УДК 517.988.67

Комментарии к задаче о ветвлении периодических решений при бифуркации Андронова-Хопфа в дифференциальных уравнениях с вырожденным оператором при производной

© **А. А. Кяшкин [1], Б. В. Логинов [2], П. А. Шаманаев [3]**

Аннотация. Методами теории ветвления решений нелинейных уравнений исследована задача о возмущении n-кратной пары чисто мнимых собственных значений при бифуркации Пуанкаре-Андронова-Хопфа при наличии обобщенных жордановых цепочек.

Ключевые слова: бифуркация Андронова-Хопфа, возмущение критической пары собственных значений.

1. Введение

В банаховых пространствах E_1, E_2 в обозначениях и терминологии [1, 2] задача о ветвлении периодических решений при бифуркации Андронова-Хопфа с необратимым оператором при производной описывается дифференциальным уравнением

$$A\frac{dx}{dt} = B(\lambda)x - R(x,\lambda), \quad R(0,\lambda)\equiv 0, \quad B(\lambda) = B_0 + \varepsilon B_1 + \varepsilon^2 B_2 + \ldots, \quad \varepsilon = \lambda - \lambda_0, \qquad (1.1)$$

где A и $B_0 = B(\lambda_0)$ - плотно заданные линейные фредгольмовы операторы, $N(A) = span\{\phi_j\}_1^m$, $N^*(A) = span\{\psi_j\}_1^m$; $N(B_0) = span\{\hat{\phi}_k\}_1^n$, $N^*(B_0) = span\{\hat{\psi}_k\}_1^n$ - их подпространства нулей и дефектных функционалов, $\{\sigma_l\}_1^m$, $\langle\phi_j,\sigma_l\rangle = \delta_{jl}$, $\{\zeta_l\}_1^m$, $\langle\zeta_l,\psi_j\rangle = \delta_{lj}$; $\{\hat{\sigma}_s\}_1^n$, $\langle\hat{\phi}_k,\hat{\sigma}_s\rangle = \delta_{ks}$, $\{\hat{\zeta}_s\}_1^n$, $\langle\hat{\zeta}_s,\hat{\psi}_k\rangle = \delta_{sk}$ - соответствующие биортогональные системы, $\|R(x,\lambda_0+\varepsilon)\| = o(\|x\|)$. Предполагается, что операторы A и B_0 не имеют общих нуль-элементов, а также условия: 1° $D_B \subset D_A$ и A подчинен B_0, т.е. $\|Ax\| \leqslant \|B_0x\| + \|x\|$ на D_{B_0} или $D_A \subset D_{B_0}$ и B_0 подчинен A, т.е. $\|B_0x\| \leqslant \|Ax\| + \|x\|$ на D_A, что позволяет свести обсуждение к ограниченным операторам.

Определение 1.1. *Число λ_0 называется точкой бифуркации (усиленной бифуркации) Андронова-Хопфа уравнения* (1.1), *если существует окрестность $O_\varepsilon(\lambda_0)$, такая, что для некоторой последовательности $\lambda_k \subset O_\varepsilon(\lambda_0)$, $\lambda_k \to \lambda_0$ (любого $\lambda \in O_\varepsilon(\lambda_0)$) уравнение* (1.1) *имеет $\frac{2\pi}{\alpha+\mu_k}$-периодическое ($\frac{2\pi}{\alpha+\mu(\varepsilon)}$-периодическое) малое по норме E_1 решение $x = x_k(t)$ ($x = x_\lambda(t)$), причем $M_k = \max\limits_t\|x_k(t)\| \to 0$ при $k\to\infty$ ($M_\lambda = \max\limits_t\|x_\lambda(t)\| \to 0$ при $\lambda\to\lambda_0$).*

Здесь исследуется ветвление чисто мнимых A-собственных значений оператора B_0 и отвечающих им периодических собственных элементов (периодических решений) линеаризованных задач I и II соответственно при возмущении $B(\varepsilon)$ оператора B_0

$$(\mathrm{I}): \quad A\frac{dx}{dt} = (B_0 + B(\varepsilon))x \qquad \text{и} \qquad (\mathrm{II}): \quad A\frac{dx}{dt} = (B_0 + B(\varepsilon))x - h(t)$$

[1] Аспирант кафедры прикладной математики, дифференциальных уравнений и теоретической механики, Мордовский государственный университет им. Н. П. Огарёва, г. Саранск; andrej_kjashkin@list.ru.

[2] Профессор кафедры "Высшая математика" , Ульяновский государственный технический университет, г. Ульяновск; loginov@ulstu.ru

[3] Доцент кафедры прикладной математики, дифференциальных уравнений и теоретической механики, Мордовский государственный университет им. Н. П. Огарёва, г. Саранск; korspa@yandex.ru.

в следующих предположениях [1],[3-5] :

1°. Число α является $\mathcal{A}$-собственным значением матричного оператора $\mathscr{B}(\alpha)$, т. е. $\mathscr{B}(\alpha)U_k = \begin{pmatrix} B_0 & \alpha A \\ -\alpha A & B_0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} u_{1k} \\ u_{2k} \end{pmatrix} = 0$, $\mathscr{B}^*(\alpha)V_k = \begin{pmatrix} B_0^* & -\alpha A_0^* \\ \alpha A_0^* & B_0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} v_{1k} \\ v_{2k} \end{pmatrix} = 0$, $k = \overline{1,n}$, с $2n$-мерным подпространством нуль-элементов

$$\mathcal{N}(\mathscr{B}(\alpha)) = span\left\{\Phi_{1k}^{(1)} = \begin{pmatrix} u_{1k} \\ u_{2k} \end{pmatrix},\ \Phi_{2k}^{(1)} = \begin{pmatrix} u_{2k} \\ -u_{1k} \end{pmatrix},\ k = \overline{1,n}\right\}, \tag{1.2}$$

$$\mathcal{N}(\mathscr{B}^*(\alpha)) = span\left\{\Psi_{1k}^{(1)} = \begin{pmatrix} -v_{2k} \\ v_{1k} \end{pmatrix},\ \Psi_{2k}^{(1)} = \begin{pmatrix} v_{1k} \\ v_{2k} \end{pmatrix},\ k = \overline{1,n}\right\}. \tag{1.3}$$

При этом числа $\pm k\alpha$, $k = 0, 1, 2, \ldots$ не являются $\mathcal{A}$-собственными значениями матричного оператора $\mathscr{B}(\alpha) \not\equiv 0$.

2°. $\mathcal{A}$-жордановы цепочки элементов $\Phi_{ik}^{(1)}$, $\Psi_{ik}^{(1)}$, $i=1,2$, $k=\overline{1,n}$, оператор-функций $\mathscr{B}(\alpha+\mu) \equiv \mathscr{B}(\alpha) - \mu\mathcal{A} = \begin{pmatrix} B_0 & \alpha A \\ -\alpha A & B_0 \end{pmatrix} - \mu\begin{pmatrix} 0 & -A \\ A & 0 \end{pmatrix}$ и $\mathscr{B}^*(\alpha+\mu) \equiv \mathscr{B}^*(\alpha) - \mu\mathcal{A}^* = \begin{pmatrix} B_0^* & -\alpha A^* \\ \alpha A^* & B_0^* \end{pmatrix} - \mu\begin{pmatrix} 0 & A^* \\ -A^* & 0 \end{pmatrix}$, определенные равенствами $\mathscr{B}(\alpha)\Phi_{jk}^{(s)} = \mathcal{A}\Phi_{jk}^{(s-1)}$, $\mathscr{B}^*(\alpha)\Psi_{jk}^{(s)} = \mathcal{A}^*\Psi_{jk}^{(s-1)}$, имеют конечные длины p_k, т. е. образуют полный канонический обобщенный жорданов ($\mathcal{A}$-жорданов) набор (ОЖН) [1]. Без ограничения общности в силу разрешимости определяющих уравнений это означает, что

$$\begin{gathered} \langle \mathcal{A}\Phi_{ik}^{(s)}, \Psi_{jl}^{(1)} \rangle = \delta_{ij}\delta_{kl}\delta_{sp_k}, \quad \langle \Phi_{ik}^{(1)}, \mathcal{A}^*\Psi_{jl}^{(s)} \rangle = \delta_{ij}\delta_{kl}\delta_{sp_l}, \\ s = \overline{1, p_k(p_l)}, \qquad i,j = 1,2, \qquad k,l = \overline{1,n}, \end{gathered} \tag{1.4}$$

или, эквивалентно, в координатной форме

$$\begin{gathered} \langle Au_{1k}^{(s)}, v_{2l}^{(1)} \rangle = \langle Au_{2k}^{(s)}, v_{1l}^{(1)} \rangle, \quad s = \overline{1,p_k}, \quad \langle Au_{1k}^{(s)}, v_{1l}^{(1)} \rangle + \langle Au_{2k}^{(s)}, v_{2l}^{(1)} \rangle = \delta_{kl}\delta_{sp_k}, \\ \langle u_{1k}^{(1)}, A^*v_{2l}^{(s)} \rangle = \langle u_{2k}^{(1)}, A^*v_{1l}^{(s)} \rangle, \quad s = \overline{1,p_l}, \quad \langle u_{1k}^{(1)}, A^*v_{1l}^{(s)} \rangle + \langle u_{2k}^{(1)}, A^*v_{2l}^{(s)} \rangle = \delta_{kl}\delta_{sp_l}, \\ k,l = \overline{1,n}. \end{gathered} \tag{1.5}$$

Согласно [3-10], [12-14] в силу леммы о биортогональности обобщенных жордановых цепочек (ОЖЦ) и линейности оператор-функций $\mathscr{B}(\alpha) - \mu\mathcal{A}$ и $\mathscr{B}^*(\alpha) - \mu\mathcal{A}^*$ этот набор всегда может быть выбран триканоническим, то есть

$$\begin{gathered} \langle \Phi_{ik}^{(s)}, \Gamma_{jl}^{(\sigma)} \rangle = \delta_{ij}\delta_{kl}\delta_{s\sigma}, \quad \Gamma_{jl}^{(\sigma)} = \mathcal{A}^*\Psi_{jl}^{(p_l+1-\sigma)}; \quad \langle Z_{ik}^{(s)}, \Psi_{jl}^{(\sigma)} \rangle = \delta_{ij}\delta_{kl}\delta_{s\sigma}, \\ Z_{ik}^{(s)} = \mathcal{A}\Phi_{ik}^{(p_k+1-s)}, \quad j = 1,2, \quad s(\sigma) = \overline{1, p_k(p_l)}, \quad k,l = \overline{1,n}. \end{gathered} \tag{1.6}$$

или в координатной форме

$$\begin{gathered} \langle u_{1k}^{(s)}, A^*v_{1l}^{(p_l+1-\sigma)} \rangle + \langle u_{2k}^{(s)}, A^*v_{2l}^{(p_l+1-\sigma)} \rangle = \delta_{kl}\delta_{s\sigma} \sim \langle Au_{1k}^{(p_k+1-s)}, v_{1l}^{(\sigma)} \rangle + \langle Au_{2k}^{(p_k+1-s)}, v_{2l}^{(\sigma)} \rangle = \delta_{kl}\delta_{s\sigma}; \\ \langle u_{1k}^{(s)}, A^*v_{2l}^{(p_l+1-\sigma)} \rangle = \langle u_{2k}^{(s)}, A^*v_{1l}^{(p_l+1-\sigma)} \rangle \ \sim\ \langle Au_{1k}^{(p_k+1-s)}, v_{2l}^{(\sigma)} \rangle = \langle Au_{2k}^{(p_k+1-s)}, v_{1l}^{(\sigma)} \rangle. \end{gathered} \tag{1.7}$$

Следуя [11], в этой работе далее исследуются уравнения (I) и (II) на основе кратко представленного аппарата обобщенных жордановых цепочек.

З а м е ч а н и е 1.1. *Применение норм подчиненности операторов A и B_0 позволяет доказать, что предположение 1 является необходимым условием существования бифуркации Андронова-Хопфа для уравнения* (1.1).

2. Ветвление пары чисто мнимых A-собственных значений оператора B_0

Выполним комплексификацию уравнения (I), рассматривая его в пространствах $\mathcal{E}_k = E_k \dotplus iE_k$, $k = 1,2$, учитывая, что оператор $B(\varepsilon)$ в силу его линейности также допускает достаточно гладкое расширение на эти пространства. Тогда элементы $u_k = u_{1k} + i\,u_{2k}$, $\bar{u}_k$ и $v_k = v_{1k} + i\,v_{2k}$, $\bar{v}_k$ являются A-собственными элементами оператора B_0, т. е. собственными элементами следующих задач на собственные значения

$$B_0 u_k = i\alpha A u_k,\ \ B_0\bar{u}_k = -i\alpha A\bar{u}_k,\ \ B_0^* v_k = -i\alpha A^* v_k,\ \ B_0^*\bar{v}_k = i\alpha A^*\bar{v}_k,\ \ k = \overline{1,n}. \tag{2.1}$$

Им отвечают A- и A^*-жордановы наборы (A- и A^*-ЖН $\equiv$ ОЖН), $\{u_k^{(j)}\}$, $\{\bar{u}_k^{(j)}\}$ и $\{v_k^{(j)}\}$, $\{\bar{v}_k^{(j)}\}$, в которых обобщенные жордановы цепочки определяются уравнениями $(B_0 - i\alpha A)u_k^{(j)} = Au_k^{(j-1)}$, $(B_0 + i\alpha A)\bar{u}_k^{(j)} = -A\bar{u}_k^{(j-1)}$; $(B_0^* + i\alpha A^*)v_k^{(j)} = -A^* v_k^{(j-1)}$, $(B_0^* - i\alpha A^*)\bar{v}_k^{(j)} = A^*\bar{v}_k^{(j-1)}$, $j = \overline{2,p_k}$, $k = \overline{1,n}$ и соответственно (1.6) и (1.7) могут быть выбраны удовлетворяющими условиям биортогональности

$$\langle u_k^{(j)}, \vartheta_s^{(l)}\rangle = \delta_{jl}\delta_{ks},\ \ \langle \mathrm{z}_k^{(j)}, v_s^{(l)}\rangle = \delta_{ks}\delta_{jl},\ \ \mathrm{z}_j^{(k)} = Au_k^{(p_k+1-j)},\ \ \vartheta_s^{(l)} = A^* v_s^{(p_s+1-l)}. \tag{2.2}$$

Выполнением подстановки А. Пуанкаре $t = \frac{\tau}{\alpha+\mu}$, $x(t) = y(\tau)$, где $\mu = \mu(\varepsilon)$ - подлежащая определению малая добавка к частоте колебаний, задача I сводится к определению 2π-периодических решений уравнения

$$\mathcal{B}_0 y = \mu\mathscr{C} y + B(\varepsilon)y,\ \ \mathcal{B}_0 y = (\mathcal{B}_0 y)(\tau) \equiv B_0 y(\tau) - \alpha A\frac{dy}{d\tau},\ \ \mathscr{C} y = (\mathscr{C} y)(\tau) \equiv A\frac{dy}{d\tau}. \tag{2.3}$$

Здесь предполагаемый фредгольмовым оператор $(\mathcal{B}_0 y)(\tau)$ и остальные операторы отображают пространство $\mathcal{Y}$ 2π-периодических непрерывно-дифференцируемых функций τ со значениями в $\mathcal{E}_1 = E_1 \dotplus i\,E_1$ в пространство $\mathcal{Z}$ 2π-периодических функций τ со значениями в $\mathcal{E}_2 = E_2 \dotplus i\,E_2$. Дуальность между $\mathcal{Y}$ и $\mathcal{Y}^*$ ($\mathcal{Z}$ и $\mathcal{Z}^*$) определяется специального вида функционалами

$$\langle\langle y, f\rangle\rangle = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\langle y(\tau), f(\tau)\rangle d\tau, \quad y \in \mathcal{Y},\ \ f \in \mathcal{Y}^*\ \ (y \in \mathcal{Z},\ f \in \mathcal{Z}^*).$$

Подпространства $\mathcal{N}(\mathcal{B}_0)$, $\mathcal{N}(\mathcal{B}_0^*)$ нулей операторов $\mathcal{B}_0$ и $\mathcal{B}_0^*$ $2n$-мерны

$$\mathcal{N}(\mathcal{B}_0) = span\{\varphi_k^{(1)} = \varphi_k^{(1)}(\tau) = u_k e^{i\tau}, \bar{\varphi}_k^{(1)}\}_{k=1}^n,\ \ \mathcal{N}(\mathcal{B}_0^*) = span\{\psi_k^{(1)} = \psi_k^{(1)}(\tau) = v_k e^{i\tau}, \bar{\psi}_k^{(1)}\}_{k=1}^n,$$

биортогональные им элементы выбираются как A^*- и A-образы последних элементов ОЖЦ $A^*\psi_k^{(p_k)} = A^* v_k^{(p_k)} e^{i\tau} = \gamma_k^{(1)}$ и $A^*\varphi_j^{(p_j)} = A^* u_j^{(p_j)} e^{i\tau} = z_k^{(1)}$. Отвечающие базисным элементам подпространств $\mathcal{N}(\mathcal{B}_0)$ и $\mathcal{N}(\mathcal{B}_0^*)$ ОЖЦ имеют вид $\varphi_k^{(j)} = u_k^{(j)} e^{i\tau}$, $\psi_k^{(j)} = v_k^{(j)} e^{i\tau}$ с соответствующими условиями биортогональности

$$\begin{gathered}\langle\langle \varphi_k^{(j)}, \gamma_s^{(l)}\rangle\rangle = \delta_{ks}\delta_{jl}, \quad \langle\langle z_k^{(j)}, \psi_s^{(l)}\rangle\rangle = \delta_{ks}\delta_{jl},\\ \gamma_s^{(l)} = \theta_s^{(l)} e^{i\tau} = A^* v_s^{(p_s+1-l)} e^{i\tau}, \quad z_k^{(j)} = \mathrm{z}_k^{(j)} e^{i\tau} = A\varphi_k^{(p_k+1-j)} e^{i\tau}.\end{gathered} \tag{2.4}$$

Л е м м а 2.1. [6,8-10] *Соотношения биортогональности (2.4) определяют проекторы*

$$\mathbf{P}=\sum_{k=1}^{n}\sum_{j=1}^{p_k}\langle\langle\cdot,\gamma_k^{(j)}\rangle\rangle\varphi_k^{(j)}=\langle\langle\cdot,\gamma\rangle\rangle\phi,\ \bar{\mathbf{P}}=\langle\langle\cdot,\bar\gamma\rangle\rangle\bar\psi,$$
$$\mathbb{P}=\mathbf{P}+\bar{\mathbf{P}}:\mathcal{E}_1\to\mathcal{E}_1^{2K}=K(\mathcal{B},A)=span\{\varphi,\bar\varphi\},$$
$$\mathbf{Q}=\sum_{k=1}^{n}\sum_{j=1}^{p_k}\langle\langle\cdot,\psi_k^{(j)}\rangle\rangle z_k^{(j)}=\langle\langle\cdot,\psi\rangle\rangle z,\quad \bar{\mathbf{Q}}=\langle\langle\cdot,\bar\psi\rangle\rangle\bar z,$$
$$\mathbb{Q}=\mathbf{Q}+\bar{\mathbf{Q}}:\mathcal{E}_2\to\mathcal{E}_{2,2K}=span\{z_k^{(j)},\bar z_k^{(j)}\},$$

где $\varphi=(\varphi_1^{(1)},\dots,\varphi_1^{(p_1)},\dots\varphi_n^{(1)},\dots,\varphi_n^{(p_n)})$, *векторы* γ, ψ *и* z *определяются аналогично, порождающие разложения пространств* $\mathcal{E}_1$ *и* $\mathcal{E}_2$ *в прямые суммы* $\mathcal{E}_1=\mathcal{E}_1^{2K}\dot{+}\mathcal{E}_1^{\infty-2K}$, $\mathcal{E}_2=\mathcal{E}_{2,2K}\dot{+}\mathcal{E}_{2,\infty-2K}$, $K=\sum\limits_{s=1}^{n}p_s$ *- корневое число.*

При этом справедливы соотношения сплетения

$$\mathcal{B}_0\mathbf{P}=\mathbf{Q}\mathcal{B}_0,\ \ \mathcal{B}_0\bar{\mathbf{P}}=\bar{\mathbf{Q}}\mathcal{B}_0\ \ \text{на}\ D(\mathcal{B}),\ \ A\mathbf{P}=\mathbf{Q}A,\ \ A\bar{\mathbf{P}}=\bar{\mathbf{Q}}A\ \ \text{на}\ D(A),$$
$$\mathcal{B}_0\varphi=\mathcal{A}_{\mathcal{B}}z,\ \ \mathcal{B}_0\bar\varphi=\mathcal{A}_{\mathcal{B}}\bar z,\ \ A\varphi=\mathcal{A}_Az,\ \ A^*\psi=\mathcal{A}_A\gamma,\ \ A\bar\varphi=\mathcal{A}_A\bar z,\ \ A^*\bar\psi=\mathcal{A}_A\bar\gamma,$$

где $\mathcal{A}_{\mathcal{B}}$ *и* $\mathcal{A}_A$ *- клеточно-диагональные матрицы* $\mathcal{A}_{\mathcal{B}}=(B_1,\dots,B_n)$ *и* $\mathcal{A}_A=(A_1,\dots,A_n)$ *с* $p_k\times p_k$ *-клетками* $B_k=\begin{pmatrix}0&0&\dots&0\\0&0&\dots&1\\\vdots&\vdots&\ddots&\vdots\\0&1&\dots&0\end{pmatrix}$, $A_k=\begin{pmatrix}0&0&\dots&0&1\\0&0&\dots&1&0\\\vdots&\vdots&\ddots&\vdots&\vdots\\1&0&\dots&0&0\end{pmatrix}$.

Операторы A *и* $\mathcal{B}_0$, *действуют в инвариантных парах подпространств* $\mathcal{E}_1^{2K},\mathcal{E}_{2,2K}$ *и* $\mathcal{E}_1^{\infty-2K},\mathcal{E}_{2,\infty-2K}$; $\mathcal{B}_0:D_{\mathcal{B}_0}\cap\mathcal{E}_1^{\infty-2K}\to\mathcal{E}_{2,\infty-2K}$, $A:\mathcal{E}_1^{2K}\to\mathcal{E}_{2,2K}$ *являются изоморфизмами.*

Вводя регуляризатор Шмидта $\widetilde{\mathcal{B}}_0=\mathcal{B}_0+\sum\limits_{k=1}^{n}\langle\langle\cdot,\gamma_k^{(1)}\rangle\rangle z_k^{(1)}+\sum\limits_{k=1}^{n}\langle\langle\cdot,\bar\gamma_k^{(1)}\rangle\rangle\bar z_k^{(1)}$, запишем уравнение (2.3) в виде системы

$$\widetilde{\mathcal{B}}_0y=\mu\mathscr{C}y+B(\varepsilon)y+\sum_{k=1}^{n}(\xi_{k1}z_k^{(1)}+\bar\xi_{k1}\bar z_k^{(1)}),\ \ \xi_{s\sigma}=\langle\langle y,\gamma_s^{(\sigma)}\rangle\rangle,\ \ \bar\xi_{s\sigma}=\langle\langle y,\bar\gamma_s^{(\sigma)}\rangle\rangle,\sigma=\overline{1,p_s},s=\overline{1,n}. \tag{2.5}$$

Полагая $y=w+v$, $v=\xi\cdot\varphi+\bar\xi\cdot\bar\varphi\in E_1^{2k}$, находим

$$\widetilde{\mathcal{B}}_0w+\sum_{k=1}^{n}\sum_{j=2}^{p_k}(\xi_{kj}\widetilde{\mathcal{B}}_0\varphi_k^{(j)}+\bar\xi_{kj}\widetilde{\mathcal{B}}_0\bar\varphi_k^{(j)})-\mu\mathscr{C}w-B(\varepsilon)w=$$
$$=\mu\sum_{k=1}^{n}\sum_{j=1}^{p_k}(\xi_{kj}\mathscr{C}\varphi_k^{(j)}+\bar\xi_{kj}\mathscr{C}\bar\varphi_k^{(j)})+\sum_{k=1}^{n}\sum_{j=1}^{p_k}[\xi_{kj}B(\varepsilon)\varphi_k^{(j)}+\bar\xi_{kj}B(\varepsilon)\bar\varphi_k^{(j)}].$$

Обращая оператор $\widetilde{\mathcal{B}}_0$, $\widetilde{\mathcal{B}}_0^{-1}=\Gamma_0$ [1], получим

$$w-\mu\Gamma_0\mathscr{C}w-\Gamma_0B(\varepsilon)w=-\sum_{k=1}^{n}\sum_{j=2}^{p_k}(\xi_{kj}\varphi_k^{(j)}+\bar\xi_{kj}\bar\varphi_k^{(j)})+\mu\Gamma_0\mathscr{C}\sum_{k=1}^{n}\sum_{j=1}^{p_k}(\xi_{kj}\varphi_k^{(j)}+\bar\xi_{kj}\bar\varphi_k^{(j)})+$$
$$+\Gamma_0B(\varepsilon)\sum_{k=1}^{n}\sum_{j=1}^{p_k}(\xi_{kj}\varphi_k^{(j)}+\bar\xi_{kj}\bar\varphi_k^{(j)}).$$

Отсюда следует

$$w=\Big[I-\mu\Gamma_0\mathscr{C}-\Gamma_0B(\varepsilon)\Big]^{-1}\Big\{-\sum_{k=1}^{n}\sum_{j=2}^{p_k}(\xi_{kj}\varphi_k^{(j)}+\bar\xi_{kj}\varphi_k^{(j)})+\mu\Gamma_0\mathscr{C}\sum_{k=1}^{n}\sum_{j=1}^{p_k}(\xi_{kj}\varphi_k^{(j)}+\bar\xi_{kj}\bar\varphi_k^{(j)})+$$
$$+\Gamma_0B(\varepsilon)\sum_{k=1}^{n}\sum_{j=1}^{p_k}(\xi_{kj}\varphi_k^{(j)}+\bar\xi_{kj}\bar\varphi_k^{(j)})\Big\}.$$

Далее $[I - \mu\Gamma_0\mathscr{C} - \Gamma_0 B(\varepsilon)]^{-1} = [I - (I - \mu\Gamma_0\mathscr{C})^{-1}\Gamma_0 B(\varepsilon)]^{-1}(I - \mu\Gamma_0\mathscr{C})^{-1} = (I - \mu\Gamma_0\mathscr{C})^{-1}[I - \Gamma_0 B(\varepsilon)(I - \mu\Gamma_0\mathscr{C})^{-1}]^{-1}$ и

$$(I - \mu\Gamma_0\mathscr{C})^{-1}\left\{ -\sum_{k=1}^{n}\sum_{j=2}^{p_k}(\xi_{kj}\varphi_k^{(j)} + \bar{\xi}_{kj}\bar{\varphi}_k^{(j)}) + \mu\Gamma_0\mathscr{C}\sum_{k=1}^{n}\sum_{j=1}^{p_k}(\xi_{kj}\varphi_k^{(j)} + \bar{\xi}_{kj}\bar{\varphi}_k^{(j)}) \right\} =$$

$$= \sum_{k=1}^{n}\sum_{j=2}^{p_k}(\xi_{kj}\varphi_k^{(j)} + \bar{\xi}_{kj}\bar{\varphi}_k^{(j)}) + \mu\Gamma_0\mathscr{C}(I - \mu\Gamma_0\mathscr{C})^{-1}\sum_{k=1}^{n}(\xi_{k1}\varphi_k^{(1)} + \bar{\xi}_{k1}\bar{\varphi}_k^{(1)}).$$

Следовательно,

$$\begin{aligned} w = &-\sum_{k=1}^{n}\sum_{j=2}^{p_k}(\xi_{kj}\varphi_k^{(j)} + \bar{\xi}_{kj}\bar{\varphi}_k^{(j)}) + \mu\Gamma_0\mathscr{C}(I - \mu\Gamma_0\mathscr{C})^{-1}\sum_{k=1}^{n}(\xi_{k1}\varphi_k^{(1)} + \bar{\xi}_{k1}\bar{\varphi}_k^{(1)}) + \\ &+(I - \mu\Gamma_0\mathscr{C})^{-1}\Gamma_0 B(\varepsilon)[I - (I - \mu\Gamma_0\mathscr{C})^{-1}\Gamma_0 B(\varepsilon)]^{-1}\sum_{k=1}^{n}\sum_{j=1}^{p_k}(\xi_{kj}\varphi_k^{(j)} + \bar{\xi}_{kj}\bar{\varphi}_k^{(j)}). \end{aligned} \tag{2.6}$$

Теперь подстановка $y = w + \xi\cdot\varphi + \bar{\xi}\cdot\bar{\varphi}$ с определенным по формуле (2.6) w во вторые равенства системы (2.5) в силу соотношений (2.4) при условии принадлежности присоединенных (корневых) элементов прямому дополнению $\mathcal{E}_{1,\infty-2K}$ к подпространству собственных элементов $\mathcal{E}_1^{2n}$ и учете формул (2.7)

$$\begin{gathered} \Gamma_0\mathscr{C}\varphi_k^{(1)} = i\Gamma_0\widetilde{\mathcal{B}}_0\varphi_k^{(2)} = i\varphi_k^{(2)},\ \ (\Gamma_0\mathscr{C})^2\varphi_k^{(1)} = (\Gamma_0\mathscr{C})\varphi_k^{(2)} = i^2\varphi_k^{(3)},\ \ \ldots \\ (\Gamma_0\mathscr{C})^s\varphi_k^{(1)} = i^s\varphi_k^{(s+1)} \text{ при } s < p_k,\ \ (\Gamma_0\mathscr{C})^{p_k}\varphi_k^{(1)} = i^{p_k}\varphi_k^{(p_k+1)} = i^{p_k}\varphi_k^{(1)}, \\ (\Gamma_0\mathscr{C})^s\varphi_k^{(1)} = i^s\varphi_k^{(s-\left[\frac{s}{p_k}\right]p_k)} \text{ при } s > p_k, \qquad \psi_k^{(1)} = \Gamma_0^*\gamma_k^{(1)},\ \ \psi_k^{(s)} = \Gamma_0^*\gamma_k^{(p_k+1-s)}, \end{gathered} \tag{2.7}$$

дает уравнение разветвления в корневом подпространстве (в конструкции Э. Шмидта) для определения $\mu = \mu(\varepsilon)$ в виде определителя $det[t(\mu,\varepsilon)]$ однородной системы линейных алгебраических уравнений и комплексно сопряженной к ней.

$$\begin{gathered} t_{k1}(\mu,\varepsilon) \equiv -\tfrac{(i\mu)^{p_k}}{1-(i\mu)^{p_k}}\xi_{k1} - \\ -\langle\langle(I - \mu\Gamma_0\mathscr{C})^{-1}\Gamma_0 B(\varepsilon)\left[I - (I - \mu\Gamma_0\mathscr{C})^{-1}\Gamma_0 B(\varepsilon)\right]^{-1}\sum_{k=1}^{n}\sum_{j=1}^{p_k}(\xi_{kj}\varphi_k^{(j)} + \bar{\xi}_{kj}\bar{\varphi}_k^{(j)}),\ \psi_k^{(1)}\rangle\rangle = 0, \\ t_{k\sigma}(\mu,\varepsilon) \equiv \xi_{k\sigma} - \tfrac{(i\mu)^{\sigma-1}}{1-(i\mu)^{p_k}}\xi_{k1} - \\ -\langle\langle(I - \mu\Gamma_0\mathscr{C})^{-1}\Gamma_0 B(\varepsilon)\left[I - (I - \mu\Gamma_0\mathscr{C})^{-1}\Gamma_0 B(\varepsilon)\right]^{-1}\sum_{k=1}^{n}\sum_{j=1}^{p_k}(\xi_{kj}\varphi_k^{(j)} + \bar{\xi}_{kj}\bar{\varphi}_k^{(j)}),\ \psi_k^{(p_k+1-\sigma)}\rangle\rangle = 0, \\ k = \overline{1,n},\ \ \sigma = \overline{1,p_k}. \end{gathered} \tag{2.8}$$

3. Редукция к возмущенной матричной задаче I

В п. 2 нами был выбран более сложный подход решения задачи I для установления прямых связей с бифуркацией Пуанкаре-Андронова-Хопфа. Безусловно, более простым вариантом исследования задачи I является ее редукция к возмущенной матричной задаче на собственные значения

$$\begin{pmatrix} B_0 + B(\varepsilon) & (\alpha+\mu)A \\ -(\alpha+\mu)A & B_0 + B(\varepsilon) \end{pmatrix} U = \left[\begin{pmatrix} B_0 + B(\varepsilon) & \alpha A \\ -\alpha A & B_0 + B(\varepsilon) \end{pmatrix} - \mu\begin{pmatrix} 0 & -A \\ A & 0 \end{pmatrix}\right] U = 0,\ \ \mu = \mu(\varepsilon). \tag{3.1}$$

Следует выяснить как изменится $\mathcal{A} = \begin{pmatrix} 0 & -A \\ A & 0 \end{pmatrix}$-собственное значение α оператора $\mathscr{B} = \begin{pmatrix} B_0 & \alpha A \\ -\alpha A & B_0 \end{pmatrix}$ при возмущении $B(\varepsilon)$ оператора B_0. Таким образом, рассматривается задача на собственные значения

$$\left[\mathscr{B}(\alpha) + \begin{pmatrix} B(\varepsilon) & 0 \\ 0 & B(\varepsilon) \end{pmatrix} - \mu \begin{pmatrix} 0 & -A \\ A & 0 \end{pmatrix}\right] U = 0, \quad \mathbf{B} = \mathscr{B}(\alpha) = \begin{pmatrix} B_0 & 0 \\ 0 & B_0 \end{pmatrix} - \alpha\mathcal{A},$$
$$\mathbf{B}(\varepsilon) = \begin{pmatrix} B_1 & 0 \\ 0 & B_1 \end{pmatrix}\varepsilon + \begin{pmatrix} B_2 & 0 \\ 0 & B_2 \end{pmatrix}\varepsilon^2 + \ldots,$$

то есть

$$\mathscr{B}(\alpha)U = [-\mathbf{B}(\varepsilon)U + \mu\mathcal{A}]\, U = 0 \quad \text{или} \quad \mathbf{B}U = -\mathbf{B}(\varepsilon)U + \mu\mathcal{A}U, \quad U = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix}. \tag{3.2}$$

Согласно [3-5] обобщенный жорданов набор линейной по малому параметру μ оператор-функции $\mathbf{B} - \mu\mathcal{A}$ всегда может быть выбран триканоническим, то есть для него справедливы формулы (1.6) или в координатной форме (1.7). Вводя регуляризатор Шмидта $\widetilde{\mathbf{B}} = \mathbf{B} + \sum\limits_{j=1}^{2}\sum\limits_{k=1}^{n}\langle\cdot, \Gamma_{jk}^{(1)}\rangle \mathrm{Z}_{jk}^{(1)}$, $\mathbf{\Gamma} = \widetilde{\mathbf{B}}^{-1}$, и, полагая

$$U = W + V, \;\; V = \xi_1\Phi_1 + \xi_2\Phi_2, \;\; \xi_1 = (\xi_{i1}^1, \xi_{i1}^2, \ldots \xi_{i1}^{p_1}, \;\ldots,\; \xi_{in}^1, \xi_{in}^2, \ldots \xi_{in}^{p_n});$$
$$\Phi_1 = (\Phi_{i1}^1, \Phi_{i1}^2, \ldots \Phi_{i1}^{p_1}, \;\ldots,\; \Phi_{in}^1, \Phi_{in}^2, \ldots \Phi_{in}^{p_n}), \;\; i = 1, 2,$$

(векторы Γ_i, Ψ_i, Z_i, $i = 1, 2$, определяются аналогично), запишем (3.2) в виде системы

$$\begin{gathered}\widetilde{\mathbf{B}}W + \sum_{k=1}^{n}\sum_{j=2}^{p_k}(\xi_{1k}^j\widetilde{\mathbf{B}}\Phi_{1k}^{(j)} + \xi_{2k}^j\widetilde{\mathbf{B}}\Phi_{2k}^{(j)}) - \mu\mathcal{A}W - \mu\mathcal{A}\sum_{k=1}^{n}\sum_{j=1}^{p_k}(\xi_{1k}^j\widetilde{\mathbf{B}}\Phi_{1k}^{(j)} + \xi_{2k}^j\widetilde{\mathbf{B}}\Phi_{2k}^{(j)}) + \\ + \mathbf{B}(\varepsilon)\left(W + \sum_{k=1}^{n}\sum_{j=1}^{p_k}(\xi_{1k}^j\widetilde{\mathbf{B}}\Phi_{1k}^{(j)} + \xi_{2k}^j\widetilde{\mathbf{B}}\Phi_{2k}^{(j)})\right) = \sum_{k=1}^{n}(\xi_{1k}^j \mathrm{Z}_{1k}^{(j)} + \xi_{2k}^j \mathrm{Z}_{2k}^{(j)}), \\ \xi_{1k}^j = \langle U, \Gamma_{1k}^{(j)}\rangle = \langle W, \Gamma_{1k}^{(j)}\rangle + \sum_{k=1}^{n}\sum_{j=1}^{p_k}\langle(\xi_{1k}^j\Phi_{1k}^{(j)} + \xi_{2k}^j\Phi_{2k}^{(j)}), \Gamma_{ik}^j\rangle, \quad i = 1, 2.\end{gathered} \tag{3.3}$$

Обращая в первом уравнении оператор $\widetilde{\mathbf{B}}$, получаем

$$\begin{aligned} W = [I - \mu\mathbf{\Gamma}\mathcal{A} + \mathbf{\Gamma}\mathbf{B}(\varepsilon)]^{-1}\Bigg\{ &- \sum_{k=1}^{n}\sum_{j=2}^{p_k}(\xi_{1k}^j\Phi_{1k}^{(j)} + \xi_{2k}^j\Phi_{2k}^{(j)}) + \mu\mathbf{\Gamma}\mathcal{A}\sum_{k=1}^{n}\sum_{j=1}^{p_k}(\xi_{1k}^j\Phi_{1k}^{(j)} + \xi_{2k}^j\Phi_{2k}^{(j)}) - \\ &- \mathbf{\Gamma}\mathbf{B}(\varepsilon)\sum_{k=1}^{n}\sum_{j=1}^{p_k}(\xi_{1k}^j\Phi_{1k}^{(j)} + \xi_{2k}^j\Phi_{2k}^{(j)})\Bigg\}. \end{aligned}$$

Так как $[I - \mu\mathbf{\Gamma}\mathcal{A} + \mathbf{\Gamma}\mathbf{B}(\varepsilon)]^{-1} = [I - (I - \mu\mathbf{\Gamma}\mathcal{A})^{-1}\mathbf{\Gamma}\mathbf{B}(\varepsilon)]^{-1}(I - \mu\mathbf{\Gamma}\mathcal{A})^{-1}$ и $(I - \mu\mathbf{\Gamma}\mathcal{A})^{-1}\left\{ - \sum\limits_{k=1}^{n}\sum\limits_{j=2}^{p_k}(\xi_{1k}^j\Phi_{1k}^{(j)} + \xi_{2k}^j\Phi_{2k}^{(j)}) + \mu\mathbf{\Gamma}\mathcal{A}\sum\limits_{k=1}^{n}\sum\limits_{j=1}^{p_k}(\xi_{1k}^j\Phi_{1k}^{(j)} + \xi_{2k}^j\Phi_{2k}^{(j)})\right\} = \sum\limits_{k=1}^{n}\sum\limits_{j=2}^{p_k}(\xi_{1k}^j\Phi_{1k}^{(j)} + \xi_{2k}^j\Phi_{2k}^{(j)}) + \mu\mathbf{\Gamma}\mathcal{A}(I - \mu\mathbf{\Gamma}\mathcal{A})^{-1}\sum\limits_{k=1}^{n}(\xi_{1k}^1\Phi_{1k}^{(1)} + \xi_{2k}^1\Phi_{2k}^{(1)})$, следовательно

$$\begin{aligned} W = &- \sum_{k=1}^{n}\sum_{j=2}^{p_k}(\xi_{1k}^j\Phi_{1k}^{(j)} + \xi_{2k}^j\Phi_{2k}^{(j)}) + \mu\mathbf{\Gamma}\mathcal{A}(I - \mu\mathbf{\Gamma}\mathcal{A})^{-1}\sum_{k=1}^{n}(\xi_{1k}^1\Phi_{1k}^{(1)} + \xi_{2k}^1\Phi_{2k}^{(1)}) - \\ &- (I - \mu\mathbf{\Gamma}\mathcal{A})^{-1}\mathbf{\Gamma}\mathbf{B}(\varepsilon)[I - (I - \mu\mathbf{\Gamma}\mathcal{A})^{-1}\mathbf{\Gamma}\mathbf{B}(\varepsilon)]^{-1}\sum_{k=1}^{n}\sum_{j=1}^{p_k}(\xi_{1k}^j\Phi_{1k}^{(j)} + \xi_{2k}^j\Phi_{2k}^{(j)}). \end{aligned} \tag{3.4}$$

Подстановка определенного по формуле (3.4) W во вторые уравнения системы (3.3) при учете формул

$$\begin{aligned}
&\mathbf{\Gamma}\mathcal{A}\Phi_{1k}^{(1)} = \mathbf{\Gamma}\widetilde{\mathbf{B}}\Phi_{1k}^{(2)} = \Phi_{1k}^{(2)},\ (\mathbf{\Gamma}\mathcal{A})^2\Phi_{1k}^{(1)} = \Phi_{1k}^{(3)},\ \ldots,\ (\mathbf{\Gamma}\mathcal{A})^s\Phi_{1k}^{(1)} = \Phi_{1k}^{(s+1)} \text{ при } s < p_k,\\
&\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad (\mathbf{\Gamma}\mathcal{A})^{p_k}\Phi_{1k}^{(1)} = \Phi_{1k}^{(p_k+1)} = \Phi_{1k}^{(1)},\\
&\mathbf{\Gamma}\mathcal{A}\Phi_{2k}^{(1)} = \mathbf{\Gamma}\widetilde{\mathbf{B}}\Phi_{2k}^{(2)} = \Phi_{2k}^{(2)},\ (\mathbf{\Gamma}\mathcal{A})^2\Phi_{2k}^{(1)} = \Phi_{2k}^{(3)},\ \ldots,\ (\mathbf{\Gamma}\mathcal{A})^s\Phi_{2k}^{(1)} = \Phi_{2k}^{(s+1)} \text{ при } s < p_k,\\
&\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad (\mathbf{\Gamma}\mathcal{A})^{p_k}\Phi_{2k}^{(1)} = \Phi_{2k}^{(p_k+1)} = \Phi_{2k}^{(1)},\\
&\qquad\qquad (\mathbf{\Gamma}\mathcal{A})^s\Phi_{ik}^{(1)} = \Phi_{ik}^{(s-\left[\frac{s}{p_k}\right]p_k)} \text{ при } s > p_k,\quad i = 1,2,
\end{aligned}$$

как и ранее, дает однородную систему $2K$-порядка линейных алгебраических уравнений, равенство определителя которой нулю является уравнением разветвления в корневом подпространстве относительно $\mu = \mu(\varepsilon)$.

Замечание 3.1. *1°. В предыдущей нашей работе* [11] *мы назвали УРК именно однородную систему, а не ее определитель.*
2°. Возникающая здесь система записана в векторной форме в двумерном пространстве.
3°. Задача II служит предметом нашей будущей работы.

Список литературы

1. Вайнберг М. М., Треногин В. А., *Теория ветвления решений нелинейных уравнений*, "Наука", М., 1964, 524 с., Engl. transl. Wolter Noordorf, Leyden, 1974
2. Треногин В. А., “Периодические решения и решения типа перехода абстрактных уравнений реакции-диффузии. Вопросы качественной теории дифференциальных уравнений.”, *СОАН СССР*, "Наука", Новосибирск, 1988, 133-140.
3. Логинов Б. В., Русак Ю. Б., “Обобщенная жорданова структура в теории ветвления”, *"Прямые и обратные задачи для дифференциальных уравнений с частными производными"*, сб. н. работ, ред. М. С. Салахитдинов, Изд-во "Фан"АН Узб.ССР, Ташкент, 1978, 133-148.
4. Русак Ю. Б., *Обобщенная жорданова структура в теории ветвления*, кандидатская диссертация, Инст. математики им. В. М. Романовского АН Узб.ССР. Ташкент, 1979, 126 с.
5. Русак Ю. Б., “Обобщенная жорданова структура аналитической оператор-функции и сопряженной к ней”, *Известия Акад. Наук Узб.ССР, физ-мат.*, 1978, № 2, 15-19.
6. Loginov B. V., Rousak Yu. B., “Generalized Jordan structure in the problem of the stability of bifurcating solutions”, *Nonlinear Analysis: TMA*, **17**:3 (1991), 219-232.
7. Loginov B. V., “Determination of the branching equation by its group symmetry - Andronov-Hopf bifurcation”, *Nonlinear Analysis: TMA*, **28**:12 (1997), 2035-2047.
8. Loginov B. V., “Branching equation in the root subspace”, *Nonlinear Analysis: TMA*, **32**:3 (1998), 439-448.
9. Loginov B. V., Kim-Tyan L. R., Rousak Yu.B., “On the stability of periodic solutions for differential equations with a fredholm operator at the highest derivative”, *Nonlinear analysis*, **67**:5 (2007), 1570-1585.

10. Коноплева И.В., Логинов Б.В., Русак Ю.Б., “Симметрия и потенциальность уравнений разветвления в корневых подпространствах в неявно заданных стационарных и динамических бифукационных задачах”, *Известия высших учебных заведений. Северо-Кавказский регион. Серия: Естественные науки.*, 2009, 115-124.

11. Кяшкин А. А., Логинов Б. В., Шаманаев П. А., “Комментарии к задачам о возмущениях линейного уравнения малым линейным слагаемым и спектральных характеристик фредгольмова оператора”, *Журнал Средневолжского математического общества*, **15**:3 (2013), 100-107.

12. Loginov B. V., “On the determination of branching equation by its group symmetry”, *Doklady Mathematics*, **331**:6 (1993), 667.

13. Loginov B. V., “Determination of the branching equation by its group symmetry - Andronov-Hopf bifurcation”, *Nonlinear Analysis*, **28**:12 (1997), 2033-2047.

14. Loginov B. V., Trenogin V. A., “Branching equation of Andronov-Hopf bifurcation under group symmetry conditions”, *Chaos (Woodbury, N.Y.)*, **7**:2 (1997), 229-238.

Comments to the problem on branching of periodical solutions at Andronov-Hopf bifurcation in differential equations with degenerated operator before the derivative

© **A. A. Kyashkin**[4], **B. V. Loginov**[5], **P. A. Shamanaev**[6]

Abstract. By the methods of branching theory of solutions to nonlinear equations it is investigated the perturbation problem for n-multiple pair of pure imaginary eigenvalues at the presence of generalized Jordan chains at Poincaré-Andronov-Hopf bifurcation.

Key Words: Andronov-Hopf bifurcation, perturbation of the critical pairs of eigenvalues.

[4] Graduate student of Applied Mathematics„ Differential Equations and Theoretical Mechanics Chair, Mordovian State University after N. P. Ogarev, Saransk; andrej_kjashkin@list.ru.

[5] Professor of the Chair "Higher Mathematics" , Ulyanovsk State Technical University, Ulyanovsk; loginov@ulstu.ru

[6] Associate Professor of Applied Mathematics, Differential Equations and Theoretical Mechanics Chair, Mordovian State University after N. P. Ogarev, Saransk; korspa@yandex.ru.