УДК 517.929

Модифицированный метод построения минимального многочлена систем линейных алгебраических уравнений

© И. В. Зубов [1], В. И. Зубов [2], О. А. Пустовалова [3]

Аннотация. В статье приводится модифицированный метод построения минимального многочлена с помощью решения систем линейных алгебраических уравнений. Предлагаемый подход, не изменяя основной идеи метода, дает возможность в высшей степени сократить число вычислений. Если ранее для построения коэффициентов минимального многочлена матрицы n - ого порядка при использовании метода необходимо было искать решение систем линейных алгебраических уравнений порядка $n^2 \times m$, $n < m$, то в модифицированном методе для этого достаточно искать решение систем линейных алгебраических уравнений порядка $n \times m$, $n < m$.

Ключевые слова: минимальный многочлен, алгебраическое уравнение, матрица, коэффициент, собственное число

Для вычисления коэффициентов минимального многочлена матрицы A известно всего несколько подходов, которые условно можно разделить на аналитические и вычислительные методы [1,3]. К первой группе можно отнести приведение матрицы к форме Жордана и к форме Смита. Во вторую группу входит метод Данилевского приведения матрицы к форме Фробениуса. Однако оба подхода первой группы фактически вычисляют собственные числа этой матрицы, что является отдельной и непростой задачей. Предпочтительнее использовать методы, не требующие вычисления спектра. Метод Данилевского дает коэффициенты характеристическогго многочлена, если он совпадает с минимальным, иначе матрица Фробениуса будет юлочной и один из блоков дает коэффициенты минимального полинома.

Для краткости напомним суть метода построения минимального многочлена путем решения системы линейных алгебраических уравнений изложенного в работе [2].

Пусть A - вещественная, постоянная матрица размера $n \times n$. Поставим задачу поиска минимального иногочлена этой матрицы, т. е. многочлена наименьшей степени анулирующего матрицу A с коэффициентом при старшей степени равным единице. Таким образом минимальный многочлен имеет вид:

$$f(\lambda) = \lambda^k + c_{k-1}\lambda^{k-1} + \ldots + c_1\lambda + c_0 = 0. \tag{1.1}$$

причем выполняется матричное тождество:

$$A^k + c_{k-1}A^{k-1} + \ldots + c_1 A + c_0 E = 0 \tag{1.2}$$

Заметим, что вещественные матрицы размера $n \times n$ образуют вещественное линейное пространство размерности n^2, где можно использовать все результаты, полученные в линейной алгебре [1].

Исходя из этого, можно сформулировать очевидное утверждение.

Т е о р е м а 1.1. *Степень минимального многочлена равна $k+1$, если матрицы*

$$A^k, A^{k-1}, \ldots, A, A^0; A^0 = E \tag{1.3}$$

[1] Профессор кафедры теории управления; СПбГУ, г. Санкт-Петербург; ddemidova@mail.ru
[2] Аспирант кафедры теории управления; СПбГУ, г. Санкт-Петербург; ddemidova@mail.ru
[3] Аспирант кафедры теории управления; СПбГУ, г. Санкт-Петербург; ddemidova@mail.ru

- линейно независимы, а матрицы

$$A^{k+1}, A^k, A^{k-1}, \dots, A, E \qquad (1.4)$$

уже линейно зависимы.

Доказательство. Действительно, если матрицы (1.4) линейно зависимы, то муществует вещественные числа $c_0, c_1, \dots, c_{k+1}$ не все равные нулю такие, что выполняется матричное тождество:

$$\sum_{i=0}^{k+1} c_i A^i = 0,]qquad A^0 = E. \qquad (1.5)$$

Из этого множества следует, что $c_{k+1} \neq 0$, ибо в противном случае это будет означать, что матрицы (1.3) - линейно зависимы. Отсюда вытекает, что справедливо матричное равенство:

$$A^{k+1} + \frac{c_k}{c_{k+1}} A^k + \ldots + \frac{c_1}{c_{k+1}} A + \frac{c_0}{c_{k+1}} E = 0. \qquad (1.6)$$

Таким образом, коэффициенты этого матричного тождества, являются коэффициентами минимального многочлена. Заметим, что в силу теоремы Кэли-Гамильтона матрицы (1.4) линейно зависимы при $k = n - 1$.
Доказательство закончено.

Введем понятие развернутой матрицы B_k для матричной совокупности (1.3). Эта матрица размера $n^2 \times (k+1)$ столбцы которой составлены из столбцов A_{im}, $i = \overline{1, n}$ матриц A^m, $m = \overline{k, 0}$ записанных один под другим подряд, начиная с первого столбца этой матрицы (A_{1m}), кончая последним (A_{nm}):

$$B_k = \begin{pmatrix} A_{1k} & A_{1k-1} & \dots & E_1 \\ A_{2k} & A_{2k-1} & \dots & E_2 \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ A_{nk} & A_{nk-1} & \dots & E_n \end{pmatrix} = (A_k, \dots, A_0), \quad A_m = \begin{pmatrix} A_{1m} \\ A_{2m} \\ \vdots \\ A_{nm} \end{pmatrix}, \qquad m = \overline{k, 0}. \qquad (1.7)$$

Очевидно, что линейная независимость матриц (1.3) эквивалентна линейной независимости столбцов матрицы B_k, т. к. справедливо соотношение

$$b_k C = 0 \Leftrightarrow \sum_{i=0}^{k} c_i A^i = 0, \qquad C = (c_k, c_{k-1}, \dots, c_0)^T. \qquad (1.8)$$

Это означает, что линейная независимость матриц (1.3) эквивалентна тому, что матрица B_k размера $n^2 \times (k+1)$, является матрицей полного ранга, т. е. ее ранг равен $k+1$.

Отсюда вытекает, что теорему 1 можно переформулировать следующим образом.

Теорема 1.2. *Пусть k наименьшее из чисел ($k \in \overline{0, n-1}$) при котором система линейных алгебраических уравнений*

$$B_k C = A_{k+1}, \qquad C = (c_k, c_{k-1}, \dots, c_0)^T, \qquad (1.9)$$

имеет решение, тогда минимальный многочлен матрицы A имеет вид:

$$f(\lambda) = \lambda^{k+1} - c_k \lambda^k - c_{k-1} \lambda^{k-1} - \ldots - c_1 \lambda - c_0 = 0. \qquad (1.10)$$

Справедливо и обратное утверждение о том, что коэффициенты минимального многочлена (1.10) $C = (c_k, c_{k-1}, \ldots, c_0)^T$, являются решениями системы линейных алгебраических уравнений (1.9).

Д о к а з а т е л ь с т в о. Разрешимость уравнения (1.9) означает разрешимость матричного тождества

$$A^{k+1} = c_k A^k + c_{k-1} A^{k-1} + \ldots + c_1 A + c_0 E. \tag{1.11}$$

Так как k является минимальным из чисел $\overline{0, n-1}$, то многочлен (1.10), является минимальным многочленом.

С другой стороны, если многочлен (1.10), является минимальным многочленом, то справедливо матричное тождество (1.11), которое эквивалентно разрешимости системы линейных алгебраических уравнений (1.9).
Д о к а з а т е л ь с т в о з а к о н ч е н о.

З а м е ч а н и е 1.1. *Итак, методика построения минимального многочлена заключается в поиске решения* $C = (c_k, c_{k-1}, \ldots, c_0)^T$ *системы линейных алгебраических уравнений* (1.9) *для наименьшего целого числа* $k, k = \overline{1, n}$. *При этом величины* $-c_k$, $-c_{k-1}$, ..., $-c_0$ *будут коэффициентами минимального многочлена* (1.10). *Заметим, что в силу теоремы Кели - Гамильтона матричное уравнение* (1.11) *всегда имеет решение.*

З а м е ч а н и е 1.2. *Если решение уравнения* (1.9) *при наименьшем из чисел* $k = \overline{0, n}$ *удовлетворяет условию* $c_0 = 0$, *то матрица* A *- вырожденная. Более того, если в этом решении* p *первых компонент нулевые* $c_0 = c_1 = \ldots = c_{p-1} = 0$, *то кратность нулевого собственного числа матрицы* A *не меньше чем* p.

З а м е ч а н и е 1.3. *Если матрицы* (1.3) *линейно независимы, а матрицы* (1.4) *линейно зависимы, то матрица* $B_k^T B_k$ *является положительно определенной, а матрица* $B_{k+1}^T B_{k+1}$ *неотрицательной и имеет одно собственное число равное нулю. Как известно [1], для прямоугольной матрицы* A *размера* $n \times m$ *ранг* r *сингулярной матрицы* $A^T A$ *совпадает с рангом матрицы* A, *а ее сингулярные числа* ρ_i *неотрицательные. Причем, если, например,* $m \leq n$, *то число нулевых* ρ_i *равно* $m - r$. *Таким образом, чтобы найти коэффициенты минимального многочлена не обязательно искать решения системы* (1.9) *при* $k = 0, 1, 2, \ldots$, *а достаточно проверить при каком числе* k *матрица* $B_{k+1}^T B_{k+1}$ *становится неотрицательной (при меньших величинах* k *эта матрица является положительно определенной). Это сильно сократит число вычислений и для получения коэффициентов минимального многочлена необходимо найти решение только одной системы алгебраических уравнений* (1.9) *именно для этого числа* k.

По аналогии с идеями, изложенными выше можно сформулировать следующее очевидное утверждение.

Т е о р е м а 1.3. *Пусть* k *наименьшее из чисел* ($k \in \overline{0, n-1}$) *при котором системы линейных алгебраических уравнений*

$$\sum_{j=0}^{k} A_{ij} c_j = A_{ik+1}, \qquad i = \overline{1, n} \tag{1.12}$$

имеют одно и то же решение $C = (c_k, c_{k-1}, \ldots, c_0)^T$, *тогда минимальный многочлен матрицы* A *имеет вид* (1.10).

Д о к а з а т е л ь с т в о. То, что системы уравнений (1.12) имеют одно и то же решение означает, что k наименьшее из чисел ($k \in \overline{0, n-1}$) при котором система линейных алгебраических уравнений (1.9) имеет решение. Это означает, что выполняются все условия теоремы 2.
Д о к а з а т е л ь с т в о з а к о н ч е н о.

З а м е ч а н и е 1.4. *Хотя доказанное утверждение достаточно очевидно, но из него можно сделать важный вывод, который позволяет построить оптимальный алгоритм построения коэффициентов минимального многочлена. Действительно на первом этапе достаточно найти решение всего лишь одной из систем линейных алгебраических уравнений* (1.12) *для первого из чисел* $k = \overline{0, n}$ *и проверить является ли это решение решением для всех остальных систем линейных алгебраических уравнений* (1.12) *при данной величине* k *. Если это так, то коэффициенты минимального многочлена найдены. В противном случае необходимо выбрать ту систему линейных алгебраических уравнений* (1.12) *к которой это решение не подходит и продолжать искать решение этой системы при* $k = k + 1$ *. Нетрудно видеть, что, в конце концов, мы найдем коэффициенты минимального многочлена или коэффициенты характеристического многочлена в случае его совпадения с минимальным.*

Работа выполнена при поддержке РФФИ грант № 10-08-000624.

Список литературы

1. В.В. Воеводин Ю.А. Кузнецов, *Матрицы и вычисления*, Наука, М, 1984.

2. В.В. Дикусар Г.А. Зеленков Н.В. Зубов, “Построение минимального многочлена с помощью решения системы линейных алгебраических уравнений систем”, **29(1)** (2007), 109-115.

3. Г.А. Зеленков, *Аналитические и численные методы построения характеристического многочлена*, Монография, МГА им. адм. Ф.Ф. Ушакова, Новороссийск, 2007.

The modify method of building minimum multitude of systems linear algebraic equations

© I. V. Zubov [4], V. I. Zubov [5], O. A. Pustovalova [6]

Abstract. The article provides modified method of constructing the minimal polynomial using solving systems of linear algebraic equations. proposed approach , without changing the basic idea of the method enables the highest power to reduce the number of calculations. If earlier to build coefficients of the minimal polynomial of the matrix n - th order with using the method it was necessary to seek the solution of linear systems algebraic equations of order $n^2 \times m$, $n < m$, then modified method it is enough to look for the solution of systems of linear algebraic equations of order $n \times m$, $n < m$

Key Words: minimum polynomial, algerbraical equation, matrix, coefficient, own number

[4] Professor chair theory of control; SPbGU, t. Saint-Petersburg; ddemidova@mail.ru
[5] Post-graduate chair theory of control; SPbGU, t. Saint-Petersburg; ddemidova@mail.ru
[6] Post-graduate chair theory of control; SPbGU, t. Saint-Petersburg; ddemidova@mail.ru