УДК 517.9

О топологической классификации потоков Морса-Смейла на поверхностях при помощи функции Ляпунова

© Е. Я. Гуревич[1], Е.Д. Куренков[2]

Аннотация. Для потоков Морса-Смейла на поверхностях вводится понятие согласованной эквивалентности ξ-функций Мейера (являющихся функциями Ляпунова) и доказывается, что согласованная эквивалентность ξ-функций является необходимым и достаточным условием топологической эквивалентности таких потоков. Предлагаемый результат устраняет неточность в доказательстве аналогичного факта К. Мейером.

Ключевые слова: структурно-устойчивые потоки на поверхностях, потоки Морса-Смейла, топологическая классификация, функция Ляпунова

Введение

А.М. Ляпунов разработал метод исследования устойчивости решений систем дифференциальных уравнений, основанный на использовании локальной функции, убывающей вдоль траекторий потока, и получившей название функции Ляпунова. Обобщением этой функции является *глобальная функция Ляпунова*, определяемая для структурно устойчивого потока f^t, заданного на замкнутом гладком n-многообразии M^n следующим образом.

Определение 1.1. *Непрерывная функция $\varphi : M^n \to \mathbb{R}$ называется функцией Ляпунова потока f^t на M^n, если она удовлетворяет следующим условиям:*

1. $\varphi(f^t(x)) < \varphi(x)$ *для любой блуждающей точки* $x \in M^n$ *и любого* $t > 0$.
2. $\varphi(f^t(x)) = \varphi(x)$ *для любой неблуждающей точки* $x \in M^n$.

Из работы [2] Ч. Конли следует, что функция Ляпунова существует для любого структурно-устойчивого потока. Из работы[9] В. Вильсона и Дж. Йорке следует, что любой структурно-устойчивый поток обладает *энергетической функцией*, то есть гладкой функцией Ляпунова, множество критических точек которой совпадает с неблуждающим множеством системы. Для потоков Морса-Смейла удается уточнить свойства энергетической функции и использовать ее как топологический инвариант. Для точных формулировок напомним некоторые определения.

Точка $p \in M^n$ называется *критической точкой* C^2-гладкой функции $\varphi\colon M^n \to \mathbb{R}$, если $\frac{\partial \varphi}{\partial x_i}|_p = 0$ для любого $i \in 1,...,n$ в локальных координатах $x_1,...,x_n$ в окрестности точки p.

Обозначим через Δ множество всех критических точек этой функции и через $\Delta_i \subset \Delta$ — множество критических точек функции φ, в которых гессиан функции φ имеет ровно i собственных значений, равных нулю.

[1] Доцент кафедры фундаментальной математики Национального исследовательского университета Высшая школа экономики; elena _ gurevich@list.ru.

[2] Студент факультета экономики Национального исследовательского университета Высшая школа экономики; eugene2402@mail.ru.

Из леммы Морса следует, что Δ_0 представляет собой конечное множество точек (называемых *невырожденными*), причем для каждой точки $p \in \Delta_0$ существует окрестность N_p и гомеоморфизм $h_p : N_p \to \mathbb{R}^n$ такие, что

$$\varphi \circ h_p^{-1} = \varphi(p) + Q(x),$$

где Q — невырожденная квадратичная форма в координатах $(x_1, ..., x_n) \subset \mathbb{R}^n$, индекс которой совпадает с индексом матрицы Гессе функции φ в точке p[3].

Функция $\varphi : M^n \to \mathbb{R}$ называется *функцией Морса*, если $\Delta = \Delta_0$ (то есть все ее критические точки невырождены).

К. Мейер в работе [4] обобщил понятие функции Морса, определив ξ-функцию следующим образом.

Определение 1.2. *Функция $\varphi\colon M^n \to \mathbb{R}$ называется ξ-функцией, если φ удовлетворяет следующим условиям:*

1. $\Delta = \Delta_0 \cup \Delta_1$.

2. *Множество Δ_1 является объединением конечного множества замкнутых дуг (гомеоморфных образов окружности), и для любой дуги $\gamma \in \Delta_1$ индексы матрицы Гессе в произвольных точках $p, q \in \gamma$ совпадают.*

3. *Для любой дуги $\gamma \in \Delta_1$ существует окрестность N_γ и диффеоморфизм h_γ из N_γ на локально-тривиальное расслоение над окружностью $\mathbb{S}^1$ со слоем диск $\mathbb{B}^{n-1}$ (если N_γ ориентируема, то $h_\gamma(N_\gamma) = \mathbb{B}^{n-1} \times \mathbb{S}^1$), такие, что $\varphi \circ h_\gamma^{-1} = \varphi(\gamma) + Q(y)$, где $Q(y)$ представляет собой невырожденную квадратичную форму от переменных $y_1, y_2, \ldots, y_{n-1}$ (координаты в $\mathbb{B}^{n-1}$) и периодическую функцию переменной y_m (координата в $\mathbb{S}^1$). Кроме того, в любой точке $\mathbb{S}^1$ индекс квадратичной формы Q совпадает с индексом матрицы Гессе функции φ на множестве γ.*

Напомним, что гладкий поток f^t на многообразии M^n называется *потоком Морса-Смейла*, если его неблуждающее множество $\Omega(f^t)$ состоит из конечного числа гиперболических состояний равновесия и конечного числа гиперболических замкнутых траекторий, а устойчивые и неустойчивые многообразия различных состояний равновесия и периодических решений пересекаются трансверсально. Поток Морса-Смейла без замкнутых траекторий называется *градиентно-подобным потоком.*

Из работы [7] С. Смейла (Th B) следует, что для любого градиентно-подобного потока f^t на M^n существует энергетическая функция $\varphi : M^n \to [0, n]$ со следующими свойствами:

1. Функция φ является функцией Морса.

2. $\varphi(p) = dim\ W_p^u$ для любого $p \in \Omega(f^t)$.

К. Мейер в работе [4] доказал, что для произвольного потока Морса-Смейла f^t на M^n существует C^∞-гладкая энергетическая функция $\varphi : M^n \to [0, n]$ следующими свойствами:

[3] Индексом квадратичной формы $Q = \sum\limits_{j=1}^{n} \alpha_j x_j^2$ называется число отрицательных элементов из множества коэффициентов $\{\alpha_1, ..., \alpha_n\}$. Индексом матрицы Гессе называется число её отрицательных собственных чисел.

1. Функция φ является ξ-функцией.

2. Множество Δ_0 совпадает с множеством всех неподвижных точек потока f^t, множество Δ_1 совпадает с множеством предельных циклов.

3. Существует константа $\varkappa > 0$ такая, что в любой окрестности N_δ, $\delta \in \Delta$, производная $\frac{\partial\varphi}{\partial l}\big|_x$ по направлению, задаваемому потоком в произвольной точке $x \in N_\delta$, удовлетворяет неравенству

$$-\frac{\partial\varphi}{\partial l}\bigg|_x \geq \varkappa d(x,\delta)^2,$$

где $d(x,\delta)$ — евклидова метрика в локальных координатах.

4. $\varphi(x) = dim\, W^u_x$ для любой точки $x \in \Omega_f$.

Будем называть такую функцию *энергетической ξ-функцией* потока Морса-Смейла.

Для привлечения энергетической ξ-функции к решению проблемы топологической классификации потоков Морса-Смейла напомним следующие определения.

Определение 1.3. *Потоки f^t, f'^t на многообразии M^n называются топологически эквивалентными, если существует гомеоморфизм $h : M^n \to M^n$, переводящий траектории потока f^t в траектории потока f'^t с сохранением ориентации на траекториях.*

Определение 1.4. *Две гладкие функции $\varphi : M^n \to \mathbb{R}$ и $\varphi' : M^n \to \mathbb{R}$ называются топологически эквивалентными, если существуют сохраняющие ориентацию гомеоморфизмы $H : M^n \to M^n$ и $\chi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ такие, что $\varphi' H = \chi\, \varphi$.*

В работе [4] (proposition) доказано, что топологически эквивалентные потоки Морса-Смейла имеют топологически эквивалентные энергетические ξ- функции. Для случая $n = 2$ утверждалось, что верно и обратное утверждение. А. А. Ошемков и В. В. Шарко в работе [5] привели пример топологически неэквивалентных потоков Морса-Смейла на торе, имеющих эквивалентные энергетические функции, и отметили, что результат Мейера остается верным только для градиентно-подобных потоков. А. А. Ошемкову и В. В. Шарко принадлежит завершающий результат по полной топологической классификации потоков Морса-Смейла на поверхностях. В различных предположениях общности эта проблема решалась А.А. Андроновым, Е.А. Леонтович, А.Г. Майером и М. Пейшото, а также Дж. Флейтасом (см. работы [1], [3], [6], [8]). Во всех перечисленных работах для решения проблемы топологической классификации использовались комбинаторные инварианты, описывающие взаимное расположение особых траекторий (сепаратрис седловых периодических точек и предельных циклов) в фазовом пространстве.

Между тем, в прикладных задачах функция Ляпунова структурно-устойчивого потока часто известна из физических соображений, и тогда её привлечение к решению задачи топологической классификации представляется более естественным, нежели использование комбинаторных инвариантов.

Цель настоящей статьи состоит в уточнении результата Мейера и получении критерия топологической сопряженности потоков Морса-Смейла в терминах энергетических ξ-функций.

2. Формулировка результата

Пусть γ — предельный цикл потока f^t периода τ_γ, $x_0 \in \gamma$ — произвольная точка, $x_1 = f^{t_1}(x_0), x_2 = f^{t_2}(x_0)$, $0 < t_1 < t_2 < \tau_\gamma$. Точки x_0, x_1, x_2 задают ориентацию предельного цикла γ, которую будем называть *ориентацией, индуцированной потоком* f^t. Пусть γ' — предельный цикл потока f'^t, на котором определена ориентация, индуцированная потоком f'^t. Будем говорить, что гомеоморфизм $h : \gamma \to \gamma'$ является сохраняющим ориентацию, если ориентация на предельном цикле γ', определенная точками $h(x_0), h(x_1), h(x_2)$, совпадает с ориентацией, индуцированной потоком f'^t.

Определение 2.1. *Пусть f^t, f'^t — потоки Морса-Смейла, φ, φ' — энергетические ξ-функции потоков f^t и f'^t соответственно. Функции φ, φ' называются согласованно эквивалентными, если существуют гомеоморфизмы $H\colon M^n \to M^n$ и $\chi\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ такие, что $f'H = \chi f$, и для любого предельного цикла $\gamma \in \Delta_1$ ограничение $H|_\gamma$ гомеоморфизма H на γ является сохраняющим ориентацию.*

Основной результат работы заключается в следующей теореме.

Теорема 2.1. *Для того, чтобы два потока Морса-Смейла f^t и f'^t, заданные на ориентируемом многообразии M^2, были топологически эквивалентными, необходимо и достаточно, чтобы их энергетические ξ-функции φ и φ' были согласованно эквивалентными.*

Благодарности. Работа выполнена при финансовой поддержке грантов РФФИ № 13-01-12452-офи-м и 12-01-00672-а.

Список литературы

1. Андронов А. А., Понтрягин Л. С., “Грубые системы”, *Докл. АН СССР*, **14**:5 (1937), 247-250.

2. C. Conley, “Isolated Invariant Sets and Morse Index”, *CBMS Regional Conference Series in Math.*, **38** (1978).

3. Леонтович Е. А., Майер А.Г., “О схеме, определяющей топологическую структуру разбиения на траектории”, *Докл. АН СССР*, **103**:4 (1955), 557 - 560.

4. Meyer K.R., “Energy Functions for Morse-Smale Systems”, *Amer. J. Math.*, **90**:4 (1968), 1031–1040.

5. Ошемков А.А., Шарко В.В., “О классификации потоков Морса-Смейла на двумерных многообразиях”, *Математический сборник*, **189**:8 (1998), 93–140.

6. Peixoto M., “On the classification of flows on two-manifolds”, *Dynamical systems Proc. Symp. held at the Univ.of Bahia, Salvador, Brasil,- M. Peixoto (ed.) N.Y.London: Acad. press*, 1973, 389 - 419.

7. Smale S., “On Gradient Dynamical Systems”, *Annals of Math*, **1**:1 (1961), 199–206.

8. Fleitas G., “Classification of gradient-like flows in dimension two and three”, *Bol. Soc. Mat. Brasil*, **6** (1975), 155 - 183.

9. Wilson W., Yorke J., "Lyapunov functions and isolating blocks", *JDE*, **13** (1973), 106–123..

On topological classification of Morse-Smale flows on surfaces by means of Lyapunov function

© **E. Ya. Gurevich[4], E.D. Kurenkov[5].**

Abstract. We introduce the definition of consistent equivalence of Meyer ξ-functions for Morse-Smale flows on surfaces (that are Lyapunov functions) and state that consistent equivalence of ξ-functions is necessary and sufficient condition for such flows.

Key Words: structurally stable flows on surfaces, Morse-Smale flows, Lyapunov function, topological equivalence, topological classification

[4] Associated Professor, National Research University Higher School of Economics, elena _ gurevich@list.ru.
[5] Student, National Research University Higher School of Economics,eugene2402@mail.ru.