\alpha r_0)N_n(\alpha r) + \frac{\pi r_0^2}{4}J'^2_n(\alpha)N'_n(\alpha)N_n(\alpha r)+ \\ &+\frac{\pi}{4}\left(r_0^2-\frac{n^2}{\alpha^2}\right)N'_n(\alpha)J^2_n(\alpha r_0)N_n(\alpha r) + \frac{1}{\pi\alpha^2 J'_n(\alpha)}\left(1-\frac{n^2}{\alpha^2}\right)J_n(\alpha r) - \frac{\pi r_0^2}{4}J'_n(\alpha)N'^2_n(\alpha)J_n(\alpha r)- \\ &-\frac{\pi}{4}\left(r_0^2-\frac{n^2}{\alpha^2}\right)\frac{N'^2_n(\alpha)}{J'_n(\alpha)}J^2_n(\alpha r_0)J_n(\alpha r) + D[J'_n(\alpha)N_n(\alpha r)-N'_n(\alpha)J_n(\alpha r)]. \end{aligned}$$

Равенство (не равенство) нулю интеграла $I_n^{(2)}(\alpha) = \int\limits_0^1 \mathcal{X}^{(2)}(\rho)X^{(1)}(\rho)d\rho$ даёт условие существования (отсутствия) 3-го элемента ЖЦ.

$$I_n^{(2)}(\alpha)=-\frac{J_n'(\alpha)}{2\alpha}\int\limits_{r_0}^{1}\rho^2 J_n(\alpha\rho)N_n'(\alpha\rho)d\rho+\frac{N_n'(\alpha)}{2\alpha}\int\limits_{0}^{1}\rho^2 J_n(\alpha\rho)J_n'(\alpha\rho)d\rho+$$

$$+\frac{\pi}{4}\left(r_0^2-\frac{n^2}{\alpha^2}\right)N_n'(\alpha)J_n(\alpha r_0)N_n(\alpha r_0)\int\limits_{r_0}^{1}\rho J_n^2(\alpha\rho)d\rho+$$

$$+\frac{\pi r_0^2}{4}J_n'(\alpha)N_n'(\alpha)N_n'(\alpha r_0)\int\limits_{r_0}^{1}\rho J_n^2(\alpha\rho)d\rho-$$

$$-\frac{\pi}{4}\left(r_0^2-\frac{n^2}{\alpha^2}\right)J_n'(\alpha)J_n(\alpha r_0)N_n(\alpha r_0)\int\limits_{r_0}^{1}\rho J_n(\alpha\rho)N_n(\alpha\rho)d\rho-$$

$$-\frac{\pi r_0^2}{4}J_n'^2(\alpha)N_n'(\alpha r_0)\int\limits_{r_0}^{1}\rho J_n(\alpha\rho)N_n(\alpha\rho)d\rho+$$

$$+\frac{\pi}{4}\left(r_0^2-\frac{n^2}{\alpha^2}\right)N_n'(\alpha)J_n^2(\alpha r_0)\int\limits_{r_0}^{1}\rho J_n(\alpha\rho)N_n(\alpha\rho)d\rho+\frac{\pi r_0^2}{4}J_n'^2(\alpha)N_n'(\alpha)\int\limits_{r_0}^{1}\rho J_n(\alpha\rho)N_n(\alpha\rho)d\rho+$$

$$+\frac{1}{\pi\alpha^2 J_n'(\alpha)}\int\limits_{r_0}^{1}\rho J_n^2(\alpha\rho)d\rho-\frac{n^2}{\pi\alpha^4 J_n'(\alpha)}\int\limits_{0}^{1}\rho J_n^2(\alpha\rho)d\rho-$$

$$-\frac{\pi}{4}\left(r_0^2-\frac{n^2}{\alpha^2}\right)\frac{N_n'^2(\alpha)}{J_n'(\alpha)}J_n^2(\alpha r_0)\int\limits_{0}^{1}\rho J_n^2(\alpha\rho)d\rho-\frac{\pi r_0^2}{4}J_n'(\alpha)N_n'^2(\alpha)\int\limits_{0}^{1}\rho J_n^2(\alpha\rho)d\rho-$$

$$-\frac{N_n'(\alpha r_0)}{2\alpha}\int\limits_{0}^{r_0}\rho^2 J_n(\alpha\rho)J_n'(\alpha\rho)d\rho+\frac{n^2}{\pi\alpha^4 r_0^2 J_n'(\alpha)}\int\limits_{0}^{r_0}\rho J_n^2(\alpha\rho)d\rho-$$

$$-\frac{1}{2\alpha r_0}\left(r_0^2-\frac{n^2}{\alpha^2}\right)N_n(\alpha r_0)\int\limits_{0}^{r_0}\rho J_n^2(\alpha\rho)d\rho+\frac{1}{2\alpha r_0}\left(r_0^2-\frac{n^2}{\alpha^2}\right)\frac{N_n'(\alpha)}{J_n'(\alpha)}J_n(\alpha r_0)\int\limits_{0}^{r_0}\rho J_n^2(\alpha\rho)d\rho-$$

$$-\frac{\pi r_0^2}{4}J_n'(\alpha)N_n'^2(\alpha r_0)\int\limits_{0}^{r_0}\rho J_n^2(\alpha\rho)d\rho-\frac{\pi}{4}\left(r_0^2-\frac{n^2}{\alpha^2}\right)J_n'(\alpha)N_n^2(\alpha r_0)\int\limits_{0}^{r_0}\rho J_n^2(\alpha\rho)d\rho+$$

$$+\frac{\pi}{2}\left(r_0^2-\frac{n^2}{\alpha^2}\right)N_n'(\alpha)J_n(\alpha r_0)N_n(\alpha r_0)\int\limits_{0}^{r_0}\rho J_n^2(\alpha\rho)d\rho+$$

$$+\frac{\pi r_0^2}{2}J_n'(\alpha)N_n'(\alpha)N_n'(\alpha r_0)\int\limits_{0}^{r_0}\rho J_n^2(\alpha\rho)d\rho.$$

Формулы для вычисления интегралов $\int\rho J_n^2(\alpha\rho)d\rho$ и $\int\rho J_n(\alpha\rho)N_n(\alpha\rho)d\rho$ даны в справочном издании [2]. Интегралы $\int\rho^2 J_n(\alpha\rho)N_n'(\alpha\rho)d\rho$ и $\int\rho^2 J_n(\alpha\rho)J_n'(\alpha\rho)d\rho$ вычислим методом интегрирования по частям.

$\int r^2 J_n(\alpha r)J_n'(\alpha r)\,dr=\frac{1}{\alpha^3}\int(\alpha r)^2 J_n(\alpha r)J_n'(\alpha r)\,d(\alpha r)=$
$=\frac{1}{\alpha^3}(\alpha r)^2 J_n^2(\alpha r)-\frac{1}{\alpha^3}\int J_n(\alpha r)\left(2\alpha r J_n(\alpha r)+(\alpha r)^2 J_n'(\alpha r)\right)\,d(\alpha r)=$

$= \frac{r^2}{\alpha} J_n^2(\alpha r) - \frac{2}{\alpha} \int r J_n^2(\alpha r)\, dr - \int r^2 J_n(\alpha r) J_n'(\alpha r)\, dr$;

$2 \int r^2 J_n(\alpha r) J_n'(\alpha r)\, dr = \frac{r^2}{\alpha} J_n^2(\alpha r) - \frac{2}{\alpha} \int r J_n^2(\alpha r)\, dr$;

$\int r^2 J_n(\alpha r) J_n'(\alpha r)\, dr = \frac{r^2}{2\alpha} J_n^2(\alpha r) - \frac{1}{\alpha} \int r J_n^2(\alpha r)\, dr =$
$= \frac{r^2}{2\alpha} J_n^2(\alpha r) - \frac{r^2}{2\alpha} \left[J_n^2(\alpha r) - \frac{n^2}{\alpha^2 r^2} J_n^2(\alpha r) + J_n'^2(\alpha r) \right] = \frac{n^2}{2\alpha^3} J_n^2(\alpha r) - \frac{r^2}{2\alpha} J_n'^2(\alpha r)$.

$\int r^2 J_n(\alpha r) N_n'(\alpha r)\, dr = \int r^2 [J_n(\alpha r) N_n'(\alpha r) - J_n'(\alpha r) N_n(\alpha r)]\, dr + \int r^2 J_n'(\alpha r) N_n(\alpha r)\, dr =$
$= \int r^2 \frac{2}{\pi \alpha r}\, dr + \int r^2 J_n'(\alpha r) N_n(\alpha r)\, dr = \frac{2}{\pi\alpha} \int r\, dr + \int r^2 J_n'(\alpha r) N_n(\alpha r)\, dr =$
$= \frac{r^2}{\pi\alpha} + \int r^2 J_n'(\alpha r) N_n(\alpha r)\, dr = \frac{r^2}{\pi\alpha} + \frac{1}{\alpha^3} \int (\alpha r)^2 J_n'(\alpha r) N_n(\alpha r)\, d(\alpha r) =$
$= \frac{r^2}{\pi\alpha} + \frac{r^2}{\alpha} J_n(\alpha r) N_n(\alpha r) - \frac{1}{\alpha^3} \int J_n(\alpha r) [2\alpha r N_n(\alpha r) + (\alpha r)^2 N_n'(\alpha r)]\, d(\alpha r) =$
$= \frac{r^2}{\pi\alpha} + \frac{r^2}{\alpha} J_n(\alpha r) N_n(\alpha r) - \frac{2}{\alpha} \int r J_n(\alpha r) N_n(\alpha r)\, dr - \int r^2 J_n(\alpha r) N_n'(\alpha r)\, dr$;

$2 \int r^2 J_n(\alpha r) N_n'(\alpha r)\, dr = \frac{r^2}{\pi\alpha} + \frac{r^2}{\alpha} J_n(\alpha r) N_n(\alpha r) - \frac{2}{\alpha} \int r J_n(\alpha r) N_n(\alpha r)\, dr$;

$\int r^2 J_n(\alpha r) N_n'(\alpha r)\, dr = \frac{r^2}{2\pi\alpha} + \frac{r^2}{2\alpha} J_n(\alpha r) N_n(\alpha r) - \frac{1}{\alpha} \int r J_n(\alpha r) N_n(\alpha r)\, dr =$
$= \frac{r^2}{2\pi\alpha} + \frac{r^2}{2\alpha} J_n(\alpha r) N_n(\alpha r) - \frac{r^2}{2\alpha} \left[J_n(\alpha r) N_n(\alpha r) - \frac{n^2}{\alpha^2 r^2} J_n(\alpha r) N_n(\alpha r) + J_n'(\alpha r) N_n'(\alpha r) \right] =$
$= \frac{r^2}{2\pi\alpha} + \frac{n^2}{2\alpha^3} J_n(\alpha r) N_n(\alpha r) - \frac{r^2}{2\alpha} J_n'(\alpha r) N_n'(\alpha r)$.

Подстановка найденных интегралов и применение условий (2.1) и (2.2) даёт окончательный результат $I_n^{(2)}(\alpha) = \int\limits_0^1 \mathcal{X}^{(2)}(\rho) X^{(1)}(\rho) d\rho = \frac{1}{4\pi\alpha^5 r_0} [2n^2 r_0 J_n(\alpha) - 2n^2 J_n(\alpha r_0) + \alpha^3 r_0 (1 - - r_0^2) J_n'(\alpha)] = -\frac{1}{4\pi\alpha^3} [-2J_n(\alpha) + 2r_0 J_n(\alpha r_0) + \alpha(r_0^2 - 1) J_n'(\alpha)]$.

3.2. Вычисление 3-го элемента $\mathcal{X}^{(3)}(r)$ ЖЦ

В работе [1] доказано, что одновременное выполнение условий $f^{(k)}(\alpha) = 0$, $k = 0, 1, 2, 3$ невозможно. Это означает, что ЖЦ обрывается на 3-ем элементе, т.е. имеет длину 3.

При выполнении (2.1), (2.2) и (2.3) $\mathcal{X}^{(3)}(r)$ является решением неоднородного уравнения Бесселя с теми же краевыми условиями гладкости и смещения.

$$\mathcal{X}^{(3)\prime\prime}(r) + \frac{1}{r}\mathcal{X}^{(3)\prime}(r) + \left(\alpha^2 - \frac{n^2}{r^2}\right)\mathcal{X}^{(3)}(r) = \mathcal{X}^{(2)}(r),$$
$$\frac{d\mathcal{X}^{(3)}(r_0 - 0)}{dr} = \frac{d\mathcal{X}^{(3)}(r_0 + 0)}{dr}, \frac{d\mathcal{X}^{(3)}(1)}{dr} = 0,$$
$$r_0[\mathcal{X}^{(3)}(r_0 - 0) - \mathcal{X}^{(3)}(r_0 + 0)] + \mathcal{X}^{(3)}(1) = 0.$$

и имеет вид, соответственно при $0 \le r < r_0$
$\underset{0 \le r < r_0}{\mathcal{X}^{(3)}(r)} = -\frac{1}{8\alpha^2}[N_n'(\alpha r_0) - N_n'(\alpha)] r^2 J_n(\alpha r) - \frac{1}{4\alpha^3}[N_n'(\alpha r_0) - N_n'(\alpha)] r J_n'(\alpha r) +$
$+ \frac{n^2(r_0^2-1)}{2\pi\alpha^5 r_0^2 J_n'(\alpha)} r J_n'(\alpha r) + \frac{1}{4\alpha^2 r_0}\left(r_0^2 - \frac{n^2}{\alpha^2}\right) N_n(\alpha r_0) r J_n'(\alpha r) -$
$- \frac{1}{4\alpha^2 r_0}\left(r_0^2 - \frac{n^2}{\alpha^2}\right) \frac{N_n'(\alpha)}{J_n'(\alpha)} J_n(\alpha r_0) r J_n'(\alpha r) + \frac{\pi r_0^2}{8\alpha} J_n'(\alpha) N_n'^2(\alpha r_0) r J_n'(\alpha r) +$
$+ \frac{\pi}{8\alpha}\left(r_0^2 - \frac{n^2}{\alpha^2}\right) J_n'(\alpha) N_n^2(\alpha r_0) r J_n'(\alpha r) - \frac{\pi r_0^2}{4\alpha} J_n'(\alpha) N_n'(\alpha) N_n'(\alpha r_0) r J_n'(\alpha r) -$
$- \frac{\pi}{4\alpha}\left(r_0^2 - \frac{n^2}{\alpha^2}\right) N_n'(\alpha) J_n(\alpha r_0) N_n(\alpha r_0) r J_n'(\alpha r) + \frac{\pi}{8\alpha}\left(r_0^2 - \frac{n^2}{\alpha^2}\right) \frac{N_n'^2(\alpha)}{J_n'(\alpha)} J_n^2(\alpha r_0) r J_n'(\alpha r) +$
$+ \frac{\pi r_0^2}{8\alpha} J_n'(\alpha) N_n'^2(\alpha) r J_n'(\alpha r) + \frac{r_0^2}{8\alpha^2}[N_n'(\alpha r_0) - N_n'(\alpha)] J_n(\alpha r) +$
$+ \frac{n^2}{4\alpha^5 r_0 J_n'(\alpha)}[N_n'(\alpha r_0) - N_n'(\alpha)] J_n(\alpha r_0) J_n(\alpha r) + \frac{n^2(r_0^2-1)}{2\pi\alpha^5 r_0^3}\left(r_0^2 - \frac{n^2}{\alpha^2}\right) \frac{J_n(\alpha r_0)}{J_n'^2(\alpha)} J_n(\alpha r) +$

$$+\tfrac{1}{4\alpha^2 r_0^2}\left(r_0^2-\tfrac{n^2}{\alpha^2}\right)^2\tfrac{J_n(\alpha r_0)}{J_n'(\alpha)}N_n(\alpha r_0)J_n(\alpha r)-\tfrac{1}{4\alpha^2 r_0^2}\left(r_0^2-\tfrac{n^2}{\alpha^2}\right)^2\tfrac{N_n'(\alpha)}{J_n'^2(\alpha)}J_n^2(\alpha r_0)J_n(\alpha r)+$$
$$+\tfrac{1}{4\alpha^2}\left(r_0^2-\tfrac{n^2}{\alpha^2}\right)[N_n'(\alpha r_0)-N_n'(\alpha)]J_n(\alpha r)-\tfrac{\pi}{4\alpha r_0}\left(r_0^2-\tfrac{n^2}{\alpha^2}\right)^2\tfrac{N_n'(\alpha)}{J_n'(\alpha)}J_n^2(\alpha r_0)N_n(\alpha r_0)J_n(\alpha r)+$$
$$+\tfrac{\pi r_0}{8\alpha}\left(r_0^2-\tfrac{n^2}{\alpha^2}\right)J_n'(\alpha)N_n'(\alpha r_0)N_n(\alpha r_0)J_n(\alpha r)+\tfrac{\pi}{8\alpha r_0}\left(r_0^2-\tfrac{n^2}{\alpha^2}\right)^2J_n(\alpha r_0)N_n^2(\alpha r_0)J_n(\alpha r)-$$
$$-\tfrac{\pi^2 r_0^2}{16}\left(r_0^2-\tfrac{n^2}{\alpha^2}\right)N_n'(\alpha)N_n'^2(\alpha r_0)J_n^2(\alpha r_0)J_n(\alpha r)+\tfrac{\pi^2 r_0^2}{16}\left(r_0^2-\tfrac{n^2}{\alpha^2}\right)J_n'^2(\alpha)N_n'(\alpha)N_n^2(\alpha r_0)J_n(\alpha r)+$$
$$+\tfrac{\pi}{8\alpha r_0}\left(r_0^2-\tfrac{n^2}{\alpha^2}\right)^2\tfrac{N_n'^2(\alpha)}{J_n'^2(\alpha)}J_n^3(\alpha r_0)J_n(\alpha r)+\tfrac{\pi r_0}{8\alpha}\left(r_0^2-\tfrac{n^2}{\alpha^2}\right)N_n'^2(\alpha)J_n(\alpha r_0)J_n(\alpha r)-$$
$$-\tfrac{n^2}{2\pi\alpha^6 J_n'(\alpha)}J_n(\alpha r)+\tfrac{\pi n^2}{8\alpha^4}J_n'(\alpha)N_n^2(\alpha r_0)J_n(\alpha r)-\tfrac{\pi r_0^2}{8\alpha^2}J_n'(\alpha)N_n'^2(\alpha r_0)J_n(\alpha r)-$$
$$-\tfrac{\pi n^2}{4\alpha^4}N_n'(\alpha)J_n(\alpha r_0)N_n(\alpha r_0)J_n(\alpha r)+\tfrac{\pi r_0^2}{4\alpha^2}J_n'(\alpha)N_n'(\alpha)N_n'(\alpha r_0)J_n(\alpha r)-$$
$$-\tfrac{3\pi^2}{16}\left(r_0^2-\tfrac{n^2}{\alpha^2}\right)^2N_n'(\alpha)J_n^2(\alpha r_0)N_n^2(\alpha r_0)J_n(\alpha r)-$$
$$-\tfrac{\pi^2 r_0^2}{4}\left(r_0^2-\tfrac{n^2}{\alpha^2}\right)J_n'(\alpha)N_n'(\alpha)N_n'(\alpha r_0)J_n(\alpha r_0)N_n(\alpha r_0)J_n(\alpha r)-$$
$$-\tfrac{r_0^2}{2\alpha^2}\left(1-\tfrac{n^2}{\alpha^2}\right)[N_n'(\alpha r_0)-N_n'(\alpha)]J_n(\alpha r)-\tfrac{3\pi^2 r_0^4}{16}J_n'^2(\alpha)N_n'(\alpha)N_n'(\alpha r_0)[N_n'(\alpha r_0)-N_n'(\alpha)]J_n(\alpha r)-$$
$$-\tfrac{1}{2\alpha^2}\left(1-\tfrac{n^2}{\alpha^2}\right)\left(r_0^2-\tfrac{n^2}{\alpha^2}\right)\tfrac{J_n(\alpha r_0)}{J_n'(\alpha)}N_n(\alpha r_0)J_n(\alpha r)+$$
$$+\tfrac{\pi^2 r_0^2}{16}\left(r_0^2-\tfrac{n^2}{\alpha^2}\right)J_n'(\alpha)N_n'^2(\alpha r_0)J_n(\alpha r_0)N_n(\alpha r_0)J_n(\alpha r)+$$
$$+\tfrac{\pi^2}{16}\left(r_0^2-\tfrac{n^2}{\alpha^2}\right)^2J_n'(\alpha)J_n(\alpha r_0)N_n^3(\alpha r_0)J_n(\alpha r)+\tfrac{\pi^2 r_0^4}{16}J_n'^2(\alpha)N_n'^3(\alpha r_0)J_n(\alpha r)+$$
$$+\tfrac{\pi^2 r_0^2}{16}\left(r_0^2-\tfrac{n^2}{\alpha^2}\right)J_n'^2(\alpha)N_n^2(\alpha r_0)[N_n'(\alpha r_0)-N_n'(\alpha)]J_n(\alpha r)+$$
$$+\tfrac{1}{2\alpha^2}\left(1-\tfrac{n^2}{\alpha^2}\right)\left(r_0^2-\tfrac{n^2}{\alpha^2}\right)\tfrac{N_n'(\alpha)}{J_n'^2(\alpha)}J_n^2(\alpha r_0)J_n(\alpha r)-\tfrac{\pi^2 r_0^2}{16}\left(r_0^2-\tfrac{n^2}{\alpha^2}\right)J_n^2(\alpha r_0)N_n'(\alpha)N_n'^2(\alpha r_0)J_n(\alpha r)-$$
$$-\tfrac{1}{2\pi\alpha^3}\left(1-\tfrac{n^2}{\alpha^2}\right)^2\tfrac{J_n(\alpha)}{J_n'^2(\alpha)}J_n(\alpha r)+\tfrac{3\pi^2}{16}\left(r_0^2-\tfrac{n^2}{\alpha^2}\right)^2\tfrac{N_n'^2(\alpha)}{J_n'(\alpha)}J_n^3(\alpha r_0)N_n(\alpha r_0)J_n(\alpha r)+$$
$$+\tfrac{3\pi^2 r_0^2}{16}\left(r_0^2-\tfrac{n^2}{\alpha^2}\right)N_n'^2(\alpha)N_n'(\alpha r_0)J_n^2(\alpha r_0)J_n(\alpha r)+$$
$$+\tfrac{3\pi^2 r_0^2}{16}\left(r_0^2-\tfrac{n^2}{\alpha^2}\right)J_n'(\alpha)N_n'^2(\alpha)J_n(\alpha r_0)N_n(\alpha r_0)J_n(\alpha r)+\tfrac{\pi n^2}{8\alpha^4}\tfrac{N_n'^2(\alpha)}{J_n'(\alpha)}J_n^2(\alpha r_0)J_n(\alpha r)-$$
$$-\tfrac{\pi r_0^2}{8\alpha^2}J_n'(\alpha)N_n'^2(\alpha)J_n(\alpha r)-\tfrac{\pi^2 r_0^4}{16}J_n'^2(\alpha)N_n'^3(\alpha)J_n(\alpha r)-\tfrac{\pi^2 r_0^2}{8}\left(r_0^2-\tfrac{n^2}{\alpha^2}\right)N_n'^3(\alpha)J_n^2(\alpha r_0)J_n(\alpha r)-$$
$$-\tfrac{\pi^2}{16}\left(r_0^2-\tfrac{n^2}{\alpha^2}\right)^2\tfrac{N_n'^3(\alpha)}{J_n'^2(\alpha)}J_n^4(\alpha r_0)J_n(\alpha r)+D[N_n'(\alpha r_0)-N_n'(\alpha)]J_n(\alpha r)$$

и соответственно при $r_0<r\le 1$

$$\underset{r_0<r\le 1}{\mathcal{X}^{(3)}(r)}=-\tfrac{1}{4\alpha^3}J_n'(\alpha)rN_n'(\alpha r)+\tfrac{1}{8\alpha^2}N_n'(\alpha)r^2J_n(\alpha r)+\tfrac{1}{4\alpha^3}N_n'(\alpha)rJ_n'(\alpha r)-\tfrac{r_0^2}{8\alpha^2}N_n'(\alpha)J_n(\alpha r)-$$
$$-\tfrac{\pi n^2}{8\alpha^4}N_n'(\alpha)J_n(\alpha r_0)N_n(\alpha r_0)J_n(\alpha r)+\tfrac{\pi r_0^2}{8\alpha^2}J_n'(\alpha)N_n'(\alpha)N_n'(\alpha r_0)J_n(\alpha r)-$$
$$-\tfrac{\pi}{8\alpha}\left(r_0^2-\tfrac{n^2}{\alpha^2}\right)N_n'(\alpha)J_n(\alpha r_0)N_n(\alpha r_0)rJ_n'(\alpha r)-\tfrac{\pi^2}{16}\left(r_0^2-\tfrac{n^2}{\alpha^2}\right)^2N_n'(\alpha)J_n^2(\alpha r_0)N_n^2(\alpha r_0)J_n(\alpha r)-$$
$$-\tfrac{\pi^2 r_0^2}{8}\left(r_0^2-\tfrac{n^2}{\alpha^2}\right)J_n'(\alpha)N_n'(\alpha)N_n'(\alpha r_0)J_n(\alpha r_0)N_n(\alpha r_0)J_n(\alpha r)-\tfrac{\pi r_0^2}{8\alpha}J_n'(\alpha)N_n'(\alpha)N_n'(\alpha r_0)rJ_n'(\alpha r)-$$
$$-\tfrac{\pi^2 r_0^4}{16}J_n'^2(\alpha)N_n'(\alpha)N_n'^2(\alpha r_0)J_n(\alpha r)+\tfrac{\pi}{8\alpha}\left(r_0^2-\tfrac{n^2}{\alpha^2}\right)J_n'(\alpha)J_n(\alpha r_0)N_n(\alpha r_0)rN_n'(\alpha r)+$$
$$+\tfrac{\pi r_0^2}{8\alpha}J_n'^2(\alpha)N_n'(\alpha r_0)rN_n'(\alpha r)-\tfrac{\pi}{8\alpha}\left(r_0^2-\tfrac{n^2}{\alpha^2}\right)N_n'(\alpha)J_n^2(\alpha r_0)rN_n'(\alpha r)-$$
$$-\tfrac{\pi r_0^2}{8\alpha}J_n'^2(\alpha)N_n'(\alpha)rN_n'(\alpha r)-\tfrac{1}{2\pi\alpha^3 J_n'(\alpha)}\left(1-\tfrac{n^2}{\alpha^2}\right)rJ_n'(\alpha r)-$$
$$-\tfrac{1}{4\alpha^2}\left(1-\tfrac{n^2}{\alpha^2}\right)\left(r_0^2-\tfrac{n^2}{\alpha^2}\right)\tfrac{J_n(\alpha r_0)}{J_n'(\alpha)}N_n(\alpha r_0)J_n(\alpha r)-\tfrac{r_0^2}{4\alpha^2}\left(1-\tfrac{n^2}{\alpha^2}\right)N_n'(\alpha r_0)J_n(\alpha r)+$$
$$+\tfrac{\pi}{8\alpha}\left(r_0^2-\tfrac{n^2}{\alpha^2}\right)\tfrac{N_n'^2(\alpha)}{J_n'(\alpha)}J_n^2(\alpha r_0)rJ_n'(\alpha r)+\tfrac{\pi^2}{8}\left(r_0^2-\tfrac{n^2}{\alpha^2}\right)^2\tfrac{N_n'^2(\alpha)}{J_n'(\alpha)}J_n^3(\alpha r_0)N_n(\alpha r_0)J_n(\alpha r)+$$
$$+\tfrac{\pi^2 r_0^2}{8}\left(r_0^2-\tfrac{n^2}{\alpha^2}\right)N_n'^2(\alpha)N_n'(\alpha r_0)J_n^2(\alpha r_0)J_n(\alpha r)+\tfrac{\pi r_0^2}{8\alpha}J_n'(\alpha)N_n'^2(\alpha)rJ_n'(\alpha r)+$$

$$
\begin{aligned}
&+\tfrac{\pi^2 r_0^2}{8}\left(r_0^2-\tfrac{n^2}{\alpha^2}\right)J_n'(\alpha)N_n'^2(\alpha)J_n(\alpha r_0)N_n(\alpha r_0)J_n(\alpha r) + \tfrac{\pi^2 r_0^4}{8}J_n'^2(\alpha)N_n'^2(\alpha)N_n'(\alpha r_0)J_n(\alpha r) -\\
&-\tfrac{n^2}{2\pi\alpha^6 J_n'(\alpha)}J_n(\alpha r)+\tfrac{1}{2\alpha^2}\left(1-\tfrac{n^2}{\alpha^2}\right)\left(r_0^2-\tfrac{n^2}{\alpha^2}\right)\tfrac{N_n'(\alpha)}{J_n'^2(\alpha)}J_n^2(\alpha r_0)J_n(\alpha r)+\tfrac{r_0^2}{2\alpha^2}\left(1-\tfrac{n^2}{\alpha^2}\right)N_n'(\alpha)J_n(\alpha r)-\\
&-\tfrac{1}{2\pi\alpha^3}\left(1-\tfrac{n^2}{\alpha^2}\right)^2\tfrac{J_n(\alpha)}{J_n'^2(\alpha)}J_n(\alpha r) + \tfrac{\pi n^2}{8\alpha^4}\tfrac{N_n'^2(\alpha)}{J_n'(\alpha)}J_n^2(\alpha r_0)J_n(\alpha r) - \tfrac{\pi r_0^2}{8\alpha^2}J_n'(\alpha)N_n'^2(\alpha)J_n(\alpha r) -\\
&-\tfrac{\pi^2 r_0^4}{16}J_n'^2(\alpha)N_n'^3(\alpha)J_n(\alpha r) - \tfrac{\pi^2 r_0^2}{8}\left(r_0^2-\tfrac{n^2}{\alpha^2}\right)N_n'^3(\alpha)J_n^2(\alpha r_0)J_n(\alpha r) -\\
&-\tfrac{\pi^2}{16}\left(r_0^2-\tfrac{n^2}{\alpha^2}\right)^2\tfrac{N_n'^3(\alpha)}{J_n'^2(\alpha)}J_n^4(\alpha r_0)J_n(\alpha r) - \tfrac{1}{8\alpha^2}J_n'(\alpha)r^2N_n(\alpha r) + \tfrac{r_0^2}{8\alpha^2}J_n'(\alpha)N_n(\alpha r) +\\
&+\tfrac{\pi n^2}{8\alpha^4}J_n'(\alpha)J_n(\alpha r_0)N_n(\alpha r_0)N_n(\alpha r) - \tfrac{\pi r_0^2}{8\alpha^2}J_n'^2(\alpha)N_n'(\alpha r_0)N_n(\alpha r) - \tfrac{\pi n^2}{8\alpha^4}N_n'(\alpha)J_n^2(\alpha r_0)N_n(\alpha r) +\\
&+\tfrac{\pi r_0^2}{8\alpha^2}J_n'^2(\alpha)N_n'(\alpha)N_n(\alpha r) - \tfrac{\pi^2 r_0^2}{8}\left(r_0^2-\tfrac{n^2}{\alpha^2}\right)J_n'^2(\alpha)N_n'(\alpha)J_n(\alpha r_0)N_n(\alpha r_0)N_n(\alpha r) -\\
&-\tfrac{\pi^2}{8}\left(r_0^2-\tfrac{n^2}{\alpha^2}\right)^2 J_n^3(\alpha r_0)N_n(\alpha r_0)N_n'(\alpha)N_n(\alpha r) - \tfrac{\pi^2 r_0^4}{8}J_n'^3(\alpha)N_n'(\alpha)N_n'(\alpha r_0)N_n(\alpha r) -\\
&-\tfrac{\pi^2 r_0^2}{8}\left(r_0^2-\tfrac{n^2}{\alpha^2}\right)J_n'(\alpha)N_n'(\alpha)N_n'(\alpha r_0)J_n^2(\alpha r_0)N_n(\alpha r) +\\
&+\tfrac{\pi^2}{16}\left(r_0^2-\tfrac{n^2}{\alpha^2}\right)^2 J_n'(\alpha)J_n^2(\alpha r_0)N_n^2(\alpha r_0)N_n(\alpha r) +\\
&+\tfrac{\pi^2 r_0^2}{8}\left(r_0^2-\tfrac{n^2}{\alpha^2}\right)J_n'^2(\alpha)N_n'(\alpha r_0)J_n(\alpha r_0)N_n(\alpha r_0)N_n(\alpha r) + \tfrac{\pi^2 r_0^4}{16}J_n'^3(\alpha)N_n'^2(\alpha r_0)N_n(\alpha r) -\\
&-\tfrac{r_0^2}{4\alpha^2}\left(1-\tfrac{n^2}{\alpha^2}\right)J_n'(\alpha)N_n(\alpha r) - \tfrac{1}{4\alpha^2 J_n'(\alpha)}\left(1-\tfrac{n^2}{\alpha^2}\right)\left(r_0^2-\tfrac{n^2}{\alpha^2}\right)J_n^2(\alpha r_0)N_n(\alpha r) +\\
&+\tfrac{\pi^2 r_0^2}{8}\left(r_0^2-\tfrac{n^2}{\alpha^2}\right)J_n'(\alpha)N_n'^2(\alpha)J_n^2(\alpha r_0)N_n(\alpha r) + \tfrac{\pi^2}{16}\left(r_0^2-\tfrac{n^2}{\alpha^2}\right)^2\tfrac{N_n'^2(\alpha)}{J_n'(\alpha)}J_n^4(\alpha r_0)N_n(\alpha r) +\\
&+\tfrac{\pi^2 r_0^4}{16}J_n'^3(\alpha)N_n'^2(\alpha)N_n(\alpha r)+D[J_n'(\alpha)N_n(\alpha r)-N_n'(\alpha)J_n(\alpha r)]\,.
\end{aligned}
$$

4. Собственные значения, собственные и присоединенные функции при $s \geq 2$

В общем случае s-мерного шара в $\mathbb{R}^s$ $s \geq 2$ задача определения собственных функций для оператора Лапласа со смещениями в производных в классе непрерывных и непрерывно дифференцируемых функций до 2-го порядка включительно определяются условиями

$$
\begin{aligned}
&(\Delta+\lambda)u=\frac{1}{r^{s-1}}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^{s-1}\frac{\partial u}{\partial r}\right)+\frac{1}{r^2}\Delta_\Theta u+\lambda u=0,\ u\in C^{2+\alpha}(\Omega),\\
&\frac{\partial u(r_0,\Theta)}{\partial r}=\frac{\partial u(1,\Theta)}{\partial r},\ \Omega=\{r,\Theta|r\leq 1,\Theta=(\theta_1,\ldots,\theta_{n-1})\},
\end{aligned}
\tag{4.9}
$$

где Δ_Θ – оператор Лапласа на единичной сфере S^{s-1} в $\mathbb{R}^s$.

Разделяя переменные $u(r,\Theta)=X(r)Y(\Theta)$, получаем уравнение для полисферических функций $\Delta_\Theta Y_{s,n}+\mu Y_{s,n}=0$, где $\mu=n(n+s-2)$, а для функций $X(r)$ дифференциальное уравнение $r^2X''(r)+r(s-1)X'(r)+\lambda r^2X(r)-n(n+s-2)X(r)=0$, сводящееся после подстановки $X(r)=r^{-\frac{s}{2}+1}x(r)$ к однородному уравнению Бесселя

$$
x''(r)+\frac{1}{r}x'(r)+\left[\lambda-\frac{\left(n+\frac{s}{2}-1\right)^2}{r^2}\right]x(r)=0. \tag{4.10}
$$

При учёте непрерывности и непрерывной дифференцируемости функции $X(r)$, а также смещения в производных, равенство нулю определителя матрицы граничных условий определяет собственные значения $\lambda = \alpha^2$ как корни уравнения

$$f(\alpha) \equiv \alpha \left[r_0^{-\frac{s}{2}+1} J'_{n+\frac{s}{2}-1}(\alpha r_0) - J'_{n+\frac{s}{2}-1}(\alpha) \right] + \\ + \left(1 - \frac{s}{2}\right) \left[r_0^{-\frac{s}{2}} J_{n+\frac{s}{2}-1}(\alpha r_0) - J_{n+\frac{s}{2}-1}(\alpha) \right] = 0 \quad (4.11)$$

с соответствующей собственной функцией $X_{n+\frac{s}{2}-1}(r) = r^{-\frac{s}{2}+1} x(r) = r^{-\frac{s}{2}+1} J_{n+\frac{s}{2}-1}(\alpha r)$.

Сопряженная задача

$$\begin{array}{l} \Delta v + \lambda v = 0 \text{ в областях } \Omega_{r_0} \text{ и } \Omega \setminus \Omega_{r_0} \text{ с условиями} \\ \dfrac{\partial v(r_0 - 0, \Theta)}{\partial r} = \dfrac{\partial v(r_0 + 0, \Theta)}{\partial r}, \ \dfrac{\partial v(1, \Theta)}{\partial r} = 0, \\ r_0^{s-1}[-v(r_0 + 0, \Theta) + v(r_0 - 0, \Theta)] + v(1 - 0, \Theta) = 0. \end{array} \quad (4.12)$$

при разделении переменных $v(r, \Theta) = \mathcal{X}(r) Y(\Theta)$ даёт то же уравнение для полисферических функций, а для функции $\mathcal{X}(r) = r^{-\frac{s}{2}+1} \chi(r)$ однородное уравнение Бесселя.

Граничные условия определяют однородную систему алгебраических уравнений

$$\begin{cases} \left[\left(1 - \frac{s}{2}\right) r_0^{-\frac{s}{2}} J_{n+\frac{s}{2}-1}(\alpha r_0) + \alpha r_0^{-\frac{s}{2}+1} J'_{n+\frac{s}{2}-1}(\alpha r_0) \right] D_{11}^{(1)} - \\ - \left[\left(1 - \frac{s}{2}\right) r_0^{-\frac{s}{2}} J_{n+\frac{s}{2}-1}(\alpha r_0) + \alpha r_0^{-\frac{s}{2}+1} J'_{n+\frac{s}{2}-1}(\alpha r_0) \right] D_{21}^{(1)} - \\ - \left[\left(1 - \frac{s}{2}\right) r_0^{-\frac{s}{2}} N_{n+\frac{s}{2}-1}(\alpha r_0) + \alpha r_0^{-\frac{s}{2}+1} N'_{n+\frac{s}{2}-1}(\alpha r_0) \right] D_{22}^{(1)} = 0, \\ \left[\left(1 - \frac{s}{2}\right) J_{n+\frac{s}{2}-1}(\alpha) + \alpha J'_{n+\frac{s}{2}-1}(\alpha) \right] D_{21}^{(1)} + \left[\left(1 - \frac{s}{2}\right) N_{n+\frac{s}{2}-1}(\alpha) + \alpha N'_{n+\frac{s}{2}-1}(\alpha) \right] D_{22}^{(1)} = 0, \\ r_0^{\frac{s}{2}} J_{n+\frac{s}{2}-1}(\alpha r_0) D_{11}^{(1)} - \left[r_0^{\frac{s}{2}} J_{n+\frac{s}{2}-1}(\alpha r_0) - J_{n+\frac{s}{2}-1}(\alpha) \right] D_{21}^{(1)} - \\ - \left[r_0^{\frac{s}{2}} N_{n+\frac{s}{2}-1}(\alpha r_0) - N_{n+\frac{s}{2}-1}(\alpha) \right] D_{22}^{(1)} = 0. \end{cases}$$

для определения постоянных в функции

$$\mathcal{X}_{n,s}^{(1)} = r^{-\frac{s}{2}+1} \begin{cases} D_{11}^{(1)} J_{n+\frac{s}{2}-1}(\alpha r), \ 0 \le r < r_0, \\ D_{21}^{(1)} J_{n+\frac{s}{2}-1}(\alpha r) + D_{22}^{(1)} N_{n+\frac{s}{2}-1}(\alpha r), \ r_0 < r \le 1. \end{cases}$$

Равенство определителя системы нулю даёт то же самое условие её разрешимости.

Общее решение системы имеет вид

$$\mathcal{X}_{n,s}^{(1)}(r) = D r^{-\frac{s}{2}+1} \chi_{n+\frac{s}{2}-1}^{(1)}(r) = \\ = D r^{-\frac{s}{2}+1} \begin{cases} \left\{ \left(1 - \frac{s}{2}\right) \left[r_0^{-\frac{s}{2}} N_{n+\frac{s}{2}-1}(\alpha r_0) - N_{n+\frac{s}{2}-1}(\alpha) \right] + \right. \\ \left. + \alpha \left[r_0^{-\frac{s}{2}+1} N'_{n+\frac{s}{2}-1}(\alpha r_0) - N'_{n+\frac{s}{2}-1}(\alpha) \right] \right\} J_{n+\frac{s}{2}-1}(\alpha r), \ 0 \le r < r_0, \\ - \left[\left(1 - \frac{s}{2}\right) N_{n+\frac{s}{2}-1}(\alpha) + \alpha N'_{n+\frac{s}{2}-1}(\alpha) \right] J_{n+\frac{s}{2}-1}(\alpha r) + \\ + \left[\left(1 - \frac{s}{2}\right) J_{n+\frac{s}{2}-1}(\alpha) + \alpha J'_{n+\frac{s}{2}-1}(\alpha) \right] N_{n+\frac{s}{2}-1}(\alpha r), \ r_0 < r \le 1. \end{cases} \quad (4.13)$$

Теорема 4.1. *В случае $s \ge 2$ задача (4.9) имеет собственное значение $\lambda = \alpha^2(n, s)$, определяемое равенством (4.11) с собственными функциями $\Phi_{n,s}^{(1)}(r, \Theta) = X_{n,s}^{(1)}(r) Y_{n,s}(\Theta) = r^{-\frac{s}{2}+1} J_{n+\frac{s}{2}-1}(\alpha r) Y_{n,s}(\Theta)$. Ей отвечает сопряженная задача (4.12) с* *теми же собственными значениями, которым соответствуют собственные функции* $\Psi^{(1)}_{n,s}(r,\Theta)=\mathcal{X}^{(1)}_{n,s}(r)Y_{n,s}(\Theta)=r^{-\frac{s}{2}+1}\chi^{(1)}_{n,s}(r)Y_{n,s}(\Theta)$*, где* $\mathcal{X}^{(1)}_{n,s}(r)$ *определяется* (4.13). *Условие существования (отсутствия) присоединенных элементов имеет вид*

$$I^{(1)}_{n,s}(\alpha)=r_0^{-\frac{s}{2}}J_{n+\frac{s}{2}-1}(\alpha r_0)\left[\left(1-\frac{s}{2}\right)^2+\alpha^2r_0^2-\left(n+\frac{s}{2}-1\right)^2\right]-$$
$$-J_{n+\frac{s}{2}-1}(\alpha)\left[\left(1-\frac{s}{2}\right)^2+\alpha^2-\left(n+\frac{s}{2}-1\right)^2\right]\cong f'(\alpha)=0\ (\neq 0). \quad (4.14)$$

Доказательство. Действительно, условием существования (отсутствия) присоединенных элементов служит обращение в ноль (не равенство нулю) интеграла $I^{(1)}_{n,s}(\alpha)=\int\limits_0^1\rho^{s-1}X^{(1)}(\rho)\mathcal{X}^{(1)}(\rho)d\rho=\int\limits_0^{r_0}\rho x^{(1)}(\rho)\underset{0\le\rho<r_0}{\chi^{(1)}}(\rho)d\rho+\int\limits_{r_0}^1\rho x^{(1)}(\rho)\underset{r_0<\rho\le 1}{\chi^{(1)}}(\rho)d\rho=$

$$=\left\{\left(1-\tfrac{s}{2}\right)\left[r_0^{-\frac{s}{2}}N_{n+\frac{s}{2}-1}(\alpha r_0)-N_{n+\frac{s}{2}-1}(\alpha)\right]+\alpha\left[r_0^{-\frac{s}{2}+1}N'_{n+\frac{s}{2}-1}(\alpha r_0)-N'_{n+\frac{s}{2}-1}(\alpha)\right]\right\}\times$$
$$\times\int\limits_0^{r_0}\rho J^2_{n+\frac{s}{2}-1}(\alpha\rho)d\rho-\left[\left(1-\tfrac{s}{2}\right)N_{n+\frac{s}{2}-1}(\alpha)+\alpha N'_{n+\frac{s}{2}-1}(\alpha)\right]\int\limits_{r_0}^1\rho J^2_{n+\frac{s}{2}-1}(\alpha\rho)d\rho+$$
$$+\left[\left(1-\tfrac{s}{2}\right)J_{n+\frac{s}{2}-1}(\alpha)+\alpha J'_{n+\frac{s}{2}-1}(\alpha)\right]\int\limits_{r_0}^1\rho J_{n+\frac{s}{2}-1}(\alpha\rho)N_{n+\frac{s}{2}-1}(\alpha\rho)d\rho=$$
$$=\left\{\left(1-\tfrac{s}{2}\right)\left[r_0^{-\frac{s}{2}}N_{n+\frac{s}{2}-1}(\alpha r_0)-N_{n+\frac{s}{2}-1}(\alpha)\right]+\alpha\left[r_0^{-\frac{s}{2}+1}N'_{n+\frac{s}{2}-1}(\alpha r_0)-N'_{n+\frac{s}{2}-1}(\alpha)\right]\right\}\times$$
$$\times\left[\tfrac{r_0^2}{2}J'^2_{n+\frac{s}{2}-1}(\alpha r_0)+\tfrac{1}{2}\left(r_0^2-\tfrac{\left(n+\frac{s}{2}-1\right)^2}{\alpha^2}\right)J^2_{n+\frac{s}{2}-1}(\alpha r_0)\right]-\left[\left(1-\tfrac{s}{2}\right)N_{n+\frac{s}{2}-1}(\alpha)+\alpha N'_{n+\frac{s}{2}-1}(\alpha)\right]\times$$
$$\times\left\{\tfrac{1}{2}J'^2_{n+\frac{s}{2}-1}(\alpha)+\tfrac{1}{2}\left(1-\tfrac{\left(n+\frac{s}{2}-1\right)^2}{\alpha^2}\right)J^2_{n+\frac{s}{2}-1}(\alpha)-\tfrac{r_0^2}{2}J'^2_{n+\frac{s}{2}-1}(\alpha r_0)-\right.$$
$$\left.-\tfrac{1}{2}\left(r_0^2-\tfrac{\left(n+\frac{s}{2}-1\right)^2}{\alpha^2}\right)J^2_{n+\frac{s}{2}-1}(\alpha r_0)\right\}+\left[\left(1-\tfrac{s}{2}\right)J_{n+\frac{s}{2}-1}(\alpha)+\alpha J'_{n+\frac{s}{2}-1}(\alpha)\right]\times$$
$$\times\left\{\tfrac{1}{2}J'_{n+\frac{s}{2}-1}(\alpha)N'_{n+\frac{s}{2}-1}(\alpha)+\tfrac{1}{2}\left(1-\tfrac{\left(n+\frac{s}{2}-1\right)^2}{\alpha^2}\right)J_{n+\frac{s}{2}-1}(\alpha)N_{n+\frac{s}{2}-1}(\alpha)-\right.$$
$$\left.-\tfrac{r_0^2}{2}J'_{n+\frac{s}{2}-1}(\alpha r_0)N'_{n+\frac{s}{2}-1}(\alpha r_0)-\tfrac{1}{2}\left(r_0^2-\tfrac{\left(n+\frac{s}{2}-1\right)^2}{\alpha^2}\right)J_{n+\frac{s}{2}-1}(\alpha r_0)N_{n+\frac{s}{2}-1}(\alpha r_0)\right\}=$$
$$=\tfrac{1}{2}\left(1-\tfrac{s}{2}\right)r_0^{2-\frac{s}{2}}J'^2_{n+\frac{s}{2}-1}(\alpha r_0)N_{n+\frac{s}{2}-1}(\alpha r_0)-\left(1-\tfrac{s}{2}\right)\tfrac{r_0^2}{2}J'^2_{n+\frac{s}{2}-1}(\alpha r_0)N_{n+\frac{s}{2}-1}(\alpha)+$$
$$+\tfrac{1}{2}\alpha r_0^{3-\frac{s}{2}}J'^2_{n+\frac{s}{2}-1}(\alpha r_0)N'_{n+\frac{s}{2}-1}(\alpha r_0)-\tfrac{1}{2}\alpha r_0^2J'^2_{n+\frac{s}{2}-1}(\alpha r_0)N'_{n+\frac{s}{2}-1}(\alpha)+$$
$$+\tfrac{1}{2}\left(1-\tfrac{s}{2}\right)\left(r_0^2-\tfrac{\left(n+\frac{s}{2}-1\right)^2}{\alpha^2}\right)r_0^{-\frac{s}{2}}J^2_{n+\frac{s}{2}-1}(\alpha r_0)N_{n+\frac{s}{2}-1}(\alpha r_0)-$$
$$-\tfrac{1}{2}\left(1-\tfrac{s}{2}\right)\left(r_0^2-\tfrac{\left(n+\frac{s}{2}-1\right)^2}{\alpha^2}\right)J^2_{n+\frac{s}{2}-1}(\alpha r_0)N_{n+\frac{s}{2}-1}(\alpha)+$$
$$+\tfrac{1}{2}\alpha r_0^{1-\frac{s}{2}}\left(r_0^2-\tfrac{\left(n+\frac{s}{2}-1\right)^2}{\alpha^2}\right)J^2_{n+\frac{s}{2}-1}(\alpha r_0)N'_{n+\frac{s}{2}-1}(\alpha r_0)-$$
$$-\tfrac{1}{2}\alpha\left(r_0^2-\tfrac{\left(n+\frac{s}{2}-1\right)^2}{\alpha^2}\right)J^2_{n+\frac{s}{2}-1}(\alpha r_0)N'_{n+\frac{s}{2}-1}(\alpha)-$$
$$-\tfrac{1}{2}\left(1-\tfrac{s}{2}\right)J'^2_{n+\frac{s}{2}-1}(\alpha)N_{n+\frac{s}{2}-1}(\alpha)-\tfrac{1}{2}\alpha J'^2_{n+\frac{s}{2}-1}(\alpha)N'_{n+\frac{s}{2}-1}(\alpha)-$$
$$-\tfrac{1}{2}\left(1-\tfrac{s}{2}\right)\left(1-\tfrac{\left(n+\frac{s}{2}-1\right)^2}{\alpha^2}\right)J^2_{n+\frac{s}{2}-1}(\alpha)N_{n+\frac{s}{2}-1}(\alpha)-\tfrac{1}{2}\alpha\left(1-\tfrac{\left(n+\frac{s}{2}-1\right)^2}{\alpha^2}\right)J^2_{n+\frac{s}{2}-1}(\alpha)N'_{n+\frac{s}{2}-1}(\alpha)+$$
$$+\left(1-\tfrac{s}{2}\right)\tfrac{r_0^2}{2}J'^2_{n+\frac{s}{2}-1}(\alpha r_0)N_{n+\frac{s}{2}-1}(\alpha)+\tfrac{1}{2}\alpha r_0^2J'^2_{n+\frac{s}{2}-1}(\alpha r_0)N'_{n+\frac{s}{2}-1}(\alpha)+$$
$$+\tfrac{1}{2}\left(1-\tfrac{s}{2}\right)\left(r_0^2-\tfrac{\left(n+\frac{s}{2}-1\right)^2}{\alpha^2}\right)J^2_{n+\frac{s}{2}-1}(\alpha r_0)N_{n+\frac{s}{2}-1}(\alpha)+$$

$$+\frac{1}{2}\alpha\left(r_0^2-\frac{\left(n+\frac{s}{2}-1\right)^2}{\alpha^2}\right)J^2_{n+\frac{s}{2}-1}(\alpha r_0)N'_{n+\frac{s}{2}-1}(\alpha)+$$
$$+\frac{1}{2}\left(1-\frac{s}{2}\right)\left(1-\frac{\left(n+\frac{s}{2}-1\right)^2}{\alpha^2}\right)J^2_{n+\frac{s}{2}-1}(\alpha)N_{n+\frac{s}{2}-1}(\alpha)+$$
$$+\frac{1}{2}\alpha\left(1-\frac{\left(n+\frac{s}{2}-1\right)^2}{\alpha^2}\right)J_{n+\frac{s}{2}-1}(\alpha)J'_{n+\frac{s}{2}-1}(\alpha)N_{n+\frac{s}{2}-1}(\alpha)+$$
$$+\frac{1}{2}\left(1-\frac{s}{2}\right)J'_{n+\frac{s}{2}-1}(\alpha)J_{n+\frac{s}{2}-1}(\alpha)N'_{n+\frac{s}{2}-1}(\alpha)+$$
$$+\frac{1}{2}\alpha J'^2_{n+\frac{s}{2}-1}(\alpha)N'_{n+\frac{s}{2}-1}(\alpha)-\frac{1}{2}\left(1-\frac{s}{2}\right)\left(r_0^2-\frac{\left(n+\frac{s}{2}-1\right)^2}{\alpha^2}\right)J_{n+\frac{s}{2}-1}(\alpha)J_{n+\frac{s}{2}-1}(\alpha r_0)N_{n+\frac{s}{2}-1}(\alpha r_0)-$$
$$-\frac{1}{2}\alpha\left(r_0^2-\frac{\left(n+\frac{s}{2}-1\right)^2}{\alpha^2}\right)J'_{n+\frac{s}{2}-1}(\alpha)J_{n+\frac{s}{2}-1}(\alpha r_0)N_{n+\frac{s}{2}-1}(\alpha r_0)-$$
$$-\frac{r_0^2}{2}\left(1-\frac{s}{2}\right)J_{n+\frac{s}{2}-1}(\alpha)J'_{n+\frac{s}{2}-1}(\alpha r_0)N'_{n+\frac{s}{2}-1}(\alpha r_0)-\frac{1}{2}\alpha r_0^2J'_{n+\frac{s}{2}-1}(\alpha)J'_{n+\frac{s}{2}-1}(\alpha r_0)N'_{n+\frac{s}{2}-1}(\alpha r_0)=$$
$$=\frac{1}{2}\left(1-\frac{s}{2}\right)r_0^{2-\frac{s}{2}}J'^2_{n+\frac{s}{2}-1}(\alpha r_0)N_{n+\frac{s}{2}-1}(\alpha r_0)+\frac{1}{2}\alpha r_0^{3-\frac{s}{2}}J'^2_{n+\frac{s}{2}-1}(\alpha r_0)N'_{n+\frac{s}{2}-1}(\alpha r_0)+$$
$$+\frac{1}{2}\left(1-\frac{s}{2}\right)\left(r_0^2-\frac{\left(n+\frac{s}{2}-1\right)^2}{\alpha^2}\right)r_0^{-\frac{s}{2}}J^2_{n+\frac{s}{2}-1}(\alpha r_0)N_{n+\frac{s}{2}-1}(\alpha r_0)-\frac{1}{\pi}\left(1-\frac{\left(n+\frac{s}{2}-1\right)^2}{\alpha^2}\right)J_{n+\frac{s}{2}-1}(\alpha)-$$
$$+\frac{1}{2}\alpha r_0^{1-\frac{s}{2}}\left(r_0^2-\frac{\left(n+\frac{s}{2}-1\right)^2}{\alpha^2}\right)J^2_{n+\frac{s}{2}-1}(\alpha r_0)N'_{n+\frac{s}{2}-1}(\alpha r_0)+\frac{1}{\pi\alpha}\left(1-\frac{s}{2}\right)J'_{n+\frac{s}{2}-1}(\alpha)-$$
$$-\frac{1}{2}\left(1-\frac{s}{2}\right)\left(r_0^2-\frac{\left(n+\frac{s}{2}-1\right)^2}{\alpha^2}\right)J_{n+\frac{s}{2}-1}(\alpha)J_{n+\frac{s}{2}-1}(\alpha r_0)N_{n+\frac{s}{2}-1}(\alpha r_0)-$$
$$-\frac{1}{2}\alpha\left(r_0^2-\frac{\left(n+\frac{s}{2}-1\right)^2}{\alpha^2}\right)J'_{n+\frac{s}{2}-1}(\alpha)J_{n+\frac{s}{2}-1}(\alpha r_0)N_{n+\frac{s}{2}-1}(\alpha r_0)-$$
$$-\frac{r_0^2}{2}\left(1-\frac{s}{2}\right)J_{n+\frac{s}{2}-1}(\alpha)J'_{n+\frac{s}{2}-1}(\alpha r_0)N'_{n+\frac{s}{2}-1}(\alpha r_0)-\frac{1}{2}\alpha r_0^2J'_{n+\frac{s}{2}-1}(\alpha)J'_{n+\frac{s}{2}-1}(\alpha r_0)N'_{n+\frac{s}{2}-1}(\alpha r_0).$$

Условие разрешимости позволяет выполнить преобразование в полученном выражении

$$\frac{1}{2}\alpha r_0^2\left[r_0^{-\frac{s}{2}+1}J'_{n+\frac{s}{2}-1}(\alpha r_0)-J'_{n+\frac{s}{2}-1}(\alpha)\right]J'_{n+\frac{s}{2}-1}(\alpha r_0)N'_{n+\frac{s}{2}-1}(\alpha r_0)+$$
$$+\frac{1}{2}\left(1-\frac{s}{2}\right)\left(r_0^2-\frac{\left(n+\frac{s}{2}-1\right)^2}{\alpha^2}\right)\left[r_0^{-\frac{s}{2}}J_{n+\frac{s}{2}-1}(\alpha r_0)-J_{n+\frac{s}{2}-1}(\alpha)\right]J_{n+\frac{s}{2}-1}(\alpha r_0)N_{n+\frac{s}{2}-1}(\alpha r_0)=$$
$$=-\frac{r_0^2}{2}\left(1-\frac{s}{2}\right)\left[r_0^{-\frac{s}{2}}J_{n+\frac{s}{2}-1}(\alpha r_0)-J_{n+\frac{s}{2}-1}(\alpha)\right]J'_{n+\frac{s}{2}-1}(\alpha r_0)N'_{n+\frac{s}{2}-1}(\alpha r_0)-$$
$$-\frac{1}{2}\alpha\left(r_0^2-\frac{\left(n+\frac{s}{2}-1\right)^2}{\alpha^2}\right)\left[r_0^{-\frac{s}{2}+1}J'_{n+\frac{s}{2}-1}(\alpha r_0)-J'_{n+\frac{s}{2}-1}(\alpha)\right]J_{n+\frac{s}{2}-1}(\alpha r_0)N_{n+\frac{s}{2}-1}(\alpha r_0).$$

Тогда оно примет вид

$$\frac{1}{2}\left(1-\frac{s}{2}\right)r_0^{-\frac{s}{2}+2}J'^2_{n+\frac{s}{2}-1}(\alpha r_0)N_{n+\frac{s}{2}-1}(\alpha r_0)-$$
$$-\frac{1}{2}\left(1-\frac{s}{2}\right)r_0^{2-\frac{s}{2}}J_{n+\frac{s}{2}-1}(\alpha r_0)J'_{n+\frac{s}{2}-1}(\alpha r_0)N'_{n+\frac{s}{2}-1}(\alpha r_0)+$$
$$+\frac{r_0^2}{2}\left(1-\frac{s}{2}\right)J_{n+\frac{s}{2}-1}(\alpha)J'_{n+\frac{s}{2}-1}(\alpha r_0)N'_{n+\frac{s}{2}-1}(\alpha r_0)-$$
$$-\frac{1}{2}\alpha r_0^{-\frac{s}{2}+1}\left(r_0^2-\frac{\left(n+\frac{s}{2}-1\right)^2}{\alpha^2}\right)J'_{n+\frac{s}{2}-1}(\alpha r_0)J_{n+\frac{s}{2}-1}(\alpha r_0)N_{n+\frac{s}{2}-1}(\alpha r_0)+$$
$$+\frac{1}{2}\alpha\left(r_0^2-\frac{\left(n+\frac{s}{2}-1\right)^2}{\alpha^2}\right)J'_{n+\frac{s}{2}-1}(\alpha)J_{n+\frac{s}{2}-1}(\alpha r_0)N_{n+\frac{s}{2}-1}(\alpha r_0)+$$
$$+\frac{1}{2}\alpha r_0^{-\frac{s}{2}+1}\left(r_0^2-\frac{\left(n+\frac{s}{2}-1\right)^2}{\alpha^2}\right)J^2_{n+\frac{s}{2}-1}(\alpha r_0)N'_{n+\frac{s}{2}-1}(\alpha r_0)+\frac{1}{\pi\alpha}\left(1-\frac{s}{2}\right)J'_{n+\frac{s}{2}-1}(\alpha)-$$
$$-\frac{1}{\pi}\left(1-\frac{\left(n+\frac{s}{2}-1\right)^2}{\alpha^2}\right)J_{n+\frac{s}{2}-1}(\alpha)-\frac{1}{2}\alpha\left(r_0^2-\frac{\left(n+\frac{s}{2}-1\right)^2}{\alpha^2}\right)J'_{n+\frac{s}{2}-1}(\alpha)J_{n+\frac{s}{2}-1}(\alpha r_0)N_{n+\frac{s}{2}-1}(\alpha r_0)-$$
$$-\frac{r_0^2}{2}\left(1-\frac{s}{2}\right)J_{n+\frac{s}{2}-1}(\alpha)J'_{n+\frac{s}{2}-1}(\alpha r_0)N'_{n+\frac{s}{2}-1}(\alpha r_0)=-\frac{1}{\pi\alpha}\left(1-\frac{s}{2}\right)r_0^{-\frac{s}{2}+1}J'_{n+\frac{s}{2}-1}(\alpha r_0)+$$
$$+\frac{1}{\pi}r_0^{-\frac{s}{2}}\left(r_0^2-\frac{\left(n+\frac{s}{2}-1\right)^2}{\alpha^2}\right)J_{n+\frac{s}{2}-1}(\alpha r_0)+\frac{1}{\pi\alpha}\left(1-\frac{s}{2}\right)J'_{n+\frac{s}{2}-1}(\alpha)-\frac{1}{\pi}\left(1-\frac{\left(n+\frac{s}{2}-1\right)^2}{\alpha^2}\right)J_{n+\frac{s}{2}-1}(\alpha)=$$

$$= -\frac{\alpha}{\pi\alpha^2}\left(1-\frac{s}{2}\right)\left[r_0^{-\frac{s}{2}+1}J'_{n+\frac{s}{2}-1}(\alpha r_0)-J'_{n+\frac{s}{2}-1}(\alpha)\right] + \frac{1}{\pi}r_0^{-\frac{s}{2}}\left(r_0^2-\frac{\left(n+\frac{s}{2}-1\right)^2}{\alpha^2}\right)J_{n+\frac{s}{2}-1}(\alpha r_0) -$$
$$-\frac{1}{\pi}\left(1-\frac{\left(n+\frac{s}{2}-1\right)^2}{\alpha^2}\right)J_{n+\frac{s}{2}-1}(\alpha) = \frac{1}{\pi\alpha^2}\left(1-\frac{s}{2}\right)^2 r_0^{-\frac{s}{2}}J_{n+\frac{s}{2}-1}(\alpha r_0) - \frac{1}{\pi\alpha^2}\left(1-\frac{s}{2}\right)^2 J_{n+\frac{s}{2}-1}(\alpha) +$$
$$+\frac{1}{\pi}r_0^{-\frac{s}{2}}\left(r_0^2-\frac{\left(n+\frac{s}{2}-1\right)^2}{\alpha^2}\right)J_{n+\frac{s}{2}-1}(\alpha r_0) - \frac{1}{\pi}\left(1-\frac{\left(n+\frac{s}{2}-1\right)^2}{\alpha^2}\right)J_{n+\frac{s}{2}-1}(\alpha) =$$
$$= \frac{1}{\pi\alpha^2}\left\{r_0^{-\frac{s}{2}}J_{n+\frac{s}{2}-1}(\alpha r_0)\left[\left(1-\frac{s}{2}\right)^2+\alpha^2 r_0^2-\left(n+\frac{s}{2}-1\right)^2\right]-\right.$$
$$\left.-J_{n+\frac{s}{2}-1}(\alpha)\left[\left(1-\frac{s}{2}\right)^2+\alpha^2-\left(n+\frac{s}{2}-1\right)^2\right]\right\}.$$

В то же время

$$f'(\alpha) = \left[r_0^{-\frac{s}{2}+1}J'_{n+\frac{s}{2}-1}(\alpha r_0)-J'_{n+\frac{s}{2}-1}(\alpha)\right] + \alpha\left[r_0^{-\frac{s}{2}+2}J''_{n+\frac{s}{2}-1}(\alpha r_0)-J''_{n+\frac{s}{2}-1}(\alpha)\right] +$$
$$+\left(1-\frac{s}{2}\right)\left[r_0^{-\frac{s}{2}+1}J'_{n+\frac{s}{2}-1}(\alpha r_0)-J'_{n+\frac{s}{2}-1}(\alpha)\right] = r_0^{-\frac{s}{2}+1}J'_{n+\frac{s}{2}-1}(\alpha r_0) - J'_{n+\frac{s}{2}-1}(\alpha) -$$
$$-r_0^{-\frac{s}{2}+1}J'_{n+\frac{s}{2}-1}(\alpha r_0) - \alpha r_0^{-\frac{s}{2}+2}\left(1-\frac{\left(n+\frac{s}{2}-1\right)^2}{\alpha^2 r_0^2}\right)J_{n+\frac{s}{2}-1}(\alpha r_0) + J'_{n+\frac{s}{2}-1}(\alpha) +$$
$$+\alpha\left(1-\frac{\left(n+\frac{s}{2}-1\right)^2}{\alpha^2}\right)J_{n+\frac{s}{2}-1}(\alpha) + \frac{\alpha}{\alpha}\left(1-\frac{s}{2}\right)\left[r_0^{-\frac{s}{2}+1}J'_{n+\frac{s}{2}-1}(\alpha r_0)-J'_{n+\frac{s}{2}-1}(\alpha)\right] =$$
$$= -\alpha r_0^{-\frac{s}{2}+2}\left(1-\frac{\left(n+\frac{s}{2}-1\right)^2}{\alpha^2 r_0^2}\right)J_{n+\frac{s}{2}-1}(\alpha r_0) + \alpha\left(1-\frac{\left(n+\frac{s}{2}-1\right)^2}{\alpha^2}\right)J_{n+\frac{s}{2}-1}(\alpha) -$$
$$-\frac{1}{\alpha}\left(1-\frac{s}{2}\right)^2\left[r_0^{-\frac{s}{2}}J_{n+\frac{s}{2}-1}(\alpha r_0)-J_{n+\frac{s}{2}-1}(\alpha)\right] =$$
$$= J_{n+\frac{s}{2}-1}(\alpha r_0)\left[-\frac{1}{\alpha}r_0^{-\frac{s}{2}}\left(1-\frac{s}{2}\right)^2-\frac{1}{\alpha}\alpha^2 r_0^{-\frac{s}{2}}r_0^2\left(1-\frac{\left(n+\frac{s}{2}-1\right)^2}{\alpha^2 r_0^2}\right)\right] +$$
$$+ J_{n+\frac{s}{2}-1}(\alpha)\left[\frac{1}{\alpha}\left(1-\frac{s}{2}\right)^2+\frac{1}{\alpha}\alpha^2\left(1-\frac{\left(n+\frac{s}{2}-1\right)^2}{\alpha^2}\right)\right] =$$
$$= -\frac{1}{\alpha}r_0^{-\frac{s}{2}}J_{n+\frac{s}{2}-1}(\alpha r_0)\left[\left(1-\frac{s}{2}\right)^2+\alpha^2 r_0^2\left(1-\frac{\left(n+\frac{s}{2}-1\right)^2}{\alpha^2 r_0^2}\right)\right] +$$
$$+\frac{1}{\alpha}J_{n+\frac{s}{2}-1}(\alpha)\left[\left(1-\frac{s}{2}\right)^2+\alpha^2\left(1-\frac{\left(n+\frac{s}{2}-1\right)^2}{\alpha^2}\right)\right] =$$
$$= -\frac{1}{\alpha}\left\{r_0^{-\frac{s}{2}}J_{n+\frac{s}{2}-1}(\alpha r_0)\left[\left(1-\frac{s}{2}\right)^2+\alpha^2 r_0^2-\left(n+\frac{s}{2}-1\right)^2\right]-\right.$$
$$\left.-J_{n+\frac{s}{2}-1}(\alpha)\left[\left(1-\frac{s}{2}\right)^2+\alpha^2-\left(n+\frac{s}{2}-1\right)^2\right]\right\}.$$

Таким образом, $I^{(1)}_{n,s}(\alpha) \cong f'(\alpha)$.

Доказательство закончено.

Подобно вычислению собственных функций задача разыскания $\Phi^{(2)}_{n,s}(r,\Theta)$ ($\Psi^{(2)}_{n,s}(r,\Theta)$) сводится к решению граничных задач для неоднородного уравнения Бесселя с правыми частями $J_{n+\frac{s}{2}-1}(\alpha r)$ (соответственно $\chi_{n,s}(\alpha r)$) и граничными условиями смещения в производных, непрерывности и непрерывной дифференцируемости в точке r_0 для прямой задачи и условиями (4.12) для сопряжённой задачи.

4.1. Прямая задача

Вычисление $X^{(2)}_{n,s}(r)$ как и ранее сводится к решению неоднородного уравнения Бесселя

$$x^{(2)\prime\prime}(r)+\frac{1}{r}x^{(2)\prime}(r)+\left[\alpha^2-\frac{\left(n+\frac{s}{2}-1\right)^2}{r^2}\right]x^{(2)}(r) = J_{n+\frac{s}{2}-1}(\alpha r)$$

с теми же граничными условиями (4.9).

Применение метода вариации произвольных постоянных определяет $X_{n,s}^{(2)}(r)$ в следующем виде

$$X_{n,s}^{(2)}(r)=r^{-\frac{s}{2}+1}x^{(2)}(r)=-\frac{1}{2\alpha}r^{-\frac{s}{2}+2}J_{n+\frac{s}{2}-1}(\alpha r)+Cr^{-\frac{s}{2}+1}J_{n+\frac{s}{2}-1}(\alpha r).$$

Для выяснения существования (отсутствия) $X_{n,s}^{(3)}(r)$ требуется вычислить интеграл $I_{n,s}^{(2)}(\alpha) = \int\limits_0^1 \rho^{s-1}X^{(2)}(\rho)\mathcal{X}^{(1)}(\rho)d\rho = \int\limits_0^{r_0}\rho x^{(2)}(\rho)\underset{0\le\rho<r_0}{\chi^{(1)}}(\rho)d\rho + \int\limits_{r_0}^1 \rho x^{(2)}(\rho)\underset{r_0<\rho\le 1}{\chi^{(1)}}(\rho)d\rho = -\frac{1}{2\alpha}\left\{\left(1-\frac{s}{2}\right)\left[r_0^{-\frac{s}{2}}N_{n+\frac{s}{2}-1}(\alpha r_0)-N_{n+\frac{s}{2}-1}(\alpha)\right]+\alpha\left[r_0^{-\frac{s}{2}+1}N'_{n+\frac{s}{2}-1}(\alpha r_0)-N'_{n+\frac{s}{2}-1}(\alpha)\right]\right\}\times \int\limits_0^{r_0}\rho^2 J'_{n+\frac{s}{2}-1}(\alpha\rho)J_{n+\frac{s}{2}-1}(\alpha\rho)d\rho + \frac{1}{2\alpha}\left[\left(1-\frac{s}{2}\right)N_{n+\frac{s}{2}-1}(\alpha)+\alpha N'_{n+\frac{s}{2}-1}(\alpha)\right]\times \int\limits_{r_0}^1\rho^2 J'_{n+\frac{s}{2}-1}(\alpha\rho)J_{n+\frac{s}{2}-1}(\alpha\rho)d\rho - \frac{1}{2\alpha}\left[\left(1-\frac{s}{2}\right)J_{n+\frac{s}{2}-1}(\alpha)+\alpha J'_{n+\frac{s}{2}-1}(\alpha)\right]\times \int\limits_{r_0}^1\rho^2 J'_{n+\frac{s}{2}-1}(\alpha\rho)N_{n+\frac{s}{2}-1}(\alpha\rho)d\rho \cong -2n^2r_0^{-\frac{s}{2}}J_{n+\frac{s}{2}-1}(\alpha r_0) - 2\alpha\left(1-\frac{s}{2}\right)r_0^{-\frac{s}{2}+1}J'_{n+\frac{s}{2}-1}(\alpha r_0) + \left[(1-r_0^2)\alpha^3+2\alpha\left(1-\frac{s}{2}\right)\right]J'_{n+\frac{s}{2}-1}(\alpha)+\left[(1-r_0^2)\left(1-\frac{s}{2}\right)\alpha^2+2n^2\right]J_{n+\frac{s}{2}-1}(\alpha)$.

При этом $f''(\alpha)$ трудоёмкими вычислениями с использованием условий $f(\alpha)=0$ и $f'(\alpha)=0$ приводится к виду $f''(\alpha)\cong I_{n,s}^{(2)}(\alpha)+2J_{n+\frac{s}{2}-1}(\alpha)\left[\left(1-\frac{s}{2}\right)^2+\alpha^2-n^2\right]-2J_{n+\frac{s}{2}-1}(\alpha r_0)r_0^{-\frac{s}{2}}\left[\left(1-\frac{s}{2}\right)^2+\alpha^2r_0^2-n^2\right]=I_{n,s}^{(2)}(\alpha)+R_{n,s}(\alpha)$.

Это означает, что вопрос о существовании $X_{n,s}^{(3)}(r)$ сводится к разрешимости системы $R_{n,s}(\alpha)$, $f'(\alpha)=0$, т.е. к существованию решений следующей однородной системы

$$\begin{cases} J_{n+\frac{s}{2}-1}(\alpha)\left[\left(1-\dfrac{s}{2}\right)^2+\alpha^2-n^2\right]-J_{n+\frac{s}{2}-1}(\alpha r_0)r_0^{-\frac{s}{2}}\left[\left(1-\dfrac{s}{2}\right)^2+\alpha^2r_0^2-n^2\right]=0,\\ J_{n+\frac{s}{2}-1}(\alpha)\left[2n\left(1-\dfrac{s}{2}\right)+\alpha^2-n^2\right]-J_{n+\frac{s}{2}-1}(\alpha r_0)r_0^{-\frac{s}{2}}\left[2n\left(1-\dfrac{s}{2}\right)+\alpha^2r_0^2-n^2\right]=0,\end{cases} \tag{4.15}$$

с определителем $\Delta = \left(1-\frac{s}{2}\right)^2\alpha^2[1-r_0^2]+2n\alpha^2\left(1-\frac{s}{2}\right)[r_0^2-1] = \alpha^2\left(1-\frac{s}{2}\right)(1-r_0^2)\left[1-\frac{s}{2}-2n\right]\cong 1-\frac{s}{2}-2n\neq 0$.

Таким образом, мы приходим к следующему утверждению

Т е о р е м а 4.2. *При $s>2$ ЖЦ имеют длину два.*

З а м е ч а н и е 4.1. *Однако при $s=2$ определитель системы* (4.15) *обращается в ноль, что подтверждает справедливость предшествующих результатов.*

4.2. Сопряжённая задача

Вычисление $\mathcal{X}_{n,s}^{(2)}(r)$ подобно сводится к решению неоднородного уравнения Бесселя с правой частью $\mathcal{X}_{n,s}^{(1)}(r)$ и с граничными условиями (4.12) методом Лагранжа. Решение на левом промежутке $\underset{0\le r<r_0}{\mathcal{X}^{(2)}}(r) = -\frac{1}{2\alpha}\left\{\left(1-\frac{s}{2}\right)\left[r_0^{-\frac{s}{2}}N_{n+\frac{s}{2}-1}(\alpha r_0)-N_{n+\frac{s}{2}-1}(\alpha)\right]+\alpha\left[r_0^{-\frac{s}{2}+1}N'_{n+\frac{s}{2}-1}(\alpha r_0)-N'_{n+\frac{s}{2}-1}(\alpha)\right]\right\}rJ'_{n+\frac{s}{2}-1}(\alpha r) - \frac{1}{2}r_0^{-\frac{s}{2}}\left(r_0^2-\frac{\left(n+\frac{s}{2}-1\right)^2}{\alpha^2}\right)\times \left[\left(1-\frac{s}{2}\right)J_{n+\frac{s}{2}-1}(\alpha)+\alpha J'_{n+\frac{s}{2}-1}(\alpha)\right]^{-1}\left\{\left(1-\frac{s}{2}\right)\left[r_0^{-\frac{s}{2}}N_{n+\frac{s}{2}-1}(\alpha r_0)-N_{n+\frac{s}{2}-1}(\alpha)\right]+\right.$

$$+\alpha\left[r_0^{-\frac{s}{2}+1}N'_{n+\frac{s}{2}-1}(\alpha r_0)-N'_{n+\frac{s}{2}-1}(\alpha)\right]\Big\}J_{n+\frac{s}{2}-1}(\alpha r_0)J_{n+\frac{s}{2}-1}(\alpha r)+\frac{1}{2\alpha}\left(1-\frac{s}{2}\right)r_0^{-\frac{s}{2}+1}\times$$
$$\times\left[\left(1-\frac{s}{2}\right)J_{n+\frac{s}{2}-1}(\alpha)+\alpha J'_{n+\frac{s}{2}-1}(\alpha)\right]^{-1}\Big\{\left(1-\frac{s}{2}\right)\left[r_0^{-\frac{s}{2}}N_{n+\frac{s}{2}-1}(\alpha r_0)-N_{n+\frac{s}{2}-1}(\alpha)\right]+$$
$$+\alpha\left[r_0^{-\frac{s}{2}+1}N'_{n+\frac{s}{2}-1}(\alpha r_0)-N'_{n+\frac{s}{2}-1}(\alpha)\right]\Big\}J'_{n+\frac{s}{2}-1}(\alpha r_0)J_{n+\frac{s}{2}-1}(\alpha r)+$$
$$+\frac{1}{\pi}\left[\left(1-\frac{s}{2}\right)J_{n+\frac{s}{2}-1}(\alpha)+\alpha J'_{n+\frac{s}{2}-1}(\alpha)\right]^{-1}\left(1-\frac{\left(n+\frac{s}{2}-1\right)^2}{\alpha^2}\right)J_{n+\frac{s}{2}-1}(\alpha r)+$$
$$+\frac{1}{\pi\alpha^2}\left(1-\frac{s}{2}\right)^2\left[\left(1-\frac{s}{2}\right)J_{n+\frac{s}{2}-1}(\alpha)+\alpha J'_{n+\frac{s}{2}-1}(\alpha)\right]^{-1}J_{n+\frac{s}{2}-1}(\alpha r)-$$
$$-\frac{\pi}{4}\left(r_0^2-\frac{\left(n+\frac{s}{2}-1\right)^2}{\alpha^2}\right)\left[\left(1-\frac{s}{2}\right)J_{n+\frac{s}{2}-1}(\alpha)+\alpha J'_{n+\frac{s}{2}-1}(\alpha)\right]N^2_{n+\frac{s}{2}-1}(\alpha r_0)J_{n+\frac{s}{2}-1}(\alpha r)-$$
$$-\frac{\pi r_0^2}{4}\left[\left(1-\frac{s}{2}\right)J_{n+\frac{s}{2}-1}(\alpha)+\alpha J'_{n+\frac{s}{2}-1}(\alpha)\right]N'^2_{n+\frac{s}{2}-1}(\alpha r_0)J_{n+\frac{s}{2}-1}(\alpha r)-$$
$$-\frac{\pi r_0^2}{4}\left[\left(1-\frac{s}{2}\right)J_{n+\frac{s}{2}-1}(\alpha)+\alpha J'_{n+\frac{s}{2}-1}(\alpha)\right]^{-1}\left[\left(1-\frac{s}{2}\right)N_{n+\frac{s}{2}-1}(\alpha)+\alpha N'_{n+\frac{s}{2}-1}(\alpha)\right]^2\times$$
$$\times J'^2_{n+\frac{s}{2}-1}(\alpha r_0)J_{n+\frac{s}{2}-1}(\alpha r)-\frac{\pi}{4}\left(r_0^2-\frac{\left(n+\frac{s}{2}-1\right)^2}{\alpha^2}\right)\left[\left(1-\frac{s}{2}\right)J_{n+\frac{s}{2}-1}(\alpha)+\alpha J'_{n+\frac{s}{2}-1}(\alpha)\right]^{-1}\times$$
$$\times\left[\left(1-\frac{s}{2}\right)N_{n+\frac{s}{2}-1}(\alpha)+\alpha N'_{n+\frac{s}{2}-1}(\alpha)\right]^2J^2_{n+\frac{s}{2}-1}(\alpha r_0)J_{n+\frac{s}{2}-1}(\alpha r)+\frac{\pi}{2}\left(r_0^2-\frac{\left(n+\frac{s}{2}-1\right)^2}{\alpha^2}\right)\times$$
$$\times\left[\left(1-\frac{s}{2}\right)N_{n+\frac{s}{2}-1}(\alpha)+\alpha N'_{n+\frac{s}{2}-1}(\alpha)\right]J_{n+\frac{s}{2}-1}(\alpha r_0)N_{n+\frac{s}{2}-1}(\alpha r_0)J_{n+\frac{s}{2}-1}(\alpha r)+$$
$$+\frac{\pi r_0^2}{2}\left[\left(1-\frac{s}{2}\right)N_{n+\frac{s}{2}-1}(\alpha)+\alpha N'_{n+\frac{s}{2}-1}(\alpha)\right]J'_{n+\frac{s}{2}-1}(\alpha r_0)N'_{n+\frac{s}{2}-1}(\alpha r_0)J_{n+\frac{s}{2}-1}(\alpha r)+$$
$$+D\left\{\left(1-\frac{s}{2}\right)\left[r_0^{-\frac{s}{2}}N_{n+\frac{s}{2}-1}(\alpha r_0)-N_{n+\frac{s}{2}-1}(\alpha)\right]+\alpha\left[r_0^{-\frac{s}{2}+1}N'_{n+\frac{s}{2}-1}(\alpha r_0)-N'_{n+\frac{s}{2}-1}(\alpha)\right]\right\}\times$$
$$\times J_{n+\frac{s}{2}-1}(\alpha r)$$

и на правом промежутке

$$\underset{r_0<r\le 1}{\mathcal{X}^{(2)}(r)}=\frac{r}{2\alpha}\left[\left(1-\frac{s}{2}\right)N_{n+\frac{s}{2}-1}(\alpha)+\alpha N'_{n+\frac{s}{2}-1}(\alpha)\right]J'_{n+\frac{s}{2}-1}(\alpha r)-$$
$$-\frac{r}{2\alpha}\left[\left(1-\frac{s}{2}\right)J_{n+\frac{s}{2}-1}(\alpha)+\alpha J'_{n+\frac{s}{2}-1}(\alpha)\right]N'_{n+\frac{s}{2}-1}(\alpha r)+\frac{\pi}{4}\left(r_0^2-\frac{\left(n+\frac{s}{2}-1\right)^2}{\alpha^2}\right)\times$$
$$\times\left[\left(1-\frac{s}{2}\right)N_{n+\frac{s}{2}-1}(\alpha)+\alpha N'_{n+\frac{s}{2}-1}(\alpha)\right]J_{n+\frac{s}{2}-1}(\alpha r_0)N_{n+\frac{s}{2}-1}(\alpha r_0)J_{n+\frac{s}{2}-1}(\alpha r)+$$
$$+\frac{\pi r_0^2}{4}\left[\left(1-\frac{s}{2}\right)N_{n+\frac{s}{2}-1}(\alpha)+\alpha N'_{n+\frac{s}{2}-1}(\alpha)\right]J'_{n+\frac{s}{2}-1}(\alpha r_0)N'_{n+\frac{s}{2}-1}(\alpha r_0)J_{n+\frac{s}{2}-1}(\alpha r)+$$
$$+\frac{\pi r_0^2}{4}\left[\left(1-\frac{s}{2}\right)N_{n+\frac{s}{2}-1}(\alpha)+\alpha N'_{n+\frac{s}{2}-1}(\alpha)\right]J'^2_{n+\frac{s}{2}-1}(\alpha r_0)N_{n+\frac{s}{2}-1}(\alpha r)+$$
$$+\frac{\pi}{4}\left(r_0^2-\frac{\left(n+\frac{s}{2}-1\right)^2}{\alpha^2}\right)\left[\left(1-\frac{s}{2}\right)N_{n+\frac{s}{2}-1}(\alpha)+\alpha N'_{n+\frac{s}{2}-1}(\alpha)\right]J^2_{n+\frac{s}{2}-1}(\alpha r_0)N_{n+\frac{s}{2}-1}(\alpha r)-$$
$$-\frac{\pi}{4}\left(r_0^2-\frac{\left(n+\frac{s}{2}-1\right)^2}{\alpha^2}\right)\left[\left(1-\frac{s}{2}\right)J_{n+\frac{s}{2}-1}(\alpha)+\alpha J'_{n+\frac{s}{2}-1}(\alpha)\right]J_{n+\frac{s}{2}-1}(\alpha r_0)N_{n+\frac{s}{2}-1}(\alpha r_0)\times$$
$$\times N_{n+\frac{s}{2}-1}(\alpha r)-\frac{\pi r_0^2}{4}\left[\left(1-\frac{s}{2}\right)J_{n+\frac{s}{2}-1}(\alpha)+\alpha J'_{n+\frac{s}{2}-1}(\alpha)\right]J'_{n+\frac{s}{2}-1}(\alpha r_0)N'_{n+\frac{s}{2}-1}(\alpha r_0)N_{n+\frac{s}{2}-1}(\alpha r)+$$
$$+\frac{1}{\pi}\left(1-\frac{\left(n+\frac{s}{2}-1\right)^2}{\alpha^2}\right)\left[\left(1-\frac{s}{2}\right)J_{n+\frac{s}{2}-1}(\alpha)+\alpha J'_{n+\frac{s}{2}-1}(\alpha)\right]^{-1}J_{n+\frac{s}{2}-1}(\alpha r)+$$
$$+\frac{1}{\pi\alpha^2}\left(1-\frac{s}{2}\right)^2\left[\left(1-\frac{s}{2}\right)J_{n+\frac{s}{2}-1}(\alpha)+\alpha J'_{n+\frac{s}{2}-1}(\alpha)\right]^{-1}J_{n+\frac{s}{2}-1}(\alpha r)-$$
$$-\frac{\pi r_0^2}{4}\left[\left(1-\frac{s}{2}\right)J_{n+\frac{s}{2}-1}(\alpha)+\alpha J'_{n+\frac{s}{2}-1}(\alpha)\right]^{-1}\left[\left(1-\frac{s}{2}\right)N_{n+\frac{s}{2}-1}(\alpha)+\alpha N'_{n+\frac{s}{2}-1}(\alpha)\right]^2J'^2_{n+\frac{s}{2}-1}(\alpha r_0)\times$$
$$\times J_{n+\frac{s}{2}-1}(\alpha r)-\frac{\pi}{4}\left(r_0^2-\frac{\left(n+\frac{s}{2}-1\right)^2}{\alpha^2}\right)\left[\left(1-\frac{s}{2}\right)J_{n+\frac{s}{2}-1}(\alpha)+\alpha J'_{n+\frac{s}{2}-1}(\alpha)\right]^{-1}\times$$
$$\times\left[\left(1-\frac{s}{2}\right)N_{n+\frac{s}{2}-1}(\alpha)+\alpha N'_{n+\frac{s}{2}-1}(\alpha)\right]^2J^2_{n+\frac{s}{2}-1}(\alpha r_0)J_{n+\frac{s}{2}-1}(\alpha r)+$$

$$+D\left\{-\left[\left(1-\tfrac{s}{2}\right)N_{n+\frac{s}{2}-1}(\alpha)+\alpha N'_{n+\frac{s}{2}-1}(\alpha)\right]J_{n+\frac{s}{2}-1}(\alpha r)+\right.$$
$$\left.+\left[\left(1-\tfrac{s}{2}\right)J_{n+\frac{s}{2}-1}(\alpha)+\alpha J'_{n+\frac{s}{2}-1}(\alpha)\right]N_{n+\frac{s}{2}-1}(\alpha r)\right\}.$$

Список литературы

1. Логинов Б. В., Юлдашев Н. Н., Герасимов А. В., “Задача на собственные значения для оператора Лапласа в s-мерном шаре со смещениями в производных”, *Журнал СВМО*, **15**:4 (2013), 136–147.

2. Прудников А. П., Брычков Ю. А., Маричев О. И., *Интегралы и ряды. Специальные функции*, Наука, М., 1983, 780 с.

Eigenvalue problem for the Laplace operator in s-dimensional unit ball $\Omega \subset \mathbb{R}^{s+1}$ with displacements in derivatives II

© A. V. Gerasimov[4], B. V. Loginov[5], N. N. Yuldashev[6]

Abstract. In the class of continuous and continuously differentiable up to the second order functions the boundary eigenvalue problem for the Laplace operator in s-dimensional unit ball Ω with displacements in derivatives along the radii $0 < r_0 < 1$ and 1 of the concentric spheres is considered, i.e. $u \in C^{2+\alpha}(\Omega)$ and $\frac{\partial u(r_0,\theta)}{\partial r} = \frac{\partial u(1,\theta)}{\partial r}$. In the previous work of the authors [1] were found eigenvalues and for $s = 2$ eigen- and adjoint functions (Jordan chains) for the direct problem; and their length does not exceed three. In this work, calculated Jordan chains for the conjugate problem when $s = 2$, the direct and conjugate problems when $s > 2$, and it is proved that if $s > 2$ they are terminated at the second elements.

Key Words: Laplace operator, unit ball in $\mathbb{R}^{s+1}$, eigenvalues, eigen- and adjoint functions, Jordan chains, direct and conjugate problems for $s = 2$ and $s > 2$.

---

[4] Postgraduate student of Applied Mathematics, Differential Equations and Theoretical Mechanics Chair, Ogarev Mordovia State University, Saransk; gerasimov_artyom@mail.ru.

[5] Professor of Higher Mathematics Chair, Ulyanovsk State Technical University, Ulyanovsk; bvllbv@yandex.ru.

[6] Docent of Higher Mathematics Chair, Tashkent Institute of Textile and Light Industry, Tashkent; nurilla1956@mail.ru.