УДК 517.95

Обратная задача для эллиптического интегро-дифференциального уравнения Фредгольма

© Т. К. Юлдашев [1] А. Г. Лоскутова[2]

Аннотация. В данной работе изучается однозначная разрешимость нелинейной обратной задачи для эллиптического интегро-дифференциального уравнения Фредгольма. Модифицируется метод вырожденного ядра, разработанного для интегрального уравнения Фредгольма второго рода. Получается нелинейное интегральное уравнение первого рода, которое с помощью специального неклассического интегрального преобразования сводится к нелинейному интегральному уравнению второго рода. Используется метод последовательных приближений в сочетании его с методом сжимающих отображений.

Ключевые слова: нелинейная обратная задача, уравнение эллиптического типа, интегро-дифференциальное уравнение, интегральное преобразование, метод последовательных приближений

1. Постановка задачи

В области $\Omega \equiv \Omega_T \times \mathbb{R}$ рассматривается интегро-дифференциальное уравнение Фредгольма вида

$$\frac{\partial^2 u(t,x)}{\partial t^2} + \int_0^T K(t,s) \frac{\partial^2 u(s,x)}{\partial x^2} ds = f(t,x,\sigma(t)) \tag{1.1}$$

с начальными условиями

$$u(0,x) = \phi_1(x),\ u_t(0,x) = \phi_2(x),\ x \in \mathbb{R}, \tag{1.2}$$

$$u(t,0) = \phi_1(0) + \phi_2(0)t - N_1 \int_0^t (t-s)a(s)ds + \int_0^t (t-s)f(s,0,\sigma(s))ds, \tag{1.3}$$

$$u_x(t,0) = \phi_1'(0) + \phi_2'(0)t - N_2 \int_0^t (t-s)a(s)ds + \int_0^t (t-s)f_x(s,0,\sigma(s))ds \tag{1.4}$$

и дополнительными условиями

$$u(t,x_0) = \psi(t),\ t \in \Omega_T,\ x_0 \neq 0, \tag{1.5}$$

$$\sigma(0) = \sigma_0 = const \neq 0, \tag{1.6}$$

где $f(t,x,\sigma(t)) \in C^{0,2,0}(\Omega \times \Omega_T)$, $\phi_i(x) \in C^2(\mathbb{R})$, $K(t,s) = a(t)b(s)$, $a(t), b(s) \in C(\Omega_T)$, $\sigma(t)$ – восстанавливаемая функция, N_i – заданные постоянные, $i = 1,2$, $\Omega_T \equiv [0,T]$, $0 < T < \infty$, $\mathbb{R} \equiv (-\infty,\infty)$.

Отметим, что изучению дифференциальных уравнений эллиптического типа посвящено много работ. Но, изучению интегро-дифференциальных уравнений эллиптического

[1] Доцент кафедры высшей математики, Сибирский государственный аэрокосмический университет имени академика М. Ф. Решетнева, г. Красноярск, tursunbay@rambler.ru;

[2] Студентка факультета машиноведения и мехатроники, Сибирский государственный аэрокосмический университет имени академика М. Ф. Решетнева, г. Красноярск

типа посвящено сравнительно меньше. Интегро-дифференциальные уравнения имеют особенностей в вопросе однозначной разрешимости [1], [2]. Изучению разрешимости обратных задач для линейных дифференциальных уравнений в частных производных посвящено большое количество работ. Библиографию многих публикаций, посвященных теории линейных обратных задач, можно найти, например в [3] - [5].

В настоящей работе изучается обратная задача, где восстанавливаемая функция $\sigma(t)$ нелинейно входит в уравнение. Задание условия (1.6) при интегральном преобразовании обеспечивает единственность решения нелинейного интегрального уравнения первого рода и определяет значение неизвестной функции в начальной точке $t=0$.

Определение 1.1. *Решением обратной задачи (1.1)-(1.6) называется пара функций* $\left\{u(t,x)\in C^{2,2}(\Omega), \sigma(t)\in C(\Omega_T)\right\}$, *удовлетворяющая уравнению (1.1) и условиям (1.2)-(1.6).*

2. Начальная задача (1.1)-(1.4)

Используется метод интегральных уравнений Фредгольма с вырожденным ядром [6]. При помощи обозначения

$$c(x)=\int\limits_0^T b(s)\frac{\partial^2 u(s,x)}{\partial x^2}ds \tag{2.1}$$

интегро-дифференциальное уравнение Фредгольма (1.1) перепишется в виде

$$\frac{\partial^2 u(t,x)}{\partial t^2}+a(t)c(x)=f(t,x,\sigma(t)).$$

С учетом условия (1.2) двукратное интегрирование последнего равенства по t дает

$$u(t,x)=\phi_1(x)+\phi_2(x)t-c(x)\int\limits_0^t (t-s)a(s)ds+\int\limits_0^t (t-s)f(s,x,\sigma(s))ds. \tag{2.2}$$

Дифференцируем (2.2) два раза по x:

$$u_x(t,x)=\phi_1'(x)+\phi_2'(x)t-c'(x)\int\limits_0^t (t-s)a(s)ds+\int\limits_0^t (t-s)f_x(s,x,\sigma(s))ds, \tag{2.3}$$

$$u_{xx}(t,x)=\phi_1''(x)+\phi_2''(x)t-c''(x)\int\limits_0^t (t-s)a(s)ds+\int\limits_0^t (t-s)f_{xx}(s,x,\sigma(s))ds. \tag{2.4}$$

Подставляя (2.4) в (2.1), имеем

$$c(x)=\int\limits_0^T b(s)\Big[\phi_1''(x)+\phi_2''(x)s-c''(x)\int\limits_0^s (s-\theta)a(\theta)d\theta+\int\limits_0^s (s-\theta)f_{xx}(\theta,x,\sigma(\theta))d\theta\Big]ds. \tag{2.5}$$

Пусть

$$A=\int\limits_0^T b(s)q(s)ds>0, \tag{2.6}$$

где $q(t) = \int\limits_0^t (t-s)a(s)ds$.

Тогда для определения $c(x)$ в (2.1) получаем из (2.5) следующее дифференциальное уравнение

$$c''(x) + Bc(x) = F(x), \tag{2.7}$$

где $B = A^{-1}$, $F(x) = BF_0(x)$,

$F_0(x) = \int\limits_0^T b(s)\Big[\phi_1''(x) + \phi_2''(x)s\Big]ds + \int\limits_0^T b(s)\int\limits_0^s (s-\theta)f_{xx}(\theta, x, \sigma(\theta))d\theta ds$.

Решая дифференциальное уравнение (2.7) методом вариации произвольных постоянных, получаем

$$c(x) = D_1\cos\nu x + D_2\sin\nu x + \frac{1}{\nu}\int\limits_0^x F(y)Q(x,y)dy, \tag{2.8}$$

где $Q(x,y) = \sin\nu(x-y)$, $\nu = \sqrt{B}$, коэффициенты D_i подлежат определению, $i = 1, 2$.

Из (2.8) имеем

$$c(0) = D_1,\ c'(0) = \nu D_2. \tag{2.9}$$

С учетом (2.9) из (2.2) и (2.3) получаем, что

$$u(t,0) = \phi_1(0) + \phi_2(0)t - D_1\int\limits_0^t (t-s)a(s)ds + \int\limits_0^t (t-s)f(s,0,\sigma(s))ds, \tag{2.10}$$

$$u_x(t,0) = \phi_1'(0) + \phi_2'(0)t - \nu D_2\int\limits_0^t (t-s)a(s)ds + \int\limits_0^t (t-s)f(s,0,\sigma(s))ds. \tag{2.11}$$

Сравнение соотношений (2.10) и (2.11) с заданными условиями (1.3) и (1.4) дает $D_1 = N_1$, $D_2 = \frac{N_2}{\nu}$.

Тогда (2.8) принимает вид

$$c(x) = N_1\cos\nu x + \frac{N_2}{\nu}\sin\nu x + \frac{1}{\nu}\int\limits_0^x F(y)Q(x,y)dy. \tag{2.12}$$

Подстановка (2.12) в (2.2) дает

$$u(t,x) = \phi_1(x) + \phi_2(x)t + \int\limits_0^t (t-s)f(s,x,\sigma(s))ds -$$

$$-q(t)\Big\{N_1\cos\nu x + \frac{N_2}{\nu}\sin\nu x + \nu\int\limits_0^T b(s)\int\limits_0^x Q(x,y)\Big[\phi_1''(y) + \phi_2''(y)s\Big]dsdy +$$

$$+\nu\int\limits_0^x Q(x,y)\int\limits_0^T b(s)\int\limits_0^s (s-\theta)f_{yy}(\theta,y,\sigma(\theta))d\theta dsdy\Big\}. \tag{2.13}$$

3. Восстанавливаемая функция

В силу условия (1.5), из (2.13) получаем

$$\int_0^t (t-s)f(s,x_0,\sigma(s))ds = g(t)-$$

$$-\nu q(t)\int_0^{x_0} Q(x_0,y)\int_0^T b(s)\int_0^s (s-\theta)f_{yy}(\theta,y,\sigma(\theta))d\theta ds dy, \tag{3.1}$$

где

$$g(t)=\psi(t)+\phi_1(x_0)+\phi_2(x_0)t+q(t)\Big[N_1\cos\nu x_0+\frac{N_2}{\nu}\sin\nu x_0+$$

$$+\nu\int_0^T b(s)\int_0^{x_0} Q(x_0,y)\Big(\phi_1''(y)+\phi_2''(y)s\Big)ds dy\Big].$$

Нелинейное интегральное уравнение первого рода (3.1) при начальном условии (1.6)эквивалентно следующему интегральному уравнению второго рода (см., напр. [7] - [9]) :

$$\sigma(t)\equiv\Theta(t;\sigma(t))=\Big[\sigma(t)+\int_0^t G(s)\sigma(s)ds-\int_0^t (t-s)f(s,x_0,\sigma(s))ds-$$

$$-\nu q(t)\int_0^{x_0} Q(x_0,y)\int_0^T b(s)\int_0^s (s-\theta)f_{yy}(\theta,y,\sigma(\theta))d\theta ds dy+g(t)\Big]e^{-\mu(t)}+$$

$$+\int_0^t G(s)e^{-\mu(t-s)}\Big[\sigma(t)-\sigma(s)+\int_0^t G(s)\sigma(s)ds-\int_0^s G(\theta)\sigma(\theta)d\theta-$$

$$-\int_0^t (t-s)f(s,x_0,\sigma(s))ds+\int_0^s (s-\theta)f(\theta,x_0,\sigma(\theta))d\theta-$$

$$-\nu q(t)\int_0^{x_0} Q(x_0,y)\int_0^T b(s)\int_0^s (s-\theta)f_{yy}(\theta,y,\sigma(\theta))d\theta ds dy+$$

$$+\nu q(s)\int_0^{x_0} Q(x_0,y)\int_0^T b(\theta)\int_0^\theta (\theta-\xi)f_{yy}(\xi,y,\sigma(\xi))d\xi d\theta dy+g(t)-g(s)\Big]ds, \tag{3.2}$$

где $\mu(t)=\int\limits_0^t G(s)ds>0$ такая, что

$$e^{-\mu(t)}\ll 1;\ 2\int_0^t G(s)e^{-\mu(t-s)}ds\ll 1.$$

Т е о р е м а 3.1. *Пусть выполняются следующие условия:*
1. $\max\left\{|g(t)| : t \in \Omega_T\right\} \leq \delta < \infty$ *;*
2. $\max\left\{|f(t,x,\sigma(t))|;\ |f_{xx}(t,x,\sigma(t))|\right\} \leq \Delta < \infty$ *;*
3. $f(t,x,\sigma) \in Lip\{L_{1|\sigma}\}$ *,* $0 < L_1 = const < \infty$ *;*
4. $f_{xx}(t,x,\sigma) \in Lip\{L_{2|\sigma}\}$ *,* $0 < L_2 = const < \infty$ *;*
5. $\rho = \Big[1 + \mu_0 + L_1 \frac{T^2}{2} + \nu q_0 L_2 \int\limits_0^{x_0} Q(x_0,y) \int\limits_0^T \frac{s^2}{2} b(s) ds dy\Big] P(T) < 1$ *, где*

$$\mu_0 = \max\left\{\mu(t) : t \in \Omega_T\right\},\ q_0 = \max\left\{|q(t)| : t \in \Omega_T\right\}, P(t) = e^{-\mu(t)} + 2\int\limits_0^t G(s) e^{-\mu(t-s)} ds.$$

Тогда нелинейное интегральное уравнение (3.2) имеет единственное решение на отрезке Ω_T *.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Используем метод последовательных приближений. Рассмотрим следующий итерационный процесс Пикара:

$$\sigma_0(t) = 0,\ \sigma_1(t) = \Big[-\int\limits_0^t (t-s) f(s,x_0,0) ds -$$

$$-\nu q(t) \int\limits_0^{x_0} Q(x_0,y) \int\limits_0^T b(s) \int\limits_0^s (s-\theta) f_{yy}(\theta,y,0) d\theta ds dy + g(t)\Big] e^{-\mu(t)} +$$

$$+\int\limits_0^t G(s) e^{-\mu(t-s)} \Big[\int\limits_0^t (t-s) f(s,x_0,0) ds - \int\limits_0^s (s-\theta) f(\theta,x_0,0) d\theta -$$

$$-\nu q(t) \int\limits_0^{x_0} Q(x_0,y) \int\limits_0^T b(s) \int\limits_0^s (s-\theta) f_{yy}(\theta,y,0) d\theta ds dy +$$

$$+\nu q(s) \int\limits_0^{x_0} Q(x_0,y) \int\limits_0^T b(\theta) \int\limits_0^\theta (\theta-\xi) f_{yy}(\xi,y,0) d\xi d\theta dy + g(t) - g(s)\Big] ds, \tag{3.3}$$

$$\sigma_k(t) = \Theta(t;\sigma_{k-1}),\ k = 2,3,4,\ \ldots\ . \tag{3.4}$$

В силу условий теоремы, из последовательных приближений (3.3) и (3.4) получаем

$$\|\sigma_1(t) - \sigma_0(t)\| \leq \Big[\Delta \frac{T^2}{2} + \nu q_0 \Delta \int\limits_0^{x_0} Q(x_0,y) \int\limits_0^T \frac{s^2}{2} b(s) ds dy + \delta\Big] P(T); \tag{3.5}$$

$$\|\sigma_k(t) - \sigma_{k-1}(t)\| \leq \Big[1 + \mu_0 + L_1 \frac{T^2}{2} + \nu q_0 L_2 \int\limits_0^{x_0} Q(x_0,y) \int\limits_0^T \frac{s^2}{2} b(s) ds dy\Big] \times$$

$$\times P(T) \|\sigma_{k-1}(t) - \sigma_{k-1}(t)\|. \tag{3.6}$$

Из оценок (3.5) и (3.6) следует, что оператор в правой части (3.2) является сжимающим. Следовательно, интегральное уравнение (3.2) имеет единственное решение на отрезке Ω_T .
Д о к а з а т е л ь с т в о з а к о н ч е н о.

4. Разрешимость обратной задачи (1.1) – (1.6)

Теорема 4.1. *Пусть:*
1. *Выполняются (2.6) и условия теоремы 3.1.;*
2. $\max\left\{|\phi_i(x)|\right\} < \infty,\ i = 1, 2\,;$
3. $\left|\int\limits_0^x Q(x,y)\Big(\varphi_1''(y) + \varphi_2''(y)s\Big)dy\right| < \infty\,;$
4. $\left|\int\limits_0^x Q(x,y) f_{yy}(t,y,\sigma(t))dy\right| < \infty\,.$
Тогда в области Ω *существует единственное решение начальной задачи (1.1)-(1.4).*

Доказательство теоремы 4.1. следует из того, что подставляя в (2.13) решение интегрального уравнения (3.2), получаем искомую функцию $u(t,x)$.

Из справедливости приведенных выше двух теорем следует, что справедлива

Теорема 4.2. *Пусть выполняются все условия теоремы 4.1. Тогда существует единственная пара решений* $\left\{u(t,x) \in C^{2,2}(\Omega), \sigma(t) \in C(\Omega_T)\right\}$ *обратной задачи (1.1)-(1.6).*

Список литературы

1. Быков Я. В., *О некоторых задачах теории интегро-дифференциальных уравнений*, Изд-во Кирг.ГУ, Фрунзе, 1957, 328 с.
2. Иманалиев М., *Колебания и устойчивость решений сингулярно-возмущенных интегро-дифференциальных систем*, Илим, Фрунзе, 1974, 352 с.
3. Денисов А. М., *Введение в теорию обратных задач*, МГУ, М., 1994, 285 с.
4. Романов В. Г., *Обратные задачи для математической физики*, Наука, М., 1984, 264 с.
5. Лаврентьев М. М., Савельев Л. Я., *Линейные операторы и некорректные задачи*, Наука, М., 1991, 331 с.
6. Юлдашев Т. К., “О разрешимости смешанной задачи для линейного параболо-гиперболического интегро-диференциального уравнения Фредгольма”, *Журнал средневолжского мат. общества*, **15**:3 (2013), 158–163.
7. Юлдашев Т. К., “Обратная задача для нелинейного уравнения с псевдопараболическим оператором высокого порядка”, *Вестник СамГТУ. Серия: Физ.-мат. науки*, **28**:3 (2012), 17–29.
8. Юлдашев Т. К., “Обратная задача для нелинейного интегро-дифференциального уравнения с гиперболическим оператором высокой степени”, *Вестник ЮжноУралГУ. Серия: Математика. Механика. Физика*, **5**:1 (2013), 69–75.
9. Юлдашев Т. К., Середкина А. И., “Обратная задача для квазилинейных интегро-дифференциальных уравнений в частных производных высокого порядка”, *Вестник СамГТУ. Серия: Физ.-мат. науки*, **32**:3 (2013), 46–55.

Inverse problem for elliptic Fredholm integro-differential equation

© T. K. Yuldashev[3] A. G. Loskutova[4]

Abstract. It is studied the one value solvability of the nonlinear inverse problem for an elliptic Fredholm integro-differential equation. It is modified the method of degenerate kernel designed for Fredholm integral equations of the second kind. It is obtained nonlinear integral equation of the first kind, which with the aid of special non-classical integral transformation is reduced to a nonlinear integral equation of the second kind. It is used the method of successive approximations, combined it with the method of compressing maps.

Key Words: nonlinear inverse problem, equation of elliptic type, integro-differential equation, integral transformation, method of successive approximation

[3] Associate professor of Higher Mathematics Chair, M. F. Reshetnev Siberian State Aerospace University, Krasnoyarsk, tursunbay@rambler.ru;

[4] Student of Faculty of Mechanical Engineering and Mechatronics, M. F. Reshetnev Siberian State Aerospace University, Krasnoyarsk