УДК 517.9

Энергетическая функция как полный топологический инвариант градиентно-подобных каскадов на поверхностях

© **В. Е. Круглов[1],О. В. Починка[2]**

Аннотация. В настоящей работе рассматриваются динамические системы с дискретным временем, порожденные итерациями градиентно-подобного диффеоморфизма поверхности, неблуждающее множество которого состоит из неподвижных точек положительного типа ориентации. Доказывается, что класс топологической сопряженности такой системы полностью определяется классом эквивалентности ее энергетической функции Морса.

Ключевые слова: энергетическая функция, градиентно-подобный диффеоморфизм

1. Введение

В 1978 К. Конли [1] доказал существование функции Ляпунова для любого потока (каскада), заданного на гладком замкнутом ориентируемом n-многообразии M, то есть непрерывной функции, которая строго убывает вдоль орбит вне цепно рекуррентного множества и постоянна на компонентах этого множества. Для диффеоморфизмов Морса-Смейла[3] цепно рекуррентное множество совпадает с множеством периодических орбит, так что в этом случае представляется естественным искать функцию Ляпунова в классе функций Морса. В 1977 году Д. Пикстон [4] определил функцию Ляпунова для диффеоморфизма Морса-Смейла f как функцию Морса $\varphi : M \to \mathbb{R}$ такую, что $\varphi(f(x)) < \varphi(x)$, если x — блуждающая точка, и $\varphi(f(x)) = \varphi(x)$, если x — периодическая точка. Такая функция может быть построена, в частности, с помощью перехода к потоку, являющемуся надстройкой над заданным диффеоморфизмом Морса-Смейла и дальнейшим применением результатов работы К. Мейера [3].

Если φ — функция Ляпунова для диффеоморфизма Морса-Смейла $f : M \to M$, то любая периодическая точка p является максимумом ограничения φ на неустойчивое многообразие W^u_p и минимумом ограничения φ на устойчивое многообразие W^s_p. Если эти экстремумы являются невырожденными, то инвариантные многообразия точки p трансверсальны всем регулярным множествам уровня φ в некоторой окрестности U_p точки p. Функция Ляпунова $\varphi : M \to \mathbb{R}$ для диффеоморфизма Морса-Смейла $f : M \to M$ называется *функцией Морса-Ляпунова*, если любая периодическая точка p является невырожденным максимумом (минимумом) ограничения φ на неустойчивое (устойчивое) многообразие W^u_p (W^s_p). Из работы В.З. Гринеса, Ф. Лауденбаха, О.В. Починки [2] следует, что среди функций Ляпунова для диффеоморфизма Морса-Смейла f функции Морса-Ляпунова образуют открытое всюду плотное в C^∞-топологии множество.

Если p — критическая точка функции Морса $\varphi : M \to \mathbb{R}$, то, согласно лемме Морса (см., например, [8]), в некоторой окрестности $V(p)$ точки p существует локальная система координат $x_1, \dots, x_n$, называемая *координатами Морса*, такая, что $x_j(p) = 0$ для каждого

[1] Студент Нижегородского государственного университета им. Н. И. Лобачевского

[2] Профессор кафедры фундаментальной математики, Национального исследовательского университета Высшая школа экономики

[3] Диффеоморфизм $f : M \to M$ называется *диффеоморфизмом Морса-Смейла*, если его неблуждающее множество $NW(f)$ состоит из конечного числа гиперболических периодических точек ($NW(f) = Per(f)$), инвариантные многообразия которых пересекаются трансверсально.

$j=\overline{1,n}$ и φ имеет вид $\varphi(x)=\varphi(p)-x_1^2-\dots-x_b^2+x_{b+1}^2+\dots+x_n^2$, где $b=ind(p)$ — индекс[4] точки p.

Если φ — функция Ляпунова для диффеоморфизма Морса-Смейла f, то, в силу [4], любая периодическая точка диффеоморфизма f является критической точкой функции φ и $ind(p)=dim\ W_p^u$. Обратное, вообще говоря, неверно: функция Ляпунова может иметь критические точки, которые не являются периодическими точками для f. Д. Пикстон [4] определил *энергетическую функцию* для диффеоморфизма Морса-Смейла f как функцию Морса-Ляпунова φ, множество критических точек которой совпадает с множеством периодических точек диффеморфизма f. Он доказал, что любой диффеоморфизм Морса-Смейла, заданный на поверхности (замкнутом двумерном многообразии), обладает энергетической функцией, однако существует пример диффеоморфизма Морса-Смейла на трехмерной сфере $\mathbb{S}^3$, не имеющего энергетической функции.

Следующее определение выделяет для градиентно-подобных диффеоморфизмов[5] класс функций Морса-Ляпунова с дополнительными свойствами, аналогичными свойствам функций, введенных С. Смейлом [5] для градиентно-подобных векторных полей.

Функция Морса-Ляпунова φ называется *самоиндексирующейся энергетической функцией*, если выполняются следующие условия:

1) множество критических точек функции φ совпадает с множеством $Per(f)$ периодических точек диффеоморфизма f;

2) $\varphi(p)=dim\ W_p^u$ для любой точки $p\in Per(f)$.

Р. Том [6] в 1962 году ввел понятие топологической эквивалентности функций. Функции $\varphi,\varphi':M\to\mathbb{R}$ называются *топологически эквивалентными*, если существуют гомеоморфизмы $\psi:M\to M$ и $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ такие, что следующая диаграмма коммутативна

$$\begin{array}{ccc} M & \stackrel{\varphi}{\to} & \mathbb{R} \\ \psi\downarrow\uparrow\psi^{-1} & & g^{-1}\downarrow\uparrow g \\ M & \underset{\varphi'}{\to} & \mathbb{R} \end{array}$$

Нетрудно убедиться, что гомеоморфизм ψ переводит множество уровня $\varphi^{-1}(c)$ в множество уровня $\varphi'^{-1}(g(c))$. Кроме того, если φ,φ' — самоиндексирующиеся функции, то гомеоморфизм g можно считать тождественным и топологическая эквивалентность таких функций определяется существованием гомеоморфизма $\psi:M\to M$ такого, что

$$\varphi=\varphi'\psi \ \text{ и } \ \varphi'=\varphi\psi^{-1}.$$

Пусть S замкнутая ориентируемая поверхность. Диффеоморфизм Морса-Смейла $f:S\to S$ называется *градиентно-подобным*, если инвариантные многообразия его различных седловых точек не пересекаются. Обозначим через G класс градиентно-подобных диффеоморфизмов, неблуждающее множество которых состоит из неподвижных точек положительного типа ориентации[6]. Существование самоиндексирующейся энергетической функции у любого диффеоморфизма из класса G следует из работы [4].

Основным результатом работы является следующая теорема.

[4] *Индексом критической точки* p называется число отрицательных собственных значений матрицы $\frac{\partial^2\varphi}{\partial x_i\partial x_j}(p)$.

[5] Диффеоморфизм Морса-Смейла $f:M\to M$ называется *градиентно-подобным*, если для любой пары периодических точек p, q $(p\neq q)$ из условия $W_p^u\cap W_q^s\neq\emptyset$ следует, что $\dim W_p^s<\dim W_q^s$.

[6] Говорят, что неподвижная точка p диффеоморфизма Морса-Смейла f имеет *положительный тип ориентации*, если отображение $f|_{W_p^u}$ сохраняет ориентацию. В противном случае, тип ориентации точки p называют *отрицательным*.

Теорема 1.1. *Диффеоморфизмы класса G топологически сопряжены тогда и только тогда, когда их самоиндексирующиеся энергетические функции топологически эквивалентны.*

Благодарности. Работа выполнена при финансовой поддержке грантов РФФИ 13-01-12452-офи-м, 12-01-00672-а.

2. Доказательство теоремы

Пусть $f \in G$ и $\varphi : S \to [0,2]$ — самоиндексирующаяся энергетическая функция Морса-Ляпунова для f. Тогда $\Omega^0_f = \varphi^{-1}(0)$, $\Omega^1_f = \varphi^{-1}(1)$, $\Omega^2_f = \varphi^{-1}(2)$ — множество всех стоков, седел, источников, соответственно, диффеоморфизма f. Покажем, что диффеоморфизмы $f, f' \in G$ топологически сопряжены тогда и только тогда, когда функции φ, φ' топологически эквивалентны.

Для каждого стока ω (ω') диффеоморфизма f (f') обозначим через L_ω ($L'_{\omega'}$) множество неустойчивых сепаратрис ℓ (ℓ') седловых точек σ (σ') гомеоморфизма f (f') таких, что $cl(\ell) = \ell \cup \sigma \cup \omega$ ($cl(\ell') = \ell' \cup \sigma' \cup \omega'$). Обозначим поток, порождённый векторным полем $grad\ \varphi$ ($grad\ \varphi'$) через X (X'). Исходя из того, что под энергетической функцией φ (φ') мы понимаем функцию Морса-Ляпунова, для любой седловой точки σ (σ') существует окрестность V_σ ($V_{\sigma'}$) такая, что внутри V_σ ($V_{\sigma'}$) инвариантные многообразия точки σ как неподвижной точки диффеоморфизма f (f') и потока X (X') совпадают. Выберем $\varepsilon > 0$ так, что линия уровня $\varphi^{-1}(1-\varepsilon)$ ($\varphi'^{-1}(1-\varepsilon)$) пересекает каждую неустойчивую сепаратрису каждой седловой точки σ (σ') в окрестности V_σ ($V_{\sigma'}$). Положим $\Gamma = \varphi^{-1}(1-\varepsilon)$ ($\Gamma' = \varphi'^{-1}(1-\varepsilon)$) и $B = \varphi^{-1}([0, 1-\varepsilon])$ ($B' = \varphi'^{-1}([0, 1-\varepsilon])$).

Необходимость. Пусть диффеоморфизмы $f, f' \in G$ топологически сопряжены посредством гомеоморфизма $h : S \to S$. Отсюда для любого стока ω, седловой точки σ и множества L_ω диффеоморфизма f существуют единственные соответствующие объекты диффеоморфизма f', а именно $\omega' = h(\omega)$, $\sigma' = h(\sigma)$ и $L'_{\omega'} = h(L_\omega)$. Воспользовавшись леммой 3.2.1. из работы [7], для каждого стока ω выберем диск $D_\omega \subset int\ B$, содержащий ω так, что любая сепаратриса $\ell \in L_\omega$ пересекает ∂D_ω в единственной точке и $D'_{\omega'} = h(D_\omega) \subset int\ B'$. Также для любого ω (ω') существует компонента связности B_ω ($B'_{\omega'}$) множества B (B'), лежащая в W^s_ω ($W^s_{\omega'}$). Положим $H_\omega = cl\ (B_\omega \setminus D_\omega)$ ($H'_{\omega'} = cl\ (B'_{\omega'} \setminus D'_{\omega'})$) и связности $\Gamma_\omega = \partial B_\omega$ ($\Gamma'_{\omega'} = \partial B'_{\omega'}$).

По условию f и f' топологически сопряжены, следовательно гомеоморфизм h переводит неустойчивые сепаратрисы f в неустойчивые сепаратрисы f'. Исходя из этого, зададим гомеоморфизм $h_{\Gamma_\omega} : \Gamma_\omega \to \Gamma'_{\omega'}$ следующим образом: ∂D_ω посредством h гомеоморфно $\partial D'_{\omega'}$, также гомеоморфны между собой посредством h неустойчивые сепаратрисы L_ω и $L'_{\omega'}$. Тогда существует гомеоморфизм $\psi_{L_\omega \cap H_\omega} : L_\omega \cap H_\omega \to h(L_\omega) \cap H'_{\omega'}$ такой, что $\ell \cap H_\omega \mapsto h(\ell) \cap H'_{\omega'}$ и $\psi_{L_\omega \cap H_\omega}|_{(L_\omega \cap \partial D_\omega)} = h|_{(L_\omega \cap \partial D_\omega)}$. С его помощью мы отобразили в том числе точки $L_\omega \cap \Gamma_\omega$ в точки $L'_{\omega'} \cap \Gamma'_\omega$. Построим гомеоморфизм $\psi_{\Gamma_\omega} : \Gamma_\omega \to \Gamma'_{\omega'}$, продолжая отображение $\psi_{L_\omega \cap H_\omega}$ с точек $L_\omega \cap \Gamma_\omega$ на дуги между ними так, что положительное направление обхода[7] на кривой $\Gamma_\omega = \partial B_\omega$ и гомеоморфизм ψ_{Γ_ω} индуцируют на кривой $\Gamma'_{\omega'} = \partial B'_{\omega'}$ такое же (положительное или отрицательное) направление обхода, какое индуцирует на кривой $\partial D'_{\omega'}$ положительное направление обхода на кривой ∂D_ω и гомеоморфизм h. Обозначим через $\psi_\Gamma : \Gamma \to \Gamma'$ гомеоморфизм, составленный из отображений $\psi_{\Gamma_\omega}, \omega \in \Omega^0_f$.

[7] Пусть d некоторый двумерный диск. Направление обхода его границы $c = \partial d$ *положительным (отрицательным)*, если при движении вдоль c в этом направлении диск d остается слева (справа).

Таким образом, мы построили гомеоморфизм, переводящий линию уровня Γ диффеоморфизма f в линию уровня Γ' диффеоморфизма f'.

Обозначим через g_x $({g'}_{x'})$ траекторию потока X (X'), проходящую через $x \in \Gamma$ $(x' \in \Gamma')$. Положим $Q = \bigcup\limits_{x\in\Gamma} g_x$, $Q' = \bigcup\limits_{x'\in\Gamma'} {g'}_{x'}$. Определим гомеоморфизм $\psi_Q : Q \to Q'$ по формуле: для $y \in g_x$ положим $\psi_Q(y) = y'$, где $y' \in g'_{\psi_\Gamma(x)}$ и $\varphi(y) = \varphi'(y')$. По построению линии уровня, которым принадлежат y и y', связаны гомеоморфизмом ψ_Q. Так как W^s_σ $(W^s_{\sigma'})$, как устойчивое многообразие седловой точки σ (σ') потока X (X'), трансверсально линиям уровня φ (φ') для любой седловой точки σ (σ'), то гомеоморфизм ψ_Q продолжается до искомого гомеоморфизма $\psi : S \to S$ по непрерывности. Таким образом, мы преобразовали сопрягающий гомеоморфизм h в гомеоморфизм ψ такой, что выполняются соотношения $\varphi = \varphi'\psi$ и $\varphi' = \varphi\psi^{-1}$, это означает, что функции φ и φ' топологически эквиваленты.

Достаточность. Пусть функции φ и φ' топологически эквивалентны, т.е. $\varphi = \varphi'\psi$ и $\varphi' = \varphi\psi^{-1}$ для некоторого гомеоморфизма $\psi : S \to S$. Положим $C = \varphi^{-1}(1)$ $(C' = \varphi'^{-1}(1))$. Заметим, что каждая компонента связности B содержит в точности один сток диффеоморфизма f. Так как φ — функция Ляпунова, то $f(B) \subset intB$. Положим $K = B \setminus int\ f(B)$ $(K' = B' \setminus int\ f'(B'))$. Обозначим через g_x $(g'_{x'})$ траекторию потока X (X'), проходящую через точку $x \in C$ $(x' \in C')$. Заметим, что $\psi(C) = C'$, что следует из топологической эквивалентности φ и φ'. Определим гомеоморфизм $h_{\Gamma\setminus W^u_{\Omega^1_f}} : \Gamma\setminus W^u_{\Omega^1_f} \to \Gamma'\setminus W^u_{\Omega^1_{f'}}$ по формуле: для $y = g_x \cap \Gamma$ положим $h_{\Gamma\setminus W^u_{\Omega^1_f}}(y) = y'$, где $y' = g'_{\psi(x)} \cap \Gamma'$, который продолжается по непрерывности до $h_\Gamma : \Gamma \to \Gamma'$ так, что для любой седловой сепаратрисы l потока X выполняется равенство $h_\Gamma(l \cap \Gamma) = \psi(l) \cap \Gamma'$.

Положим $h_{f(\Gamma)} = f'h_\Gamma f^{-1} : f(\Gamma) \to f'(\Gamma')$. Тогда существует гомеоморфизм $h_K : K \to K'$ такой, что $h_K|_\Gamma = h_\Gamma$, $h_K|_{f(\Gamma)} = h_{f(\Gamma)}$ и $h_K(W^u_{\Omega^1_f} \cap K) = W^u_{\Omega^1_{f'}} \cap K'$. Определим гомеоморфизм $h_0 : W^s_{\Omega^0_f} \setminus \Omega^0_f \to W^s_{\Omega^0_{f'}} \setminus \Omega^0_{f'}$ формулой $h_0(x) = f'^{-k}(h_K(f^k(x)))$, где $f^k(x) \in K$ (т.е. данный гомеоморфизм отображает бассейны стоков диффеоморфизма f в бассейны стоков диффеоморфизма f'). По непрерывности этот гомеоморфизм продолжается на Ω^0_f. Осталось его продолжить на $cl\ (W^s_{\Omega^1_f})$.

Пусть $\sigma \in \Omega^1_f$ и σ' — седло из $\Omega^1_{f'}$ такое, что $h_0(W^u_\sigma \setminus \sigma) = W^u_{\sigma'} \setminus \sigma'$.

В силу теоремы 1.1.2 из [7], существует окрестность U_σ точки σ диффеоморфизма f и гомеоморфизм $F_\sigma : U_\sigma \to U$, сопрягающий диффеоморфизм $f|_{U_\sigma}$ с диффеоморфизмом $b|_U$, где $U = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2\ :\ |x_1x_2| \le 1\}$ и $b(x_1, x_2) = (2x_1, \frac{x_2}{2})$. Также существует окрестность $U_{\sigma'}$ точки σ' такая, что $h_0(U_\sigma\setminus W^s_\sigma) \subset U_{\sigma'}$ диффеоморфизма f' и гомеоморфизм $F'_{\sigma'} : U_{\sigma'} \to U$, сопрягающий диффеоморфизм $f'|_{U'_{\sigma'}}$ с диффеоморфизмом $b|_U$. Положим $U'_{\sigma'} = h_0(U_\sigma\setminus W^s_\sigma) \cup W^s_{\sigma'}$, $U' = F'_{\sigma'}(U'_{\sigma'})$, $L = \partial U$ и $L' = \partial U'$.

Положим $U^t = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2\ :\ |x_1x_2| \le t\}$ для $t \in (0, 1)$ и $L^t = \partial U^t$. Зафиксируем значение $\tau \in (0, 1)$ так, что $F'^{-1}_{\sigma'}(U^\tau) \subset U'_{\sigma'}$. Мы установили гомеоморфность посредством отображения $\tilde{h}_0 = F'_{\sigma'}h_0F^{-1}_\sigma$ областей U и U'. Положим $Q = U\setminus U^\tau$ и $Q' = U'\setminus U^\tau$. По построению каждая компонента связности множеств Q, Q' гомеоморфна полосе $[0, 1] \times \mathbb{R}$. Не уменьшая общности можно считать, что, если Y_1, Y_2 — компоненты связности границы компоненты связности множества Q, то $\tilde{h}_0(Y_1), Y_2$ — компоненты связности границы компоненты связности множества Q' (в противном случае гомеоморфизм F_σ нужно заменить на гомеоморфизм jF_σ, $j(x_1, x_2) = (-x_1, -x_2)$). Обозначим через $\hat{Q} = Q/b, \hat{Q}' = Q'/b$ пространства орбит действия диффеоморфизма b на Q, Q', соответственно, и через $p : Q \to \hat{Q}, p' : Q' \to \hat{Q}'$ естественную проекцию. Тогда каждая компонента связности множеств $\hat{Q}, \hat{Q}'$ гомеоморфна кольцу $[0, 1] \times \mathbb{S}^1$. Поскольку

$\hat{L}^\tau = L^\tau/b$ общая граница колец $\hat{Q}$ и $\hat{Q}'$, то существует гомеоморфизм $\hat{h}_{\hat{Q}} : \hat{Q} \to \hat{Q}'$, являющийся тождественным на одной компоненте связности границы каждого кольца из $\hat{Q}$ и совпадающий с гомеоморфизмом $p'\tilde{h}_0 p^{-1}$ на другой.

Обозначим через $\tilde{h}_Q : Q \to Q'$ поднятие гомеоморфизма $\hat{h}_{\hat{Q}}$. Из полученного строим гомеоморфизм $\tilde{h}_U : U \to U'$, тождественный на U^τ и совпадающий с $\tilde{h}_Q$ на Q. Получаем, что U_σ гомеоморфно $U'_{\sigma'}$ посредством $h_{U_\sigma} = F'^{-1}_{\sigma'}\tilde{h}_U F_\sigma$ и выполнено $h_{U_\sigma}(W^s_\sigma) = W^s_{\sigma'}$. Положим $U_{\Omega^1_f} = \bigcup\limits_{\sigma\in\Omega^1_f} U_\sigma$, $U_{\Omega^1_{f'}} = \bigcup\limits_{\sigma'\in\Omega^1_{f'}} U_{\sigma'}$ и обозначим через $h_1 : U_{\Omega^1_f} \to U_{\Omega^1_{f'}}$ гомеоморфизм, составленный из $h_{U_\sigma}, \sigma \in \Omega^1_f$. Поскольку $h_0|_{\partial U_{\Omega^1_f}} = h_1|_{\partial U_{\Omega^1_f}}$, то отображение $h_2 : S \setminus \Omega^2_f \to S \setminus \Omega^2_{f'}$, определенное формулой $h_2(x) = \begin{cases} h_1(x), \text{ если } x \in U_{\Omega^1_f}; \\ h_0(x), \text{ иначе;} \end{cases}$

Гомеоморфизм h_2 единственным образом продолжается на множество Ω^2_f до искомого гомеоморфизма $h : S \to S$ так, что $h(\alpha) = \alpha'$, где $h_2(W^u_\alpha \setminus \alpha) = W^u_{\alpha'} \setminus \alpha'$.

Теорема доказана.

Список литературы

1. C. Conley, “CBMS Regional Conference Series in Math”, 1978.
2. V. Grines, F. Laudenbach, O. Pochinka, “Self-indexing energy function for Morse-Smale diffeomorphisms on 3-manifolds”, *Moscow Math. Journal*, **9**:4 (2009).
3. Meyer K. R., “Energy functions for Morse-Smale systems”, *Amer. J. Math.*, 1968, № 90, 1031–1040.
4. Pixton D., “Wild unstable manifolds”, *Topology*, **16**:2 (1977), 167–172.
5. Smale S., “On gradient dynamical systems”, *Ann. Math.*, 1961, 199–206.
6. R. Thom, “La stabilite topologique des applications polynomiales”, *L'Enseignement Mathematique*, 1962, № 8, 24–33.
7. В. З. Гринес, О. В. Починка, *Введение в топологическую классификацию каскадов на многообразиях размерности два и три*, Ижевский институт компьютерных исследований, Ижевск, 2011, 424 с.
8. Дж. Милнор, *Теория Морса*, «Платон», М., 1969, 184 с.

Energy function as a complete topological invariant for gradient-like cascades on surfaces

© V. E. Kruglov[8], O. V. Pochinka[9]

Abstract. In this paper we consider dynamical systems with discrete time generated by iterations of a gradient-like diffeomorphism of a surface whose non-wandering set consists of fixed points of positive type orientation. We prove that the class of topological conjugacy of such a system is completely determined by equivalence class of its energy Morse function.

Key Words: energy function, gradient-like diffeomorphism

[8] Student, Lobachevsky State University of Nizhni Novgorod, Nizhni Novgorod

[9] Professor of the department of fundamental mathematics, High School Economy, Nizhny Novgorod