УДК 512.831

Теорема Гамильтона-Кэли для двух вариантов матричных спектральных задач по Э.Шмидту и развертывание характеристического многочлена.

© **А. Н. Кувшинова[1], Б. В. Логинов[2]**

Аннотация. В начале прошлого столетия Э.Шмидт ввел для интегральных операторов систему собственных чисел $\{\lambda_k\}$, засчитываемых с их кратностью, и наборы собственных элементов $\{\varphi_k\}_1^\infty$, $\{\psi_k\}_1^\infty$, для которых $A\varphi_k = \lambda_k\psi_k,\ A^*\psi_k = \lambda_k\varphi_k$. В работе рассматриваются обобщенные матричные спектральные задачи, полиномиально зависящие от спектрального параметра Шмидта. И.С.Аржаных в 1951 году доказал обобщенную теорему Гамильтона-Кэли для полиномиальных матриц с единичной матрицей при старшей степени спектрального параметра с целью применения в численных методах линейной алгебры. Ниже дано распространение теоремы Гамильтона-Кэли для матричных спектральных задач по Э.Шмидту, полиномиально зависящих от спектрального параметра с единичной матрицей при старшей степени параметра (п.2), а также единичной (обратимой) матрицей при нулевой степени параметра (п.3). В целях дальнейших исследований на основе предложенного [11-13] И.С. Аржаных приема [6, 7] выполнено развертывание соответствующего (1.1) характеристического многочлена по степеням спектрального параметра Шмидта (п.5).

Ключевые слова: спектр Шмидта, собственные числа Шмидта, полиномиальные матрицы по спектральному параметру Шмидта, теорема Гамильтона-Кэли, развертывание характеристического многочлена

1. Введение

В цикле работ начала двадцатого столетия по линейным и нелинейным интегральным уравнениям [1] Э. Шмидт ввел системы собственных чисел λ_k, засчитываемых с их кратностями в гильбертовом пространстве H, и собственных элементов $\{\varphi_k\}_1^\infty$, $\{\psi_k\}_1^\infty$, удовлетворяющих соотношениям $B\varphi_k = \lambda_k\psi_k,\ B^*\psi_k = \lambda_k\varphi_k$ и позволивших распространить теорию Гильберта-Шмидта на несамосопряженные вполне непрерывные операторы в абстрактном сепарабельном гильбертовом пространстве H [2], [3]. Под названием s-чисел эта система нашла многие применения в вычислительной математике, теории некорректно поставленных задач. Поскольку никто из применявших s-числа не дает ссылок на Э.Шмидта, для восстановления справедливости в наших работах мы говорим о спектральных задачах по Э. Шмидту.

В работах И.С.Аржаных [4], [5], совместных его статьях с В.И. Гугниной [6], [7] и диссертации В.И. Гугниной [8] доказаны варианты теоремы Гамильтона-Кэли для матриц полиномиально зависящих от спектрального параметра с единичной матрицей при старшей его степени, с целями приложений к вычислительным методам линейной алгебры (распространение методов Крылова, Леверрье и Фаддеева для вычисления собственных значений), а также к теории устойчивости решений ОДУ [9], [10].

В статье [11] доказана обобщенная теорема Гамильтона-Кэли для полиномиальных матриц с единичной матрицей при нулевой степени параметра.

[1] Аспирант кафедры «Высшая математика», Ульяновский государственный технический университет, г. Ульяновск; erasya7@rambler.ru.

[2] Профессор кафедры высшей математики, Ульяновский государственный технический университет, г. Ульяновск; bvllbv@yandex.ru.

В этой работе дано распространение теоремы Гамильтона-Кэли на матричные обобщенные спектральные задачи по Э.Шмидту вида:

$$(A_s + \lambda A_{s-1} + \lambda^2 A_{s-2} + ... + \lambda^{s-1} A_1)\varphi = \lambda^s \psi$$
$$(A_s^* + \lambda A_{s-1}^* + \lambda^2 A_{s-2}^* + ... + \lambda^{s-1} A_1^*)\psi = \lambda^s \varphi \tag{1.1}$$

и

$$(\lambda^s A_s^* + \lambda^{s-1} A_{s-1}^* + ... + \lambda^2 A_2^* + \lambda A_1^*)\varphi = \psi$$
$$(\lambda^s A_s + \lambda^{s-1} A_{s-1} + ... + \lambda^2 A_2 + \lambda A_1)\psi = \varphi. \tag{1.2}$$

В общих случаях обратимых матриц переход к спектральным задачам вида (1.1) и (1.2) выполняется обращением соответствующих матриц. Далее удобно использовать матричные обозначения, т.е. записать обобщенные задачи на собственные значения по Э.Шмидту в виде уравнений

$$\Phi(\lambda)\begin{pmatrix} \varphi \\ \psi \end{pmatrix} \equiv \left[\lambda^s \begin{pmatrix} 0 & I \\ I & 0 \end{pmatrix} - \lambda^{s-1}\begin{pmatrix} A_1 & 0 \\ 0 & A_1^* \end{pmatrix} - ... - \begin{pmatrix} A_s & 0 \\ 0 & A_s^* \end{pmatrix}\right]\begin{pmatrix} \varphi \\ \psi \end{pmatrix} =$$
$$= \left[\lambda^s \mathfrak{I} - \sum_{1\le k\le s} \lambda^{s-k}\mathfrak{a}_k\right]\begin{pmatrix} \varphi \\ \psi \end{pmatrix} = 0 \tag{1.3}$$

$$\Phi(\lambda)\begin{pmatrix} \varphi \\ \psi \end{pmatrix} \equiv \left[\begin{pmatrix} 0 & I \\ I & 0 \end{pmatrix} - \lambda\begin{pmatrix} A_1^* & 0 \\ 0 & A_1 \end{pmatrix} - ... - \lambda^s\begin{pmatrix} A_s^* & 0 \\ 0 & A_s \end{pmatrix}\right]\begin{pmatrix} \varphi \\ \psi \end{pmatrix} =$$
$$= \left[\mathfrak{I} - \sum_{1\le k< s} \lambda^{s-k}\mathfrak{b}_k\right]\begin{pmatrix} \varphi \\ \psi \end{pmatrix} = 0, \begin{pmatrix} 0 & I \\ I & 0 \end{pmatrix} = \mathfrak{I} \tag{1.4}$$

соответственно с матрицей $\mathfrak{I}$ при старшей и младшей степени λ.

При продолжении наших исследований по многопараметрическим матричным спектральным задачам Э.Шмидта [11-13] возникла необходимость развертывания соответствующего характеристического многочлена по степеням спектрального параметра. В данной статье эта задача решается на основе существенного использования эффективного приема, принадлежащего И.С. Аржаных [6, 7].

В диссертации [14] принята другая матричная запись задачи (1.1):

$$\left[\lambda^s\begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & I \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & A_s \\ A_s^* & 0 \end{pmatrix} - \lambda\begin{pmatrix} 0 & A_{s-1} \\ A_{s-1}^* & 0 \end{pmatrix} - ... - \lambda^{s-1}\begin{pmatrix} 0 & A_1 \\ A_1^* & 0 \end{pmatrix}\right]\begin{pmatrix} \varphi \\ \psi \end{pmatrix} = 0. \tag{1.5}$$

Следует заметить, что система (1.2) при переходе к характеристическим числам (делением на λ^s и заменой φ на ψ, а ψ на φ) сводится к системе (1.1).

2. Обобщенная теорема Гамильтона-Кэли задачи на собственные значения с матрицей $\mathfrak{I}$ при старшей степени λ

Следуя [6] введем символические степени матричных операторов: $\mathfrak{a}^{\cdot 0} = \begin{pmatrix} 0 & I \\ I & 0 \end{pmatrix} = \mathfrak{I}$,

$$\mathfrak{a}^{\cdot(-k)} = 0,\ \mathfrak{a}^{\cdot t} = \sum_{0<m\le t}\begin{pmatrix} 0 & I \\ I & 0 \end{pmatrix}\mathfrak{a}_m\left[\mathfrak{a}^{\cdot t-m}\right] + \begin{pmatrix} 0 & I \\ I & 0 \end{pmatrix}\mathfrak{a}_t\mathfrak{a}^{\cdot 0},\ t>0,\ \mathfrak{a}_r^{\cdot t} = \sum_{r\le m\le s}\mathfrak{a}_m\mathfrak{a}^{\cdot t-(m-r)},$$

$0 < r \leq s, t > 0$. Положим также $\varphi_t(\mathfrak{a}^{\cdot}) = \mathfrak{a}^{\cdot t} + \sum\limits_{0<m\leq t} \alpha_t \mathfrak{a}^{\cdot t-m}$, где α_t - коэффициенты характеристического полинома соответствующего $\Phi(\lambda)$, т.е. $\det\Phi(\lambda) = \lambda^{2ns} + \sum\limits_{0<t\leq 2ns} \alpha_t \lambda^{2ns-t}$.

Теорема 2.1. *(Обобщенная теорема Гамильтона-Кэли). Матрицы $\mathfrak{a}_r$, $0 < r \leq s$ удовлетворяют уравнениям:*

$$\begin{gathered}
\mathfrak{a}_1\varphi_{(2n-1)s}(\mathfrak{a}^{\cdot}) + \mathfrak{a}_2\varphi_{(2n-1)s-1}(\mathfrak{a}^{\cdot}) + ... + \mathfrak{a}_s\varphi_{(2n-2)s+1}(\mathfrak{a}^{\cdot}) + \mathbb{I}\alpha_{(2n-1)s+1} = 0 \\
\mathfrak{a}_s\varphi_{(2n-1)s}(\mathfrak{a}^{\cdot}) + \mathfrak{a}_3\varphi_{(2n-1)s-1}(\mathfrak{a}^{\cdot}) + ... + \mathfrak{a}_s\varphi_{(2n-2)s+2}(\mathfrak{a}^{\cdot}) + \mathbb{I}\alpha_{(2n-1)s+2} = 0 \\
\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\
\mathfrak{a}_{s-1}\varphi_{(2n-1)s}(\mathfrak{a}^{\cdot}) + \mathfrak{a}_{s-1}\varphi_{(2n-1)s-1}(\mathfrak{a}^{\cdot}) + \mathbb{I}\alpha_{2ns-1} = 0 \\
\mathfrak{a}_s\varphi_{(2n-1)s}(\mathfrak{a}^{\cdot}) + \mathbb{I}\alpha_{2ns} = 0,\ \mathbb{I} = \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & I \end{pmatrix}.
\end{gathered} \tag{2.1}$$

Доказательство. Пусть $\Psi(\lambda)$ - матрица, присоединенная к матрице $\Phi(\lambda)$,

$$\Phi(\lambda)\cdot\Psi(\lambda) = \mathbb{I}det\Phi(\lambda), \tag{2.2}$$

где, очевидно, что $\Psi(\lambda)\begin{pmatrix}\varphi\\ \psi\end{pmatrix} = \Bigg[\lambda^{(2n-1)s}\begin{pmatrix} 0 & I \\ I & 0\end{pmatrix} + \lambda^{(2n-1)s-1}\begin{pmatrix}\mathfrak{B}_{11}^{(1)} & \mathfrak{B}_{12}^{(1)} \\ \mathfrak{B}_{21}^{(1)} & \mathfrak{B}_{22}^{(1)}\end{pmatrix} + ... +$

$$+\lambda\begin{pmatrix}\mathfrak{B}_{11}^{((2n-1)s-1)} & \mathfrak{B}_{12}^{((2n-1)s-1)} \\ \mathfrak{B}_{21}^{((2n-1)s-1)} & \mathfrak{B}_{22}^{((2n-1)s-1)}\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}\mathfrak{B}_{11}^{((2n-1)s)} & \mathfrak{B}_{12}^{((2n-1)s)} \\ \mathfrak{B}_{21}^{((2n-1)s)} & \mathfrak{B}_{22}^{((2n-1)s)}\end{pmatrix}\Bigg]\begin{pmatrix}\varphi\\ \psi\end{pmatrix}.$$

Метод неопределенных коэффициентов приводит к следующим трем группам равенств, начиная со старшей степени параметра λ, и заканчивая первой степенью (при нулевой степени λ имеем $\mathfrak{J}^2 = \mathbb{I}$):

I группа($1 < t \leq s$):

$$\begin{pmatrix}\mathfrak{B}_{11}^{(1)} & \mathfrak{B}_{12}^{(1)} \\ \mathfrak{B}_{21}^{(1)} & \mathfrak{B}_{22}^{(1)}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & I \\ I & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix} A_1 & 0 \\ 0 & A_1^*\end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & I \\ I & 0\end{pmatrix} + \alpha_1\begin{pmatrix} 0 & I \\ I & 0\end{pmatrix} \Rightarrow \mathfrak{B}^{(1)} = \mathfrak{J}\mathfrak{a}_1\mathfrak{J} + \alpha_1\mathfrak{J}$$

$$\begin{pmatrix}\mathfrak{B}_{11}^{(2)} & \mathfrak{B}_{12}^{(2)} \\ \mathfrak{B}_{21}^{(2)} & \mathfrak{B}_{22}^{(2)}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & I \\ I & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix} A_1 & 0 \\ 0 & A_1^*\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\mathfrak{B}_{11}^{(1)} & \mathfrak{B}_{12}^{(1)} \\ \mathfrak{B}_{21}^{(1)} & \mathfrak{B}_{22}^{(1)}\end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & I \\ I & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix} A_2 & 0 \\ 0 & A_2^*\end{pmatrix}\times$$

$$\times\begin{pmatrix} 0 & I \\ I & 0\end{pmatrix} + \alpha_2\begin{pmatrix} 0 & I \\ I & 0\end{pmatrix} \Rightarrow \mathfrak{B}^{(2)} = \mathfrak{J}\mathfrak{a}_1\mathfrak{B}^{(1)} + \mathfrak{J}\mathfrak{a}_2\mathfrak{J} + \alpha_2\mathfrak{J}$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

$$\begin{pmatrix}\mathfrak{B}_{11}^{(k)} & \mathfrak{B}_{12}^{(k)} \\ \mathfrak{B}_{21}^{(k)} & \mathfrak{B}_{22}^{(k)}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & I \\ I & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix} A_1 & 0 \\ 0 & A_1^*\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\mathfrak{B}_{11}^{(k-1)} & \mathfrak{B}_{12}^{(k-1)} \\ \mathfrak{B}_{21}^{(k-1)} & \mathfrak{B}_{22}^{(k-1)}\end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & I \\ I & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix} A_2 & 0 \\ 0 & A_2^*\end{pmatrix}\times$$

$$\times\begin{pmatrix}\mathfrak{B}_{11}^{(k-2)} & \mathfrak{B}_{12}^{(k-2)} \\ \mathfrak{B}_{21}^{(k-2)} & \mathfrak{B}_{22}^{(k-2)}\end{pmatrix} + ... + \begin{pmatrix} 0 & I \\ I & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix} A_k & 0 \\ 0 & A_k^*\end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & I \\ I & 0\end{pmatrix} + \alpha_k\begin{pmatrix} 0 & I \\ I & 0\end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \mathfrak{B}^{(k)} = \mathfrak{J}\mathfrak{a}_1\mathfrak{B}^{(k-1)} + \mathfrak{J}\mathfrak{a}_2\mathfrak{B}^{(k-2)} + ... + \mathfrak{J}\mathfrak{a}_{k-1}\mathfrak{B}^{1} + \mathfrak{J}\mathfrak{a}_k\mathfrak{J} + \alpha_k\mathfrak{J}$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

$$\begin{pmatrix} \mathfrak{B}_{11}^{(s)} & \mathfrak{B}_{12}^{(s)} \\ \mathfrak{B}_{21}^{(s)} & \mathfrak{B}_{22}^{(s)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & I \\ I & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_1 & 0 \\ 0 & A_1^* \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathfrak{B}_{11}^{(s-1)} & \mathfrak{B}_{12}^{(s-1)} \\ \mathfrak{B}_{21}^{(s-1)} & \mathfrak{B}_{22}^{(s-1)} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & I \\ I & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_2 & 0 \\ 0 & A_2^* \end{pmatrix} \times$$

$$\times \begin{pmatrix} \mathfrak{B}_{11}^{(s-2)} & \mathfrak{B}_{12}^{(s-2)} \\ \mathfrak{B}_{21}^{(s-2)} & \mathfrak{B}_{22}^{(s-2)} \end{pmatrix} + \ldots + \begin{pmatrix} 0 & I \\ I & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_s & 0 \\ 0 & A_s^* \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & I \\ I & 0 \end{pmatrix} + \alpha_k \begin{pmatrix} 0 & I \\ I & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \mathfrak{B}^{(s)} = \mathfrak{J}\mathfrak{a}_1\mathfrak{B}^{(s-1)} + \mathfrak{J}\mathfrak{a}_2\mathfrak{B}^{(s-2)} + \ldots + \mathfrak{J}\mathfrak{a}_{s-1}\mathfrak{B}^1 + \mathfrak{J}\mathfrak{a}_s\mathfrak{J} + \alpha_s\mathfrak{J}$$

II группа ($s < t \leq (2n-1)s$):

$$\mathfrak{B}^{(s+1)} = \mathfrak{J}\mathfrak{a}_1\mathfrak{B}^{(s)} + \mathfrak{J}\mathfrak{a}_2\mathfrak{B}^{(s-1)} + \ldots + \mathfrak{J}\mathfrak{a}_s\mathfrak{B}^{(1)} + \alpha_{s+1}\mathfrak{J}$$

$$\mathfrak{B}^{(s+2)} = \mathfrak{J}\mathfrak{a}_1\mathfrak{B}^{(s+1)} + \mathfrak{J}\mathfrak{a}_2\mathfrak{B}^{(s)} + \ldots + \mathfrak{J}\mathfrak{a}_s\mathfrak{B}^{(2)} + \alpha_{s+2}\mathfrak{J}$$

....

$$\mathfrak{B}^{((2n-1)s-r)} = \mathfrak{J}\mathfrak{a}_1\mathfrak{B}^{((2n-1)s-r-1)} + \mathfrak{J}\mathfrak{a}_2\mathfrak{B}^{((2n-1)s-r-2)} + \ldots + \mathfrak{J}\mathfrak{a}_s\mathfrak{B}^{((2n-2)s-r)} + \alpha_{(2n-1)s-r}\mathfrak{J}$$

....

$$\mathfrak{B}^{((2n-1)s)} = \mathfrak{J}\mathfrak{a}_1\mathfrak{B}^{((2n-1)s-1)} + \mathfrak{J}\mathfrak{a}_2\mathfrak{B}^{((2n-1)s-2)} + \ldots + \mathfrak{J}\mathfrak{a}_s\mathfrak{B}^{((2n-2)s)} + \alpha_{(2n-1)s}$$

III группа ($(2n-1)s + r < t \leq 2ns,\ 0 < r \leq s$):

$$-\mathfrak{a}_1\mathfrak{B}^{((2n-1)s)} - \mathfrak{a}_2\mathfrak{B}^{((2n-1)s-1)} - \ldots - \mathfrak{a}_{s-1}\mathfrak{B}^{((2n-2)s+2)} - \mathfrak{a}_s\mathfrak{B}^{((2n-2)s+1)} = \mathbb{I}\alpha_{(2n-1)s+1}$$

$$-\mathfrak{a}_2\mathfrak{B}^{((2n-1)s)} - \mathfrak{a}_3\mathfrak{B}^{((2n-1)s-1)} - \ldots - \mathfrak{a}_{s-1}\mathfrak{B}^{((2n-2)s+3)} - \mathfrak{a}_s\mathfrak{B}^{((2n-2)s+2)} = \mathbb{I}\alpha_{(2n-1)s+2}$$

....

$$-\mathfrak{a}_{s-1}\mathfrak{B}^{((2n-1)s)} - \mathfrak{a}_s\mathfrak{B}^{((2n-1)s-1)} = \mathbb{I}\alpha_{2ns-1}$$

$$-\mathfrak{a}_s\mathfrak{B}^{((2n-1)s)} = \mathbb{I}\alpha_{2ns}$$

Первые две группы равенств определяют матрицы $\mathfrak{B}^{(t)}$, $1 < t \leq (2n-1)s$:

$$\mathfrak{B}^{(1)} = \mathfrak{J}\mathfrak{a}_1\mathfrak{J} + \alpha_1\mathfrak{J} = \mathfrak{a}^{\cdot 1} + \alpha_1\mathfrak{a}^{\cdot 0} = \varphi_1(\mathfrak{a}^{\cdot})$$

$$\mathfrak{B}^{(2)} = \mathfrak{J}\mathfrak{a}_1\mathfrak{B}^{(1)} + \mathfrak{J}\mathfrak{a}_2\mathfrak{J} + \alpha_2\mathfrak{J} = \{\mathfrak{J}\mathfrak{a}_1\}^2\mathfrak{J} + \mathfrak{J}\mathfrak{a}_1\mathfrak{J}\alpha_1 + \mathfrak{J}\mathfrak{a}_2\mathfrak{J} + \mathfrak{J}\alpha_2 =$$
$$= \mathfrak{a}^{\cdot 2} + \alpha_1\mathfrak{a}^{\cdot 1} + \alpha_2\mathfrak{a}^{\cdot 0} = \varphi_2(\mathfrak{a}^{\cdot})$$

....

$$\mathfrak{B}^{(k)} = \mathfrak{J}\mathfrak{a}_1\mathfrak{B}^{(k-1)} + \mathfrak{J}\mathfrak{a}_2\mathfrak{B}^{(k-2)} + \ldots + \alpha_k\mathfrak{J} =$$
$$= \mathfrak{a}^{\cdot k} + \alpha_1\mathfrak{a}^{\cdot k-1} + \alpha_2\mathfrak{a}^{\cdot k-2} + \ldots + \alpha_{k-1}\mathfrak{a}^{\cdot 1} + \alpha_k\mathfrak{a}^{\cdot 0} = \varphi_k(\mathfrak{a}^{\cdot})$$

....

$$\mathfrak{B}^{(s-1)} = \mathfrak{J}\mathfrak{a}_1\mathfrak{B}^{(s-2)} + \mathfrak{J}\mathfrak{a}_2\mathfrak{B}^{(s-3)} + \ldots + \alpha_{s-1}\mathfrak{J} =$$
$$= \mathfrak{a}^{\cdot s-1} + \alpha_1\mathfrak{a}^{\cdot s-2} + \alpha_2\mathfrak{a}^{\cdot s-3} + \ldots + \alpha_{s-2}\mathfrak{a}^{\cdot 1} + \alpha_{s-1}\mathfrak{a}^{\cdot 0} = \varphi_{s-1}(\mathfrak{a}^{\cdot})$$

$$\mathfrak{B}^{(s)} = \mathfrak{J}\mathfrak{a}_1\mathfrak{B}^{(s-1)} + \mathfrak{J}\mathfrak{a}_2\mathfrak{B}^{(s-2)} + \ldots + \alpha_s\mathfrak{J} =$$
$$= \mathfrak{a}^{\cdot s} + \alpha_1\mathfrak{a}^{\cdot s-1} + \alpha_2\mathfrak{a}^{\cdot s-2} + \ldots + \alpha_{s-1}\mathfrak{a}^{\cdot 1} + \alpha_s\mathfrak{a}^{\cdot 0} = \varphi_s(\mathfrak{a}^{\cdot})$$

$$\mathfrak{B}^{(s+1)} = \mathfrak{J}\mathfrak{a}_1\mathfrak{B}^{(s)} + \mathfrak{J}\mathfrak{a}_2\mathfrak{B}^{(s-1)} + \ldots + \mathfrak{J}\mathfrak{a}_s\mathfrak{B}^{(1)} + \alpha_{s+1}\mathfrak{J} =$$
$$= \mathfrak{a}^{\cdot s+1} + \alpha_1\mathfrak{a}^{\cdot s} + \alpha_2\mathfrak{a}^{\cdot s-1} + \ldots + \alpha_s\mathfrak{a}^{\cdot 1} + \alpha_{s+1}\mathfrak{a}^{\cdot 0} = \varphi_{s+1}(\mathfrak{a}^{\cdot})$$

$$\mathfrak{B}^{(s+2)} = \mathfrak{J}\mathfrak{a}_1\mathfrak{B}^{(s+1)} + \mathfrak{J}\mathfrak{a}_2\mathfrak{B}^{(s)} + \ldots + \mathfrak{J}\mathfrak{a}_s\mathfrak{B}^{(2)} + \alpha_{s+2}\mathfrak{J} =$$

$$= \mathfrak{a}^{\cdot s+2} + \alpha_1 \mathfrak{a}^{\cdot s+1} + \alpha_2 \mathfrak{a}^{\cdot s} + \ldots + \alpha_{s+1} \mathfrak{a}^{\cdot 1} + \alpha_{s+2} \mathfrak{a}^{\cdot 0} = \varphi_{s+2}(\mathfrak{a}^{\cdot})$$

....

$$\mathfrak{B}^{((2n-1)s)} = \mathfrak{J}\mathfrak{a}_1 \mathfrak{B}^{((2n-1)s-1)} + \mathfrak{J}\mathfrak{a}_2 \mathfrak{B}^{((2n-1)s-2)} + \ldots + \mathfrak{J}\mathfrak{a}_s \mathfrak{B}^{((2n-2)s)} + \alpha_{(2n-1)s}\mathfrak{J} =$$

$$= \mathfrak{a}^{\cdot(2n-1)s} + \alpha_1 \mathfrak{a}^{\cdot(2n-1)s-1} + \alpha_2 \mathfrak{a}^{\cdot(2n-1)s-2} + \ldots + \alpha_{(2n-1)s-1} \mathfrak{a}^{\cdot 1} + \alpha_{(2n-1)s} \mathfrak{a}^{\cdot 0} = \varphi_{(2n-1)s}(\mathfrak{a}^{\cdot})$$

Подстановка $\mathfrak{B}^{(1)} = \varphi_1(\mathfrak{a}^{\cdot})$, $\mathfrak{B}^{(2)} = \varphi_2(\mathfrak{a}^{\cdot})$, $\mathfrak{B}^{(3)} = \varphi_3(\mathfrak{a}^{\cdot}), \ldots, \mathfrak{B}^{((2n-1)s)} = \varphi_{(2n-1)s}(\mathfrak{a}^{\cdot})$ в третью группу формул дает равенства (2.1), т.е. обобщенную теорему Гамильтона-Кэли. □

С л е д с т в и е 2.1. *(Явный вид теоремы Гамильтона-Кэли.) Матрицы* $\mathfrak{a}_r$, $0 < r \le s$ *удовлетворяют уравнениям:*

$$\mathfrak{a}_1^{\cdot(2n-1)s} + \alpha_1 \mathfrak{a}_1^{\cdot(2n-1)s-1} + \alpha_2 \mathfrak{a}_1^{\cdot(2n-1)s-2} + \ldots + \alpha_{(2n-1)s-1} \mathfrak{a}_1^{\cdot 1} + \mathfrak{J}\alpha_{(2n-1)s+1} = 0$$

$$\mathfrak{a}_2^{\cdot(2n-1)s} + \alpha_1 \mathfrak{a}_2^{\cdot(2n-1)s-1} + \alpha_2 \mathfrak{a}_2^{\cdot(2n-1)s-2} + \ldots + \alpha_{(2n-1)s-1} \mathfrak{a}_2^{\cdot 1} + \mathfrak{J}\alpha_{(2n-1)s+2} = 0$$

....

$$\mathfrak{a}_{s-1}^{\cdot(2n-1)s} + \alpha_1 \mathfrak{a}_{s-1}^{\cdot(2n-1)s-1} + \alpha_2 \mathfrak{a}_{s-1}^{\cdot(2n-1)s-2} + \ldots + \alpha_{(2n-1)s-1} \mathfrak{a}_{s-1}^{\cdot 1} + \mathfrak{J}\alpha_{2ns-1} = 0$$

$$\mathfrak{a}_s^{\cdot(2n-1)s} + \alpha_1 \mathfrak{a}_s^{\cdot(2n-1)s-1} + \alpha_2 \mathfrak{a}_s^{\cdot(2n-1)s-2} + \ldots + \alpha_{(2n-1)s-1} \mathfrak{a}_s^{\cdot 1} + \mathfrak{J}\alpha_{2ns} = 0. \qquad (2.3)$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Для $0 < r \le s$ имеем:

$$0 = \mathfrak{a}_1 \mathfrak{B}^{((2n-1)s)} + \mathfrak{a}_2 \mathfrak{B}^{((2n-1)s-1)} + \ldots + \mathfrak{a}_{s-1} \mathfrak{B}^{((2n-2)s+2)} + \mathfrak{a}_s \mathfrak{B}^{((2n-2)s+1)} + \mathbb{I}\alpha_{(2n-1)s+1} =$$

$$= \mathfrak{a}_1 \left[\mathfrak{a}^{\cdot(2n-1)s} + \alpha_1 \mathfrak{a}^{\cdot(2n-1)s-1} + \alpha_2 \mathfrak{a}^{\cdot(2n-1)s-2} + \ldots + \alpha_{(2n-1)s-1} \mathfrak{a}^{\cdot 1} + \alpha_{(2n-1)s} \mathfrak{a}^{\cdot 0}\right] +$$

$$+ \mathfrak{a}_2 \left[\mathfrak{a}^{\cdot(2n-1)s-1} + \alpha_1 \mathfrak{a}^{\cdot(2n-1)s-2} + \alpha_2 \mathfrak{a}^{\cdot(2n-1)s-3} + \ldots + \alpha_{(2n-1)s-2} \mathfrak{a}^{\cdot 1} + \alpha_{(2n-1)s-1} \mathfrak{a}^{\cdot 0}\right] +$$

$$+ \ldots + \mathfrak{a}_s \left[\mathfrak{a}^{\cdot(2n-2)s+1} + \alpha_1 \mathfrak{a}^{\cdot(2n-2)s} + \ldots + \alpha_{(2n-2)s} \mathfrak{a}^{\cdot 1} + \alpha_{(2n-1)s+1} \mathfrak{a}^{\cdot 0}\right] + \mathbb{I}\alpha_{(2n-1)s+1} =$$

$$= \left[\mathfrak{a}_1 \mathfrak{a}^{\cdot(2n-1)s} + \mathfrak{a}_2 \mathfrak{a}^{\cdot(2n-1)s-1} + \ldots + \mathfrak{a}_{s-1} \mathfrak{a}^{\cdot(2n-2)s+2} + \mathfrak{a}_s \mathfrak{a}^{\cdot(2n-2)s+1}\right] +$$

$$+ \alpha_1 \left[\mathfrak{a}_1 \mathfrak{a}^{\cdot(2n-1)s-1} + \mathfrak{a}_2 \mathfrak{a}^{\cdot(2n-1)s-2} + \ldots + \mathfrak{a}_{s-1} \mathfrak{a}^{\cdot(2n-2)s+1} + \mathfrak{a}_s \mathfrak{a}^{\cdot(2n-2)s}\right] +$$

$$+ \alpha_2 \left[\mathfrak{a}_1 \mathfrak{a}^{\cdot(2n-1)s-2} + \mathfrak{a}_2 \mathfrak{a}^{\cdot(2n-1)s-3} + \ldots + \mathfrak{a}_{s-1} \mathfrak{a}^{\cdot(2n-2)s} + \mathfrak{a}_s \mathfrak{a}^{\cdot(2n-2)s-1}\right] + \ldots +$$

$$+ \alpha_{(2n-1)s-1} \left[\mathfrak{a}_1 \mathfrak{a}^{\cdot 1} + \mathfrak{a}_2 \mathfrak{a}^{\cdot 0}\right] + \mathbb{I}\alpha_{(2n-1)s+1} =$$

$$= \mathfrak{J} \left[\mathfrak{a}_1 \mathfrak{a}^{\cdot(2n-1)s} + \mathfrak{a}_2 \mathfrak{a}^{\cdot(2n-1)s-1} + \ldots + \mathfrak{a}_{s-1} \mathfrak{a}^{\cdot(2n-2)s+2} + \mathfrak{a}_s \mathfrak{a}^{\cdot(2n-2)s+1}\right] +$$

$$+ \mathfrak{J}\alpha_1 \left[\mathfrak{a}_1 \mathfrak{a}^{\cdot(2n-1)s-1} + \mathfrak{a}_2 \mathfrak{a}^{\cdot(2n-1)s-2} + \ldots + \mathfrak{a}_{s-1} \mathfrak{a}^{\cdot(2n-2)s+1} + \mathfrak{a}_s \mathfrak{a}^{\cdot(2n-2)s}\right] +$$

$$+ \ldots + \mathfrak{J}\alpha_{(2n-1)s-1} \left[\mathfrak{a}_1 \mathfrak{a}^{\cdot 1} + \mathfrak{a}_2 \mathfrak{a}^{\cdot 0}\right] + \mathfrak{J}\alpha_{(2n-1)s+1} =$$

$$= \mathfrak{a}_1^{\cdot(2n-1)s} + \alpha_1 \mathfrak{a}_1^{\cdot(2n-1)s-1} + \alpha_2 \mathfrak{a}_1^{\cdot(2n-1)s-2} + \ldots + \alpha_{(2n-1)s-1} \mathfrak{a}_1^{\cdot 1} + \mathfrak{J}\alpha_{(2n-1)s+1}$$

$$0 = \mathfrak{a}_2 \mathfrak{B}^{((2n-1)s)} + \mathfrak{a}_3 \mathfrak{B}^{((2n-1)s-1)} + \ldots + \mathfrak{a}_{s-1} \mathfrak{B}^{((2n-2)s+3)} + \mathfrak{a}_s \mathfrak{B}^{((2n-2)s+2)} + \mathbb{I}\alpha_{(2n-1)s+2} =$$

$$= \mathfrak{a}_2 \left[\mathfrak{a}^{\cdot(2n-1)s} + \alpha_1 \mathfrak{a}^{\cdot(2n-1)s-1} + \alpha_2 \mathfrak{a}^{\cdot(2n-1)s-2} + \ldots + \alpha_{(2n-1)s-1} \mathfrak{a}^{\cdot 1} + \alpha_{(2n-1)s} \mathfrak{a}^{\cdot 0}\right] +$$

$$+ \mathfrak{a}_3 \left[\mathfrak{a}^{\cdot(2n-1)s-1} + \alpha_1 \mathfrak{a}^{\cdot(2n-1)s-2} + \alpha_2 \mathfrak{a}^{\cdot(2n-1)s-3} + \ldots + \alpha_{(2n-1)s-2} \mathfrak{a}^{\cdot 1} + \alpha_{(2n-1)s-1} \mathfrak{a}^{\cdot 0}\right] +$$

$$+ \ldots + \mathfrak{a}_s \left[\mathfrak{a}^{\cdot(2n-2)s+2} + \alpha_1 \mathfrak{a}^{\cdot(2n-2)s+1} + \ldots + \alpha_{(2n-2)s+1} \mathfrak{a}^{\cdot 1} + \alpha_{(2n-2)s+2} \mathfrak{a}^{\cdot 0}\right] + \mathbb{I}\alpha_{(2n-1)s+2} =$$

$$= \left[\mathfrak{a}_2 \mathfrak{a}^{\cdot(2n-1)s} + \mathfrak{a}_3 \mathfrak{a}^{\cdot(2n-1)s-1} + \ldots + \mathfrak{a}_{s-1} \mathfrak{a}^{\cdot(2n-2)s+3} + \mathfrak{a}_s \mathfrak{a}^{\cdot(2n-2)s+2}\right] +$$

$$+\alpha_1\left[\mathfrak{a}_2\mathfrak{a}^{\cdot(2n-1)s-1}+\mathfrak{a}_3\mathfrak{a}^{\cdot(2n-1)s-2}+\ldots+\mathfrak{a}_{s-1}\mathfrak{a}^{\cdot(2n-2)s+2}+\mathfrak{a}_s\mathfrak{a}^{\cdot(2n-2)s+1}\right]+\ldots+$$
$$+\alpha_{(2n-1)s-1}\left[\mathfrak{a}_2\mathfrak{a}^{\cdot 1}+\mathfrak{a}_3\mathfrak{a}^{\cdot 0}\right]+\mathbb{I}\alpha_{(2n-1)s+2}=$$
$$=\mathfrak{I}\left[\mathfrak{a}_2\mathfrak{a}^{\cdot(2n-1)s}+\mathfrak{a}_3\mathfrak{a}^{\cdot(2n-1)s-1}+\ldots+\mathfrak{a}_{s-1}\mathfrak{a}^{\cdot(2n-2)s+3}+\mathfrak{a}_s\mathfrak{a}^{\cdot(2n-2)s+2}\right]+$$
$$+\mathfrak{I}\alpha_1\left[\mathfrak{a}_2\mathfrak{a}^{\cdot(2n-1)s-1}+\mathfrak{a}_3\mathfrak{a}^{\cdot(2n-1)s-2}+\ldots+\mathfrak{a}_{s-1}\mathfrak{a}^{\cdot(2n-2)s+2}+\mathfrak{a}_s\mathfrak{a}^{\cdot(2n-2)s+1}\right]+$$
$$+\ldots+\mathfrak{I}\alpha_{(2n-1)s-1}\left[\mathfrak{a}_2\mathfrak{a}^{\cdot 1}+\mathfrak{a}_3\mathfrak{a}^{\cdot 0}\right]+\mathfrak{I}\alpha_{(2n-1)s+2}=$$
$$=\mathfrak{a}_2^{\cdot(2n-1)s}+\alpha_1\mathfrak{a}_2^{\cdot(2n-1)s-1}+\alpha_2\mathfrak{a}_2^{\cdot(2n-1)s-2}+\ldots+\alpha_{(2n-1)s-1}\mathfrak{a}_2^{\cdot 1}+\mathfrak{I}\alpha_{(2n-1)s+2}$$

....

$$0=\mathfrak{a}_s\mathfrak{B}^{((2n-1)s)}+\mathbb{I}\alpha_{2ns}=$$
$$=\mathfrak{a}_s\left[\mathfrak{a}^{\cdot(2n-1)s}+\alpha_1\mathfrak{a}^{\cdot(2n-1)s-1}+\alpha_2\mathfrak{a}^{\cdot(2n-1)s-2}+\ldots+\alpha_{(2n-1)s-1}\mathfrak{a}^{\cdot 1}+\alpha_{(2n-1)s}\mathfrak{a}^{\cdot}\right]+$$
$$+\mathbb{I}\alpha_{2ns}=\mathfrak{a}_s\mathfrak{a}^{\cdot(2n-1)s}+\alpha_1\mathfrak{a}_s\mathfrak{a}^{\cdot(2n-1)s-1}+\ldots+\alpha_{(2n-1)s-1}\mathfrak{a}_s\mathfrak{a}^{\cdot 1}+\mathbb{I}\alpha_{2ns}=$$
$$=\mathfrak{I}\mathfrak{a}_s\mathfrak{a}^{\cdot(2n-1)s}+\mathfrak{I}\alpha_1\mathfrak{a}_s\mathfrak{a}^{\cdot(2n-1)s-1}+\ldots+\mathfrak{I}\alpha_{(2n-1)s-1}\mathfrak{a}_s\mathfrak{a}^{\cdot 1}+\mathfrak{I}\alpha_{2ns}=$$
$$=\mathfrak{a}_s^{\cdot(2n-1)s}+\alpha_1\mathfrak{a}_s^{\cdot(2n-1)s-1}+\alpha_2\mathfrak{a}_s^{\cdot(2n-1)s-2}+\ldots+\alpha_{(2n-1)s-1}\mathfrak{a}_s^{\cdot 1}+\mathfrak{I}\alpha_{2ns}.\ \square$$

З а м е ч а н и е 2.1. *Вместо тождества (2.2) можно использовать тождество*

$$\Psi(\lambda)\Phi(\lambda)=\mathbb{I}det\Phi(\lambda) \tag{2.4}$$

На этом пути возникают символические степени матриц ${}^{\cdot}\mathfrak{a}^0=\begin{pmatrix}0 & I\\ I & 0\end{pmatrix}=\mathfrak{I}$, ${}^{\cdot}\mathfrak{a}^{(-t)}=0$, ${}^{\cdot}\mathfrak{a}^{(t)}=\sum\limits_{0<m\leq t}{}^{\cdot}\mathfrak{a}^{(t-m)}\mathfrak{a}_m\mathfrak{I}+{}^{\cdot}\mathfrak{a}^0\mathfrak{a}_t\mathfrak{I}$, $t>0$, ${}^{\cdot}\mathfrak{a}_r^t=\sum\limits_{r\leq m\leq s}{}^{\cdot}\mathfrak{a}_r^{t-(m-r)}\mathfrak{a}_m$, $0<r\leq s$, $t>0$, позволяющие сформулировать аналоги теоремы 2.1. и следствия 2.1.

Т е о р е м а 2.2. *Матрицы* $\mathfrak{a}_r$, $0<r\leq s$ *удовлетворяют уравнениям:*

$$\mathfrak{a}_1\varphi_{(2n-1)s}({}^{\cdot}\mathfrak{a})+\mathfrak{a}_2\varphi_{(2n-1)s-1}({}^{\cdot}\mathfrak{a})+\ldots+\mathfrak{a}_s\varphi_{(2n-2)s+1}({}^{\cdot}\mathfrak{a})+\mathbb{I}\alpha_{(2n-1)s+1}=0$$
$$\mathfrak{a}_s\varphi_{(2n-1)s}({}^{\cdot}\mathfrak{a})+\mathfrak{a}_3\varphi_{(2n-1)s-1}({}^{\cdot}\mathfrak{a})+\ldots+\mathfrak{a}_s\varphi_{(2n-2)s+2}({}^{\cdot}\mathfrak{a})+\mathbb{I}\alpha_{(2n-1)s+2}=0$$

.... (2.5)

$$\mathfrak{a}_{s-1}\varphi_{(2n-1)s}({}^{\cdot}\mathfrak{a})+\mathfrak{a}_{s-1}\varphi_{(2n-1)s-1}({}^{\cdot}\mathfrak{a})+\mathbb{I}\alpha_{2ns-1}=0$$
$$\mathfrak{a}_s\varphi_{(2n-1)s}({}^{\cdot}\mathfrak{a})+\mathbb{I}\alpha_{2ns}=0.$$

С л е д с т в и е 2.1. *Матрицы* $\mathfrak{a}_r$, $0<r\leq s$ *удовлетворяют уравнениям:*

$${}^{\cdot}\mathfrak{a}_1^{(2n-1)s}+\alpha_1{}^{\cdot}\mathfrak{a}_1^{(2n-1)s-1}+\alpha_2{}^{\cdot}\mathfrak{a}_1^{(2n-1)s-2}+\ldots+\alpha_{(2n-1)s-1}{}^{\cdot}\mathfrak{a}_1^1+\mathfrak{I}\alpha_{(2n-1)s+1}=0$$
$${}^{\cdot}\mathfrak{a}_2^{(2n-1)s}+\alpha_1{}^{\cdot}\mathfrak{a}_2^{(2n-1)s-1}+\alpha_2{}^{\cdot}\mathfrak{a}_2^{(2n-1)s-2}+\ldots+\alpha_{(2n-1)s-1}{}^{\cdot}\mathfrak{a}_2^1+\mathfrak{I}\alpha_{(2n-1)s+2}=0$$

....

$${}^{\cdot}\mathfrak{a}_{s-1}^{(2n-1)s}+\alpha_1{}^{\cdot}\mathfrak{a}_{s-1}^{(2n-1)s-1}+\alpha_2{}^{\cdot}\mathfrak{a}_{s-1}^{(2n-1)s-2}+\ldots+\alpha_{(2n-1)s-1}{}^{\cdot}\mathfrak{a}_{s-1}^1+\mathfrak{I}\alpha_{2ns-1}=0$$
$${}^{\cdot}\mathfrak{a}_s^{(2n-1)s}+\alpha_1{}^{\cdot}\mathfrak{a}_s^{(2n-1)s-1}+\alpha_2{}^{\cdot}\mathfrak{a}_s^{(2n-1)s-2}+\ldots+\alpha_{(2n-1)s-1}{}^{\cdot}\mathfrak{a}_s^1+\mathfrak{I}\alpha_{2ns}=0. \tag{2.6}$$

3. Обобщенная теорема Гамильтона-Кэли задачи на собственные значения с матрицей $\mathfrak{I}$ при младшей степени λ

Подобно п.2 вводя символические степени матричных операторов $\mathfrak{a}^{\cdot 0} = \mathfrak{b}^{\cdot 0}$, $\mathfrak{b}_t = \begin{pmatrix} A_t^* & 0 \\ 0 & A_t \end{pmatrix}$, $\mathfrak{b}^{\cdot(-k)} = 0, \mathfrak{b}^{\cdot t} = \sum\limits_{0<m\leq t} \mathfrak{I}\mathfrak{b}_m \mathfrak{b}^{\cdot t-m} + \mathfrak{I}\mathfrak{b}_t \mathfrak{b}^{\cdot 0},\ t>0,\ \mathfrak{b}_r^{\cdot t} = \sum\limits_{r\leq m\leq s} \mathfrak{b}_m \mathfrak{b}^{\cdot t-(m-r)},\ 0<r\leq s,\ t>0$, и матрицу $\Psi(\lambda)$ присоединенную к матрице $\Phi(\lambda)$ при использовании тождества (1.4), доказывается теорема 3.1.

Т е о р е м а 3.1. *Матрицы* $\mathfrak{b}_r$, $0<r\leq s$ *удовлетворяют уравнениям:*

$$\begin{gathered}
\mathfrak{b}_1\varphi_{(2n-1)s}(\mathfrak{b}^{\cdot}) + \mathfrak{b}_2\varphi_{(2n-1)s-1}(\mathfrak{b}^{\cdot}) + ... + \mathfrak{b}_s\varphi_{(2n-2)s+1}(\mathfrak{b}^{\cdot}) + \mathbb{I}\alpha_{(2n-1)s+1} = 0 \\
\mathfrak{b}_s\varphi_{(2n-1)s}(\mathfrak{b}^{\cdot}) + \mathfrak{b}_3\varphi_{(2n-1)s-1}(\mathfrak{b}^{\cdot}) + ... + \mathfrak{b}_s\varphi_{(2n-2)s+2}(\mathfrak{b}^{\cdot}) + \mathbb{I}\alpha_{(2n-1)s+2} = 0 \\
\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\
\mathfrak{b}_{s-1}\varphi_{(2n-1)s}(\mathfrak{b}^{\cdot}) + \mathfrak{b}_{s-1}\varphi_{(2n-1)s-1}(\mathfrak{b}^{\cdot}) + \mathbb{I}\alpha_{2ns-1} = 0 \\
\mathfrak{b}_s\varphi_{(2n-1)s}(\mathfrak{b}^{\cdot}) + \mathbb{I}\alpha_{2ns} = 0.
\end{gathered} \tag{3.1}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. В тождестве (2.2) матрица $\Psi(\lambda)$ и $\det\Phi(\lambda)$ имеют вид:

$$\Psi(\lambda)\begin{pmatrix}\varphi\\ \psi\end{pmatrix} = \left[\begin{pmatrix} 0 & I \\ I & 0\end{pmatrix} + \lambda\begin{pmatrix}\mathfrak{B}_{11}^{(1)} & \mathfrak{B}_{12}^{(1)} \\ \mathfrak{B}_{21}^{(1)} & \mathfrak{B}_{22}^{(1)}\end{pmatrix} + \lambda^2\begin{pmatrix}\mathfrak{B}_{11}^{(2)} & \mathfrak{B}_{12}^{(2)} \\ \mathfrak{B}_{21}^{(2)} & \mathfrak{B}_{22}^{(2)}\end{pmatrix} + ... + \right.$$

$$\left. + \lambda^{(2n-1)s-1}\begin{pmatrix}\mathfrak{B}_{11}^{((2n-1)s-1)} & \mathfrak{B}_{12}^{((2n-1)s-1)} \\ \mathfrak{B}_{21}^{((2n-1)s-1)} & \mathfrak{B}_{22}^{((2n-1)s-1)}\end{pmatrix} + \lambda^{(2n-1)s}\begin{pmatrix}\mathfrak{B}_{11}^{((2n-1)s)} & \mathfrak{B}_{12}^{((2n-1)s)} \\ \mathfrak{B}_{21}^{((2n-1)s)} & \mathfrak{B}_{22}^{((2n-1)s)}\end{pmatrix}\right]\begin{pmatrix}\varphi\\ \psi\end{pmatrix}$$

$$\det\Phi(\lambda) = 1 + \alpha_1\lambda + \alpha_2\lambda^2 + ... + \alpha_{2ns-1}\lambda^{2ns-1} + \alpha_{2ns}\lambda^{2ns}.$$

Метод неопределенных коэффициентов дает три группы равенств соответственно от первой степени до степени $2ns$ параметра λ. При этом матрицы $\mathfrak{B}^{(1)}, \mathfrak{B}^{(2)}, ..., \mathfrak{B}^{(s)}, \mathfrak{B}^{(s+1)}, ..., \mathfrak{B}^{((2n-1)s)}$ представляются теми же самыми формулами п.2, где $\mathfrak{a}_t$ следует заменить на $\mathfrak{b}_t$. Их подстановка в третью группу формул доказывает теорему 3.1.

С л е д с т в и е 3.1. *(Явный вид теоремы Гамильтона-Кэли.) Матрицы* $\mathfrak{b}_r$, $0<r\leq s$ *удовлетворяют уравнениям:*

$$\begin{gathered}
\mathfrak{b}_1^{\cdot(2n-1)s} + \alpha_1\mathfrak{b}_1^{\cdot(2n-1)s-1} + \alpha_2\mathfrak{b}_1^{\cdot(2n-1)s-2} + ... + \alpha_{(2n-1)s-1}\mathfrak{b}_1^{\cdot 1} + \mathfrak{I}\alpha_{(2n-1)s+1} = 0 \\
\mathfrak{b}_2^{\cdot(2n-1)s} + \alpha_1\mathfrak{b}_2^{\cdot(2n-1)s-1} + \alpha_2\mathfrak{b}_2^{\cdot(2n-1)s-2} + ... + \alpha_{(2n-1)s-1}\mathfrak{b}_2^{\cdot 1} + \mathfrak{I}\alpha_{(2n-1)s+2} = 0 \\
\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\
\mathfrak{b}_{s-1}^{\cdot(2n-1)s} + \alpha_1\mathfrak{b}_{s-1}^{\cdot(2n-1)s-1} + \alpha_2\mathfrak{b}_{s-1}^{\cdot(2n-1)s-2} + ... + \alpha_{(2n-1)s-1}\mathfrak{b}_{s-1}^{\cdot 1} + \mathfrak{I}\alpha_{2ns-1} = 0 \\
\mathfrak{b}_s^{\cdot(2n-1)s} + \alpha_1\mathfrak{b}_s^{\cdot(2n-1)s-1} + \alpha_2\mathfrak{b}_s^{\cdot(2n-1)s-2} + ... + \alpha_{(2n-1)s-1}\mathfrak{b}_s^{\cdot 1} + \mathfrak{I}\alpha_{2ns} = 0.
\end{gathered} \tag{3.2}$$

З а м е ч а н и е 3.1. *При использовании равенства* $\Psi(\lambda)\Phi(\lambda) = \mathbb{I}det\Phi(\lambda)$ *получаем явный вид теоремы Гамильтона-Кэли с символическими степенями вида:* ${}^{\cdot}\mathfrak{b}^0 = \begin{pmatrix} 0 & I \\ I & 0\end{pmatrix} = \mathfrak{I}$, ${}^{\cdot}\mathfrak{b}^{(-t)} = 0$, ${}^{\cdot}\mathfrak{b}^{(t)} = \sum\limits_{0<m\leq t} {}^{\cdot}\mathfrak{b}^{(t-m)}\mathfrak{b}_m\mathfrak{I} + {}^{\cdot}\mathfrak{b}^0\mathfrak{b}_t\mathfrak{I},\ t>0,\ {}^{\cdot}\mathfrak{b}_r^t = \sum\limits_{r\leq m\leq s} {}^{\cdot}\mathfrak{b}_r^{t-(m-r)}\mathfrak{b}_m,\ 0<r\leq s,\ t>0$.

4. Вычисление инвариантных коэффициентов характеристического уравнения при линейной зависимости от спектрального параметра

4.1. Спектральная задача $A-\lambda\mathrm{I}$

Вычисление коэффициентов (инвариантов) i_k относительно замены базиса в n-мерном пространстве E^n характеристического уравнения $det(A-\lambda\mathrm{I})=0$ приводится здесь с целью рассмотрения простейших задач на спектр Шмидта вида: $(\mathfrak{a}-\lambda\mathfrak{I})(\varphi,\psi)^{\mathrm{T}}=0$ и $(\mathfrak{b}-\lambda\mathfrak{I})(\varphi,\psi)^{\mathrm{T}}=0$. При этом существенно используются результаты работы [15], основанные на следующем утверждении.

Л е м м а 4.1. *Для любого матричного многочлена $F(\lambda)$ степени n справедливо равенство*

$$\frac{d}{d\lambda}\det F(\lambda)=\det F(\lambda)tr\left[F^{-1}(\lambda)F'(\lambda)\right] \tag{4.1}$$

Применяя лемму 4.1. к $F(\lambda)=A-\lambda\mathrm{I}, F'(\lambda)=-\mathrm{I}, \det F(\lambda)=(-1)^n\lambda^n+\sum\limits_{k=1}^{n}(-1)^{n-k}i_k\lambda^{n-k}$, можно записать

$$\frac{d}{d\lambda}\det F(\lambda)=-(\det F(\lambda))tr\left[(A-\lambda\mathrm{I})^{-1}\right]=-(\det F(\lambda))tr\left[(-\lambda)(\mathrm{I}-\lambda^{-1}A)\right]^{-1}=$$

$$=\frac{1}{\lambda}\det F(\lambda)tr\left[\left(\mathrm{I}-\lambda^{-1}A\right)^{-1}\right].$$

Таким образом

$$\lambda\frac{d}{d\lambda}\det F(\lambda)=(-1)^n n\lambda^n+(-1)^{n-1}(n-1)i_1\lambda^{n-1}+...+(-1)^2 2i_{n-2}\lambda^2-i_{n-1}\lambda=$$

$$=\left[(-1)^n\lambda^n+(-1)^{n-1}i_1\lambda^{n-1}+...+(-1)^{n-k}i_k\lambda^{n-k}+...+(-1)^2 i_{n-2}\lambda^2-i_{n-1}\lambda+i_n\right]\times$$
$$\times\left[n+\lambda^{-1}trA+\lambda^{-2}trA^2+...+\lambda^{-s}trA^s+...\right]. \tag{4.2}$$

Метод неопределенных коэффициентов приводит к следующей группе формул:

$$\begin{gathered}
(-1)^n n=(-1)^n n\\
(-1)^{n-1}(n-1)i_1=(-1)^n trA+(-1)^{n-1}i_1 n\\
(-1)^{n-2}(n-2)i_2=(-1)^n trA^2+(-1)^{n-1}i_1 trA+(-1)^{n-2}i_2 n\\
\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\\
(-1)^{n-k}(n-k)i_k=(-1)^n trA^k+(-1)^{n-1}i_1 trA^{k-1}+...+(-1)^{n-k+1}i_{k-1}trA+(-1)^{n-k}i_k n\\
\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\\
(-1)^2 2i_{n-2}=(-1)^n trA^{n-2}+(-1)^{n-1}i_1 trA^{n-3}+...+(-1)^3 i_{n-3}trA+(-1)^2 i_{n-2}n\\
-i_{n-1}=(-1)^n trA^{n-1}+(-1)^{n-1}i_1 trA^{n-2}+...+(-1)^2 i_{n-2}trA-i_{n-1}n\\
0=(-1)^n trA^n+(-1)^{n-1}i_1 trA^{n-1}+...-i_{n-1}trA+i_n n,
\end{gathered} \tag{4.3}$$

из которой определяются инварианты $i_1, i_2, ..., i_8, ...$:

$$i_1=trA$$

$$i_2 = \frac{1}{2!}i_1^2 - \frac{1}{2}trA^2$$

$$i_3 = \frac{1}{3!}i_1^3 - \frac{1}{2}i_1 trA^2 + \frac{1}{3}trA^3$$

$$i_4 = \frac{1}{4!}i_1^4 - \frac{1}{2^2}i_1^2 trA^2 + \frac{1}{3}i_1 trA^3 + \frac{1}{2^3}\left(trA^2\right)^2 - \frac{1}{4}trA^4$$

$$i_5 = \frac{1}{5!}i_1^5 - \frac{1}{2^2\cdot 3}i_1^3 trA^2 + \frac{1}{2^3}i_1\left(trA^2\right)^2 + \frac{1}{2\cdot 3}i_1^2 trA^3 - \frac{1}{2^2}i_1 trA^4 - \frac{1}{2\cdot 3}trA^2 trA^3 + \frac{1}{5}trA^5$$

$$i_6 = \frac{1}{6!}i_1^6 - \frac{1}{2^4\cdot 3}i_1^4 trA^2 + \frac{1}{2^4}i_1^2\left(trA^2\right)^2 + \frac{1}{2\cdot 3^2}i_1^3 trA^3 - \frac{1}{2^3}i_1^2 trA^4 + \frac{1}{5}i_1 trA^5 + \frac{1}{2^3}trA^2 trA^4 -$$

$$-\frac{1}{2\cdot 3}i_1 trA^2 trA^3 - \frac{1}{2^4\cdot 3}\left(trA^2\right)^3 + \frac{1}{2\cdot 3^2}\left(trA^3\right)^2 - \frac{1}{2\cdot 3}trA^6$$

$$i_7 = \frac{1}{7!}i_1^7 - \frac{1}{2^4\cdot 3\cdot 5}i_1^5 trA^2 + \frac{1}{2^4\cdot 3}i_1^3\left(trA^2\right)^2 + \frac{1}{2^3\cdot 3^2}i_1^4 trA^3 - \frac{1}{2^3\cdot 3}i_1^3 trA^4 + \frac{1}{2\cdot 5}i_1^2 trA^5 +$$

$$+\frac{1}{2^3}i_1 trA^2 trA^4 - \frac{1}{2^2\cdot 3}i_1^2 trA^2 trA^3 - \frac{1}{2^4\cdot 3}i_1\left(trA^2\right)^3 + \frac{1}{2\cdot 3^2}i_1\left(trA^3\right)^2 - \frac{1}{2\cdot 3}i_1 trA^6 -$$

$$-\frac{1}{2\cdot 5}trA^2 trA^5 - \frac{1}{2^2\cdot 3}trA^3 trA^4 + \frac{1}{2^3\cdot 3}\left(trA^2\right)^2 trA^3 - \frac{1}{7}trA^7$$

$$i_8 = \frac{1}{8!}i_1^8 - \frac{1}{2^5\cdot 3^2\cdot 5}i_1^6 trA^2 + \frac{1}{2^6\cdot 3}i_1^4\left(trA^2\right)^2 + \frac{1}{2^3\cdot 3^2\cdot 5}i_1^5 trA^3 - \frac{1}{2^5\cdot 3}i_1^4 trA^4 + \frac{1}{2\cdot 3\cdot 5}i_1^3 trA^5$$

$$+\frac{1}{2^4}i_1^2 trA^2 trA^4 - \frac{1}{2^2\cdot 3^2}i_1^3 trA^2 trA^3 - \frac{1}{2^5\cdot 3}i_1^2\left(trA^2\right)^3 + \frac{1}{2^2\cdot 3^2}i_1^2\left(trA^3\right)^2 - \frac{1}{2^2\cdot 3}i_1^2 trA^6 +$$

$$+\frac{1}{2^3\cdot 3}i_1\left(trA^2\right)^2 trA^3 - \frac{1}{2\cdot 5}i_1 trA^2 trA^5 - \frac{1}{2^2\cdot 3}i_1 trA^3 trA^4 + \frac{1}{7}i_1 trA^7 - \frac{1}{2^5}\left(trA^2\right)^2 trA^4 +$$

$$+\frac{1}{2^7\cdot 3}\left(trA^2\right)^4 - \frac{1}{2^2\cdot 3^2}trA^2\left(trA^3\right)^2 + \frac{1}{2^2\cdot 3}trA^2 trA^6 + \frac{1}{3\cdot 5}trA^3 trA^5 + \frac{1}{2^5}\left(trA^4\right)^2 - \frac{1}{8}trA^8$$

....

Однако получить формулу общего вида инвариантов на этом пути не удалось. Тем не менее, формулы (4.2) могут служить основой компьютерного моделирования по вычислению коэффициентов $\det F(\lambda)$ - инвариантов i_k.

5. Определение коэффициентов характеристического многочлена

Рассматривается матричная обобщенная спектральная задача по Э. Шмидту (1.1), которую для получения стандартной записи характеристического уравнения удобно записать в матричном виде

$$\lambda^s\begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & I \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \varphi \\ \psi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & A_s^* \\ A_s & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \varphi \\ \psi \end{pmatrix} + \lambda\begin{pmatrix} 0 & A_{s-1}^* \\ A_{s-1} & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \varphi \\ \psi \end{pmatrix} + ...+$$

$$+\lambda^{s-1}\begin{pmatrix} 0 & A_1^* \\ A_1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \varphi \\ \psi \end{pmatrix}. \tag{5.1}$$

В некотором базисе $\{e_k\}_1^n$ n-мерного вещественного (комплексного) пространства $\varphi = \sum\limits_{k=1}^n c_k e_k$, $\psi = \sum\limits_{k=1}^n d_k e_k$ и (5.1) записывается в виде системы

$$\left\{ \begin{array}{l} \lambda^s c_k = \lambda^{s-1} \sum\limits_{i=1}^n \overset{1}{a}_{ik} d_i + ... + \lambda \sum\limits_{i=1}^n \overset{s-1}{a}_{ik} d_i + \sum\limits_{i=1}^n \overset{s}{a}_{ik} d_i \\ \lambda^s d_k = \lambda^{s-1} \sum\limits_{j=1}^n \overset{1}{a}_{kj} c_j + ... + \lambda \sum\limits_{j=1}^n \overset{s-1}{a}_{kj} c_j + \sum\limits_{j=1}^n \overset{s}{a}_{kj} c_j. \end{array} \right. \quad k = \overline{1,n}. \tag{5.2}$$

Нашей задачей является представление в явном виде соответсвующего (5.1) характеристического уравнения

$$\det \left[\lambda^s \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & I \end{pmatrix} - \lambda^{s-1} \begin{pmatrix} 0 & A_1^* \\ A_1 & 0 \end{pmatrix} - ... - \lambda \begin{pmatrix} 0 & A_{s-1}^* \\ A_{s-1} & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & A_s^* \\ A_s & 0 \end{pmatrix} \right] \equiv$$
$$\equiv \lambda^{2sn} + \alpha_1 \lambda^{2sn-1} + ... + \alpha_{2sn-1}\lambda + \alpha_{2sn} = 0, \tag{5.3}$$

т.е. вычисление коэффициентов $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_{2sn-1}, \alpha_{2sn}$.

Следуя [7] составим систему:

$$\begin{aligned} \lambda^{s+1} c_k &= \sum_{i=1}^n \overset{1}{a}_{ik} \lambda^s d_i + \lambda^{s-1} \sum_{i=1}^n \overset{2}{a}_{ik} d_i + ... + \lambda^2 \sum_{i=1}^n \overset{s-1}{a}_{ik} d_i + \lambda \sum_{i=1}^n \overset{s}{a}_{ik} d_i = \\ &= \sum_{i=1}^n \overset{1}{a}_{ik} \left[\lambda^{s-1} \sum_{j=1}^n \overset{1}{a}_{ij} c_j + ... + \lambda \sum_{j=1}^n \overset{s-1}{a}_{ij} c_j + \sum_{j=1}^n \overset{s}{a}_{ij} c_j \right] + \lambda^{s-1} \sum_{i=1}^n \overset{2}{a}_{ik} d_i + \\ &+ ... + \lambda^2 \sum_{i=1}^n \overset{s-1}{a}_{ik} d_i + \lambda \sum_{i=1}^n \overset{s}{a}_{ik} d_i = \lambda^{s-1} \sum_{j=1}^n \left(\overset{1(2)}{a}_{kj} c_j + \overset{2}{a}_{jk} d_j \right) + ... + \\ &+ \lambda^2 \sum_{j=1}^n \left(\overset{s-2(2)}{a}_{kj} c_j + \overset{s-1}{a}_{jk} d_j \right) + \lambda \sum_{j=1}^n \left(\overset{s-1(2)}{a}_{kj} c_j + \overset{s}{a}_{jk} d_j \right) + \sum_{j=1}^n \overset{s(2)}{a}_{kj} c_j \\ \lambda^{s+1} d_k &= \sum_{j=1}^n \overset{1}{a}_{kj} \lambda^s c_j + \lambda^{s-1} \sum_{j=1}^n \overset{2}{a}_{kj} c_j + ... + \lambda^2 \sum_{j=1}^n \overset{s-1}{a}_{kj} c_j + \lambda \sum_{j=1}^n \overset{s}{a}_{kj} c_j = \\ &= \sum_{j=1}^n \overset{1}{a}_{kj} \left[\lambda^{s-1} \sum_{i=1}^n \overset{1}{a}_{ij} d_i + ... + \lambda \sum_{i=1}^n \overset{s-1}{a}_{ij} d_i + \sum_{i=1}^n \overset{s}{a}_{ij} d_i \right] + \lambda^{s-1} \sum_{j=1}^n \overset{2}{a}_{kj} c_j + \\ &+ ... + \lambda^2 \sum_{j=1}^n \overset{s-1}{a}_{kj} c_j + \lambda \sum_{j=1}^n \overset{s}{a}_{kj} c_j = \lambda^{s-1} \sum_{i=1}^n \left(\overset{1(2)}{a}_{ki} d_i + \overset{2}{a}_{ki} c_i \right) + ... + \\ &+ \lambda^2 \sum_{i=1}^n \left(\overset{s-2(2)}{a}_{ki} d_i + \overset{s-1}{a}_{ki} c_i \right) + \lambda \sum_{i=1}^n \left(\overset{s-1(2)}{a}_{ki} d_i + \overset{s}{a}_{ki} c_i \right) + \sum_{i=1}^n \overset{s(2)}{a}_{ki} d_i. \end{aligned} \tag{5.4}$$

Далее, умножая (5.4) на λ и используя (5.2), вычисляем $\lambda^{s+2} c_k$ и $\lambda^{s+2} d_k$, ... , $\lambda^{2sn} c_k$ и $\lambda^{2sn} d_k$.

Возьмем первые уравнения из каждой системы, умноженные, соответственно, на $\alpha_{2sn-s}, \alpha_{2sn-s-1}, ..., \alpha_1, 1,$ и вычислим сумму $c_1(\lambda^{2sn} + \alpha_1 \lambda^{2sn-1} + ... + \ +\alpha_{2sn-s-1}\lambda^{s+1} + \alpha_{2sn-s}\lambda^s)$, сложив соответсвующие правые части. Справа возникают слагаемые, соответственно, с множителями $c_1, c_2, ..., c_n, d_1, d_2, ..., d_n,$ внутри которых выполняется группировка по степеням λ. Для выполнения полученного равенства необходимо приравнять коэффициенты при $c_2, ..., c_n, d_1, d_2, ..., d_n$ к нулю. Из возникающей системы определяются $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_{2sn-s}$, которые в результате подстановки в коэффициенты при c_1 в правой части дадут, соответственно, $\alpha_{2sn-s+1}$, как коэффициент при λ^{s-1}, $\alpha_{2sn-s+2}$, как коэффициент при λ^{s-2},..., α_{2sn}, как коэффициент при нулевой степени λ.

Изложенный прием позволяет определить все коэффициенты характеристического многочлена. В данном случае коэффициент α_1 также известен: $\alpha_1 = Sp \begin{pmatrix} 0 & A_1^* \\ A_1 & 0 \end{pmatrix} = 0$. В то же время он определяется из системы $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_{2sn-s}$.

Приведем вычисление коэффициентов характеристического уравнения на конкретном примере. Пусть $s = 3, n = 2$. Представим в явном виде следующее уравнение степени $2sn = 12$:

$$\det\left[\lambda^3\begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & I\end{pmatrix} - \lambda^2\begin{pmatrix} 0 & A_1^* \\ A_1 & 0\end{pmatrix} - \lambda\begin{pmatrix} 0 & A_2^* \\ A_2 & 0\end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & A_3^* \\ A_3 & 0\end{pmatrix}\right] = 0, \tag{5.5}$$

где $A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0\end{pmatrix}, A_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0\end{pmatrix}, A_3 = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1\end{pmatrix}, I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1\end{pmatrix}$. Для этого возьмем соответствующую (5.5) систему

$$\begin{cases} \lambda^3 c_1 = \lambda^2 d_1 + \lambda(d_1 + d_2) - d_1 \\ \lambda^3 c_2 = \lambda^2 d_1 + d_2 \\ \lambda^3 d_1 = \lambda^2(c_1 + c_2) + \lambda c_1 - c_1 \\ \lambda^3 d_2 = \lambda c_1 + c_2 \end{cases} \tag{5.6}$$

и по ней составим

$$\begin{cases} \lambda^4 c_1 = \lambda^2(c_1 + c_2 + d_1 + d_2) + \lambda(c_1 - d_1) - c_1 \\ \lambda^4 c_2 = \lambda^2(c_1 + c_2) + \lambda(c_1 + d_2) - c_1 \\ \lambda^4 d_1 = \lambda^2(2d_1 + c_1) + \lambda(-c_1 + d_1 + d_2) + (-d_1 + d_2) \\ \lambda^4 d_2 = \lambda^2 c_1 + \lambda c_2. \end{cases}$$

Продолжая процесс умножения на λ и используя (5.5), выпишем только первые уравнения получающихся систем:

$$\lambda^5 c_1 = \lambda^2(2c_1 + c_2 + d_1) + \lambda(c_1 + d_1 + d_2) + (-c_1 + c_2 - d_1 + d_2)$$

$$\lambda^6 c_1 = \lambda^2(2c_1 + c_2 + 4d_1 + d_2) + \lambda(c_2 + d_1 + 3d_2) + (-c_1 - 2d_1 + d_2)$$

$$\lambda^7 c_1 = \lambda^2(4c_1 + 5c_2 + 4d_1 + 3d_2) + \lambda(4c_1 + 3d_2) + (-4c_1 + c_2 - 2d_1 + d_2)$$

$$\lambda^8 c_1 = \lambda^2(8c_1 + 4c_2 + 9d_1 + 3d_2) + \lambda(3c_1 + c_2 + 2d_1 + 5d_2) + (-4c_1 + 3c_2 - 4d_1 + 5d_2)$$

$$\lambda^9 c_1 = \lambda^2(12c_1 + 10c_2 + 14d_1 + 5d_2) + \lambda(8c_1 + 3c_2 + 4d_1 + 13d_2) + (-9c_1 + 3c_2 - 8d_1 + 4d_2)$$

$$\lambda^{10} c_1 = \lambda^2(22c_1 + 17c_2 + 26d_1 + 13d_2) + \lambda(10c_1 + 3c_2 + 4d_1 + 16d_2) +$$
$$+(-14c_1 + 5c_2 - 12d_1 + 10d_2)$$

$$\lambda^{11} c_1 = \lambda^2(36c_1 + 29c_2 + 43d_1 + 16d_2) + \lambda(25c_1 + 5c_2 + 10d_1 + 32d_2)$$
$$+(-26c_1 + 13c_2 - 22d_1 + 17d_2)$$

$$\lambda^{12} c_1 = \lambda^2(68c_1 + 48c_2 + 85d_1 + 32d_2) + \lambda(33c_1 + 13c_2 + 14d_1 + 53d_2)$$
$$+(-43c_1 + 16c_2 - 36d_1 + 29d_2).$$

Умножая полученные равенста на $\alpha_9, \alpha_8, ..., \alpha_1, 1$ и складывая результаты, получим

$$c_1(\lambda^{12} + \alpha_1\lambda^{11} + \alpha_2\lambda^{10} + \alpha_3\lambda^9 + \alpha_4\lambda^8 + \alpha_5\lambda^7 + \alpha_6\lambda^6 + \alpha_7\lambda^5 + \alpha_8\lambda^4 + \alpha_9\lambda^3) =$$

$$= c_1\left[\lambda^2(68 + 36\alpha_1 + 22\alpha_2 + 12\alpha_3 + 8\alpha_4 + 4\alpha_5 + 2\alpha_6 + 2\alpha_7 + \alpha_8) +\right.$$
$$+\lambda(33 + 25\alpha_1 + 10\alpha_2 + 8\alpha_3 + 3\alpha_4 + 4\alpha_5 + \alpha_7 + \alpha_8) +$$
$$\left. + (-43 - 26\alpha_1 - 14\alpha_2 - 9\alpha_3 - 4\alpha_4 - 4\alpha_5 - \alpha_6 - \alpha_7 - \alpha_8)\right] +$$
$$+c_2\left[\lambda^2(48 + 29\alpha_1 + 17\alpha_2 + 10\alpha_3 + 4\alpha_4 + 5\alpha_5 + \alpha_6 + \alpha_7 + \alpha_8) +\right.$$

$$+\lambda(13+5\alpha_1+3\alpha_2+3\alpha_3+\alpha_4+\alpha_6)+(16+13\alpha_1+5\alpha_2+3\alpha_3+3\alpha_4+\alpha_5+\alpha_7)]+$$
$$+d_1\left[\lambda^2(85+43\alpha_1+26\alpha_2+14\alpha_3+9\alpha_4+4\alpha_5+4\alpha_6+\alpha_7+\alpha_8+\alpha_9)+\right.$$
$$+\lambda(14+10\alpha_1+4\alpha_2+4\alpha_3+2\alpha_4+\alpha_6+\alpha_7-\alpha_8+\alpha_9)+$$
$$+(-36-22\alpha_1-12\alpha_2-8\alpha_3-4\alpha_4-2\alpha_5-2\alpha_6-\alpha_7-\alpha_9)]+$$
$$+d_2\left[\lambda^2(32+16\alpha_1+13\alpha_2+5\alpha_3+3\alpha_4+3\alpha_5+\alpha_6+\alpha_8)+\right.$$
$$+\lambda(53+32\alpha_1+16\alpha_2+13\alpha_3+5\alpha_4+3\alpha_5+3\alpha_6+\alpha_7+\alpha_9)+$$
$$+(29+17\alpha_1+10\alpha_2+4\alpha_3+5\alpha_4+\alpha_5+\alpha_6+\alpha_7)].$$

Приравняв коэффициенты при c_2, d_1 и d_2 к нулю, получим:

$$\alpha_1=0,\alpha_2=-2,\alpha_3=-2,\alpha_4=0,\alpha_5=2,\alpha_6=-1,\alpha_7=-2,\alpha_8=-1,\alpha_9=4.$$

Подставив полученные значения α в равенство

$$\lambda^{12}+\alpha_1\lambda^{11}+\alpha_2\lambda^{10}+\alpha_3\lambda^9+\alpha_4\lambda^8+\alpha_5\lambda^7+\alpha_6\lambda^6+\alpha_7\lambda^5+\alpha_8\lambda^4+\alpha_9\lambda^3=$$
$$=\lambda^2(68+36\alpha_1+22\alpha_2+12\alpha_3+8\alpha_4+4\alpha_5+2\alpha_6+2\alpha_7+\alpha_8)+$$
$$+\lambda(33+25\alpha_1+10\alpha_2+8\alpha_3+3\alpha_4+4\alpha_5+\alpha_7+\alpha_8)+$$
$$+(-43-26\alpha_1-14\alpha_2-9\alpha_3-4\alpha_4-4\alpha_5-\alpha_6-\alpha_7-\alpha_8),$$

найдем $\alpha_{10}=-1,\alpha_{11}=-2,\alpha_{12}=1$. Таким образом, характеристическое уравнение (5.5) в явном виде следующее:

$$\lambda^{12}-2\lambda^{10}-2\lambda^9+2\lambda^7-\lambda^6-2\lambda^5-\lambda^4+4\lambda^3-\lambda^2-2\lambda+1=0.$$

Непосредственное вычисление характеристического уравнения подтверждает полученный результат.

Замечание 5.1. *Подобно* [12] *для матричного полинома вида (5.1) также может быть сформулирована и доказана теорема Гамильтона-Кэли.*

Список литературы

1. Schmidt E., “Zur Theorie linearen und nichtlinearen Integralgeichungen.”, Teilen 1-3, *Math. Ann.*, **63-65** (1905-1908), 370–399.

2. Гурса Э., *Курс математического анализа. Интегральные уравнения.* Т. 3, Ч.2, ОНТИ, М., 1935.

3. Пустыльник Е. И., “Об одном представлении линейных вполне непрерывных операторов, действующих в пространстве Банаха”, *Изв. ВУЗов. Математика*, 1960, № 2 (15), 149–153.

4. Аржаных И. С., “Обобщение теоремы Гамильтона-Кэли”, *Докл. АН Узбекской ССР*, 1951, № 7, 3–5.

5. Аржаных И. С., “Распространение метода А.Н.Крылова на полиномиальные матрицы”, *Докл. АН СССР. Нов. сер.*, 1951, Т.81, № 5, 749–752.

6. Аржаных И. С.,Гугнина В. И., "Распространение методов Крылова, Леверрье и Фаддеева на полиномиальные матрицы", *Труды Института математики им. В.И.Романовского*, 1962, В.24, Ташкент, 33–67.

7. Аржаных И. С.,Гугнина В. И., "О развертывании характеристического уравнения", *Труды Института Математики АН Узбекской ССР*, 1962, В.26, 3–12.

8. Гугнина В. И., "Некоторые вопросы теории полиномиальных матриц", Автореферат кандидатской диссертации, 1967, Ташкент.

9. Аржаных И. С., "О новых неравенствах устойчивости", *Автоматика и телемеханика*, 1961, Т.22, № 4, 436–442.

10. Аржаных И. С., "Некоторые достаточные условия устойчивости", *Изв. АН Узбекской ССР. Сер. техн. наук*, 1962, № 4, 30–38.

11. Кувшинова А. Н., "Об одном варианте теоремы Гамильтона-Кэли для полиномиальных матриц", *Некоторые актуальные проблемы современной математики и математического образования*, Герценовские чтения - 2012. Материалы научной конференции (16-21 апреля 2012 г.), LXV, БАН, СПб., 2012, 83–87.

12. Кувшинова А. Н., "Теорема Гамильтона-Кэли для матриц полиномиальных по спектральному параметру Шмидта.", *Некоторые актуальные проблемы современной математики и математического образования*, Герценовские чтения - 2013. Материалы научной конференции (15-20 апреля 2013 г.), LXVI, БАН, СПб., 2013, 81–86.

13. Kuvshinova A. N., Loginov B. V., *Some consequences of the generalized Hamilton-Cayley theorem for matrices polynomially dependent on E.Schmidt spectral parameter.*, ROMAI Jornal, 2014.

14. Макеева О. В., "Метод ложных возмущений в обобщенных задачах на собственные значения", Автореферат кандидатской диссертации, 2007.

15. Martins L. S., "An analytical approach to Cayley-Hamilton theorem", *Atti Acc. Lincei Rend. fis.*, S. VIII, LXXXI, 1987, 279–282.

Cayley-Hamilton theorem for two variants of matrix spectral problems on E.Shmidt and development of characteristic polynomial.

© A. N. Kuvshinova[3], B. V. Loginov[4]

Abstract. At the beginning of previous century E.Schmidt had introduced for integral operators eigenvalue systems $\{\lambda_k\}$, counting with their multiplicities and relevant sets of eigenelements $\{\varphi_k\}_1^\infty$, $\{\psi_k\}_1^\infty$, such that $A\varphi_k = \lambda_k\psi_k,\ A^*\psi_k = \lambda_k\varphi_k$. In this article generalized matrix spectral problems polynomially depending on Schmidt's spectral parameter are considered. I.S. Arjanykh (1951) has proved the generalized Hamilton-Cayley theorem for polynomial matrices with identity matrix at the parameter highest degree with the aim of application to numerical methods of linear algebra. Below it is given the extension of Hamilton-Cayley theorem on matrix E.Schmidt spectral problems polynomially depending on spectral parameter with identity matrix at the highest degree of spectral parameter (s.2) and also with identity (invertible) matrix at the parameter zero degree (s.3). With the aimes of further investigations [11-13] on the base of the suggested by I.S.Arzhanykh [6, 7] approach the development of characteristic polynomial on Schmidt spectral parameter degrees is made.

Key Words: E.Schmidt spectrum; E.Shmidt eigenvalues; polynomial matrices on E.Shmidt spectral parameter; Hamilton-Cayley theorem; development of characteristic polynomial.

[3] Post-graduate student of Higher Mathematics Chair, Ulyanovsk State Technical University, Ulyanovsk; erasya7@rambler.ru.

[4] Professor of Higher Mathematics Chair, Ulyanovsk State Technical University, Ulyanovsk; bvllbv@yandex.ru.