Краткие сообщения

УДК 517.929

Методы построения выпуклых множеств коэффициентов устойчивого полинома

© **А. В. Зубов** [1], **А. Ф. Зубова** [2], **М. В. Стрекопытова** [3]

Аннотация. В теории робастной устойчивости важное место занимает разработка критериев существования и поиск методов построения выпуклых множеств коэффициентов устойчивых полиномов [1, 2]. Не менее важной проблемой является решение этой же задачи и для неустойчивых полиномов. В данной работе предложены критерии существования выпуклых множеств неустойчивых полиномов, принадлежащих одному определенному классу неустойчивости. Эти критерии позволяют путем проверки конечного числа условий, налагаемых на полиномы, образующие это семейство, установить свойства всего этого семейства полиномов.

Ключевые слова: полином, степень, вещественный коэффициент, корень, класс эквивалентности, прямоугольник, радиус - вектор, комплексная плоскость, параллельная ось, часовая стрелка, вещественная и мнимая части, аргумент, коллинеарность, скалярное произведение

Определение 1.1. *[4] Будем говорить, что полиномы степени n с вещественными коэффициентами*

$$f(z) = a_0 + a_1 z + \ldots + a_n z^n$$

принадлежат классу (n,k) - эквивалентности, если они не имеют нулевых и чисто мнимых корней, а число корней лежащих в правой полуплоскости, учитывая их кратности, у всех полиномов одинаково и равно k $(0 \le k \le n)$.

Очевидно, из определения следует, что $a_0 \neq 0$, $a_n \neq 0$.

Справедливы теоремы.

Теорема 1.1. *Семейство полиномов*

$$\sum_{m=1}^{p} \alpha_m f_m(z), \quad \sum_{m=1}^{p} \alpha_m = 1, \quad \alpha_m \ge 0 \tag{1.1}$$

принадлежат классу (n,k) - эквивалентности, тогда и только тогда, когда этому классу принадлежат все полиномы вида:

$$\alpha f_1(z) + (1-\alpha) f_j(z), \quad \alpha \in [0,1], \quad l.j = 1,2,\ldots,p. \tag{1.2}$$

Доказательство.

Необходимость. Пусть все полиномы семейства (1.1) принадлежат классу (n,k) - эквивалентности. Тогда, полагая в формуле (1.1) $\alpha_l = \alpha$, $\alpha_j = 1-\alpha$, $\alpha \in [0,1]$, получим,

[1] Профессор кафедры теории управления; СПбГУ, г. Санкт-Петербург; ddemidova@mail.ru
[2] Профессор кафедры теории управления; СПбГУ, г. Санкт-Петербург; ddemidova@mail.ru
[3] Доцент кафедры теории управления; СПбГУ, г. Санкт-Петербург; ddemidova@mail.ru

что любой полином семейства (1.2) является полиномом семейства (1.1), т. е. принадлежат классу (n,k) - эквивалентности.

Достаточность. Будем далее рассматривать радиус - векторы, соответствующие точкам $f_m(i\omega)=g_m(\omega)+ih_m(\omega)$, $m=\overline{1,p}$ комплексной плоскости, образованными полиномами $f_m(z)$ при подстановке в них $z=i\omega$, т. е. концы этих радиус - векторов при изменении ω от 0 до $+\infty$ образуют годографы Михайлова [3] этих полиномов.

Пусть все полиномы семейства (1.2) принадлежат классу (n,k) - эквивалентности. Это означает, что для любых $l,j=\overline{1,p}$ радиус - векторы $f_l(i\omega)$ и $f_j(i\omega)$ при изменении ω от 0 до $+\infty$ не могут быть противоположно направлены.

Действительно, если для некоторого числа $\omega_0\in[0,+\infty)$ этот факт имеет место, то существует число $\alpha\in[0,1]$, и пара радиус - векторов с номерами l,j таких, что $\alpha f_l(i\omega_0)+(1-\alpha)f_j(i\omega_0)=0$, а это означает, что полином $\alpha f_l(z)+(1-\alpha)f_j(z)$ имеет мнимый корень $i\omega_0$, что противоречит его принадлежности классу (n,k) - эквивалентности.

Итак, мы показали, что угол между радиус - векторами $f_l(i\omega)$ и $f_j(i\omega)$, при изменении ω от 0 до $+\infty$ всегда остается меньше π. Заметим также, что эти радиус - векторы не являются нулевыми, т. к. порождены полиномами, не имеющими мнимых корней. Отсюда и из геометрических соображений (правила параллелограмма) вытекает, что радиус - вектор $\sum_{m=1}^{p}\alpha_m f_m(i\omega)$ при $\sum_{m=1}^{p}\alpha_m=1$, $\alpha_m\geq 0$ не обращается в ноль при $\omega\in[0,+\infty)$. Для этого достаточно заметить, что суммирование ненулевых радиус - векторов $f_m(i\omega)$ с неотрицательными коэффициентами α_m, угол между которыми меньше π, и, по крайней мере, один из этих коэффициентов больше нуля дает в результате ненулевой вектор.

Так как радиус - векторы $f_m(i\omega)$ образованы полиномами $f_m(z)$, принадлежащими классу (n,k) - эквивалентности, то, согласно принципу аргумента, все они поворачиваются против хода часовой стрелки при изменении ω от 0 до $+\infty$ на угол $\frac{\pi}{2}(n-2k)$, т. е. выполняются соотношения

$$Arg\, f_m(i\omega)\to\frac{\pi}{2}(n-2k)\quad\text{при}\quad\omega\to+\infty,\, m=\overline{1,p}.$$

Отсюда следует, что все радиус - векторы $\sum_{m=1}^{p}\alpha_m f_m(i\omega)$ при $\sum_{m=1}^{p}\alpha_m=1$, $\alpha_m\geq 0$ не обращаясь в ноль, также поворячиваются против хода часовой стрелки, при изменении ω от 0 до $+\infty$ на угол $\frac{\pi}{2}(n-2k)$. Так как концы этих радиус - векторов при изменении ω от 0 до $+\infty$ образуют годографы Михайлова этих полиномов, то из принципа аргумента вытекает, что семейство полиномов (1.2) принадлежит классу (n,k) - эквивалентности.
Д о к а з а т е л ь с т в о з а к о н ч е н о.

Т е о р е м а 1.2. *Семейство полиномов* (1.1) *(*(1.2)*) принадлежит классу* (n,k) *- эквивалентности в том и только в том случае, когда полиномы* $f_m(z)$, $m=\overline{1,p}$ *принадлежат классу* (n,k) *- эквивалентности и для всех вещественных корней уравнения*

$$h_j(w)g_l(w)-h_l(w)g_j(w)=0,\quad l\neq j,\quad j=\overline{1,p},\, l=\overline{1,p}. \tag{1.3}$$

справедливо неравенство

$$g_l(w)g_j(w)+h_l(w)h_j(w)>0,\quad l\neq j,\, j=\overline{1,p},\, l=\overline{1,p}, \tag{1.4}$$

где $g_m(w)$ *и* $h_m(w)$ *соответственно вещественная и мнимая часть годографа Михайлова полинома* $f_m(z)$, $m=1,2,\ldots,p$.

Д о к а з а т е л ь с т в о.

Достаточность. Пусть полиномы $f_m(z)$, $m=\overline{1,p}$ принадлежат классу (n,k) - эквивалентности, и для них выполняются условия (1.3) и (1.4). Тогда радиус - векторы $f_l(i\omega)$

и $f_j(i\omega)$, отвечающие этим полиномам, не обращаясь в нуль при изменении ω от 0 до $+\infty$ и, согласно принципу аргумента, поворачиваются против хода часовой стрелки на угол $\frac{\pi}{2}(n-2k)$.

Очевидно, что выполнение условий (1.3) означает коллинеарность этих радиус-векторов, а выполнение условий (1.4) означает, что угол между этими векторами находится в промежутке $(-\frac{\pi}{2},+\frac{\pi}{2})$, т. к. их скалярное произведение положительно. Отсюда вытекает, что при одновременном выполнении условий (1.3) и (1.4) эти радиус-векторы не могут быть противоположно направлены при любом $\omega\in[0,+\infty)$. Это означает, что радиус - векторы $\alpha f_l(i\omega)+(1-\alpha)f_j(i\omega)$ при $\alpha\in[0,1]$ не принимают нулевых значений при изменении ω от 0 до $+\infty$ и, согласно принципу аргумента, как радиус - векторы, лежащие между радиус - векторами $f_l(i\omega)$ и $f_j(i\omega)$, поворачиваются вместе с ними против хода часовой стрелки на угол $\frac{\pi}{2}(n-2k)$. Таким образом, полиномы $f_m(z)$, $m=\overline{1,p}$ принадлежат семейству (1.2), а по теореме 1 и семейству (1.1).

Необходимость. Пусть полиномы $f_m(z)$, $m=\overline{1,p}$ принадлежат семейству (1.2). Тогда, как было показано при доказательстве достаточности в теореме 1 угол между радиус - векторами $f_l(i\omega)$ и $f_j(i\omega)$ при изменении ω от 0 до $+\infty$ всегда остается меньше π, т. е. они не могу быть противоположно направлены, а это и означает, что при их коллинеарности (выполнении условий (1.3)) их скалярное произведение может быть только положительно (выполнение условий (1.4)).
Доказательство закончено.

Замечание 1.1. *Теорема 2 дает необходимые и достаточные условия того, что семейство полиномов* (1.1) *представляет собой выпуклое множество однородных неустойчивых полиномов, принадлежащих классу* (n,k) *- эквивалентности, причем полиномы* $f_m(z)$, *являются угловыми точками этого множества.*

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (пр. $\aleph 10-8-00624$**.)**

Список литературы

1. Г.А. Зеленков Н.В. Зубов В.Ф. Неронов, “Критерии существования выпуклых множеств неустойчивых многочленов -”, **17 (1)** (2005).
2. Б.Т. Поляк П.С. Щербаков, *Робастная устойчивость и управление*, Наука, М, 2002.
3. А.В. Михайлов, “Методы гармонического анализа в теории регулирования”, Автоматика и Телемеханика, **3** (1938), 27-81.
4. В.В. Дикусар Г.А. Зеленков Н.В. Зубов, *Методы анализа робастной устойчивости и неустойчивости*, Изд. ВЦ РАН, М, 2007, 234 с.
5. С.В. Зубов, *Исследование устойчивости расчетных движений*, Мобильность плюс, СПб, 2007, 158 с.
6. А.В. Зубов Н.В. Зубов, *Динамическая безопасность управляемых систем*, Изд-во НИИ Химии СПбГУ, СПб, 2009, 172 с.

The methods of building convex multitudes of coefficients stability polynom

© **A. V. Zubov** [4], **A. F. Zubova** [5], **M. V. Strecopitova** [6]

Abstract. In theory robust stability important place is employs working of criterias of existing and researches of methods to building convex multitudes coefficients stability polynomials [1,2]. Isn't important problem appears the solution this task and for instability polynomials. In giving work is supposes criterias of existing convex multitudes instability polynomials is belongs to one definite class of instability. This criteries is allows of way checking limit number of conditions, imposing on polynomials, organizes this family, is installs measures of all this family polynomial.

Key Words: polynomial, degree, material coefficient, root, class of equivalent, rectangle, radius - vector, integrated plane, parallel axis, hands of a clock, material and mystics parts, argument,collinearity secularity production

[4] Professor chair theory of control; SPbGU, t. Saint-Petersburg; ddemidova@mail.ru
[5] Professor chair theory of control; SPbGU, t. Saint-Petersburg; ddemidova@mail.ru
[6] Docent chair theory of control; SPbGU, t. Saint-Petersburg; ddemidova@mail.ru