Краткие сообщения

УДК 517.929

Исследование робастного поведения семейств дискретных полиномов

© В. И. Зубов [1], И. В. Зубов [2], А. Ф. Зубова [3]

Аннотация. В этой статье с помощью нового понятия, единичного радиуса с центром в нуле разделяющего полином по числу корней вне и внутри круга, обобщен принцип исключения нуля для исследования робастного поведения семейств дискретных полиномов. В частном случае, для дискретных интервальных полиномов приведен графический критерий их принадлежности классам (n, k) - эквивалентности дискретных полиномов. Обсуждается использование этой методики для других семейств полиномов.

Ключевые слова: интервальные полиномы, критерий Михайлова, годограф

Анализируя поведение дискретного семейства полиномов и принцип исключения нуля для таких семейств, видим, что можно сформулировать понятия и утверждения для исследования семейств дискретных полиномов на неустойчивость. Точнее, исследование их принадлежности некоторым однородным классам, разделяя дискретные полиномы по числу корней внутри и вне круга единичного радиуса с центром в нуле.

В этой статье ограничимся рассмотрением семейств дискретных интервальных полиномов.

Предварительно, введем понятие для общего случая.

Определение 1.1. *Семейство полиномов степени* n

$$\tilde{F}(s, Q) = \{F(s, q) = a_0(q) + a_1(q)s + \ldots + a_n(q)s^n,\ q \in Q\} \tag{1.1}$$

назовем принадлежащим классу $(n, k)-$ *эквивалентности дискретных полиномов, если каждый полином семейства* (1.1) *для всех значений пераметра* $q \in Q \subset R^l$ *имеет* k, $0 \leq k \leq n$, *корней внутри круга единичного радиуса с центром в нуле, а* $n - k$ *корней - вне этого круга (с учетом кратностей).*

Очевидно, семейство дискретных полиномов из класса $(n, 0)$ - эквивалентности дискретных полиномов является робастно устойчивым в пространстве параметров Q. Требование одинакового порядка n полиномов в семействе требуется, чтобы число корней вне и внутри круга $|s| \leq 1$ в сумме с учетом кратностей было одинаковым и равно порядку n полинома. Напомним, что для устойчивых дискретных полиномов условие постоянства порядка всех полиномов в семействе не требуется [4]. В общем случае для робастной устойчивости и робастной неустойчивости семейства дискретных полиномов справедлив аналог принципа исключения нуля.

Теорема 1.1. *Пусть* $F(s, q^0) \in \tilde{F}(s, Q)$ *для некоторого* $q^0 \in Q$, $Q-$ *связно,* $Q \in R^l$, *принадлежит классу* $(n, k)-$ *эквивалентности дискретных полиномов. Тогда условие*

[1] Аспирант кафедры теории управления; СПбГУ, г. Санкт-Петербург; ddemidova@mail.ru
[2] Профессор кафедры теории управления; СПбГУ, г. Санкт-Петербург; ddemidova@mail.ru
[3] Профессор кафедры теории управления; СПбГУ, г. Санкт-Петербург; ddemidova@mail.ru

$$0 \notin S(\omega) = \{F(e^{j\omega}, q) : q \in Q, 0 \le \omega < 2\pi\} \quad (1.2)$$

необходимо и достаточно для принадлежности всего семейства $\gamma \le \gamma_{\max}$, *классу* $(n, k)-$ *эквивалентности дискретных полиномов.*

Доказательство. **Необходимость.** условия (1.2) очевидна. Пусть Q для некоторых $\omega^\star \in [0, 2\pi)$, $q^\star \in Q$ и $F(s, q) \in \tilde{F}(s, Q)$. Тогда полином $F(s, q)$ имеет корень на границе $|s| = 1$ и потому не принадлежит классу $(n, k)-$ эквивалентности дискретных полиномов ни при каком k.

Достаточность. Пусть условие (1.2) выполняется, но найдется полином $F(s, q^1)$, $q^1 \in Q$ не принадлежащий классу $(n, k)-$ эквивалентности дискретных полиномов. Рассмотрим непрерывную кривую $q(t) \in Q$, $0 \le t \le 1$, $q(0) = q^0$, $q(1) = q^1$. Такая кривая существует, так как Q - связное множество. Пусть $s_i(t)$ - корни полинома $F(s, q(t))$. Поскольку $a_n(q(t)) \neq 0$, то по теореме о непрерывной зависимости корней полинома $n-$ой степени от параметров корни можно занумеровать так, что функции $s_i(t)$ непрерывны. Однако, по меньшей мере, один корень (например, первый) полинома $F(s, q^1)$ лежит внутри круга: $|s_1(1)| \le 1$, в то время как $|s_1(0)| > 1$ в силу принадлежности $F(s, q^0)$ классу $(n, k)-$ эквивалентности дискретных полиномов и именно первый корень оказался вне круга $|s| \le 1$. Поэтому найдутся $t^\star$, $0 \le t^\star \le 1$ и $q^\star = q(t^\star) \in Q$ также, что $|s_1(t^\star)| = 1$. Но это означает, что $F(s, q^\star)$ имеет корень на окружности $|s| = 1$. Итак, мы получили, что $0 = F(e^{j\omega^\star}, q^\star)$ для некоторых $q^\star \in Q$ и $\omega^\star \in [0, 2\pi)$. Это противоречит условию (1.2).
Доказательство закончено.

Замечание 1.1. *Для полиномов в непрерывном и дискретном случаях критерий Михайлова, принцип исключения нуля и их обобщения формулируется несколько по разному. Для полиномов для непрерывного случая* $0 \le \omega < +\infty$, *если полиномы с вещественными коэффициентами и* $-\infty < \omega < \infty$, *если полиномы с комплексными коэффициентами. Это объясняется тем, что в первом случае годографы центрально симметричны, а во втором - нет. Для дискретных полиномов в обоих случаях берется образ всей мнимой оси (окружность), чтобы годограф после отображения стал замкнутым. Для полиномов с вещественными коэффициентами такой годограф симметричен относительно вещественной оси, а для общего случая - нет.*

Для простоты, здесь ограничимся только интервальными неопределенностями коэффициентов семейства дискретных полиномов с вещественными коэффициентами, т. е. семейство полиномов вида (кратко - интервальный дискретный полином):

$$F(s) = a_0 + a_1 s + \ldots + a_n s^n, \quad |a_i - a_i^0| \le \gamma\alpha_i, \quad (1.3)$$

$\alpha_i > 0$, $i = \overline{0, n}$, $\underline{a}_n \cdot \overline{a}_n > 0$, γ - размах неопределенности. Для непрерывного случая область $S(\omega)$ для интервального полинома является прямоугольником.

В дискретном случае получим выпуклый многоугольник, который движется сложным образом, поворячиваясь и меняя форму, в то же время, оставаясь выпуклым многоугольником при изменении ω от 0 до 2π. Точнее,

$$S(\omega) = \{F_0(e^{j\omega}) + \gamma \sum_{m=0}^{n} \alpha_m \mu_m e^{j\omega m}\} = c_0 + \{\sum_{m=0}^{n} \mu_m s_m\}, \quad (1.4)$$

где $c_0 = F_0(e^{j\omega})$, $s_m = \gamma\alpha_m e^{j\omega m}$, $\mu_m \in [-1, 1]$ - произвольные числа. Область $S(\omega)$ - многоугольник с центром в точке c_0 и сторонами расположенными под углами равными

$arg\, s_m$, $m = \overline{0,n}$. Многоугольник выпуклый и имеет $2n+2$ ребер и столько же вершин, причем при изменении ω от 0 до 2π многоугольник $S(\omega)$ трансформируется в $2n-$ угольник, $2n-2$ угольник и т. д. вплоть до отрезка при $\omega = 0$ и $\omega = \pi$. При некоторых ω соседние ребра становятся общим (одним) ребром.

Сформулируем критерий принадлежности интервального полинома $F(s)$ классу $(n,k)-$ эквивалентности дискретных полиномов.

Т е о р е м а 1.2. *Пусть номинальный дискретный полином*

$$F_0(s) = a_0^0 + a_1^0 s + \ldots + a_n^0 s^n,$$

$F_0(s) \in F(s)$, $F(s)$ *из* (1.3) *принадлежит классу* $(n,k)-$ *эквивалентности дискретных полиномов. Тогда для того, чтобы интервальный полином* $F(s)$ *принадлежал классу* $(n,k)-$ *эквивалентности дискретных полиномов необходимо и достаточно, чтобы для размаха неопределенности* γ *выполнялось неравенство*

$$\gamma\gamma_{\max}^k,$$

где

$$\gamma_{\max}^k = \min_{0\le\omega<2\pi} \gamma(\omega), \tag{1.5}$$

$$\gamma(\omega) = \max_{\eta} \frac{|\sum_{i=0}^n a_i^0 \cos(i-\eta)\omega|}{\sum_{i=0}^n \alpha_i |\cos(i-\eta)\omega|}, \quad \omega \neq 0,\, \pi; \tag{1.6}$$

$$\gamma(0) = \frac{|\sum_{i=0}^n a_i^0|}{\sum_{i=0}^n \alpha_i}, \tag{1.7}$$

$$\gamma(\pi) = \frac{|\sum_{i=0}^n (-1)^i a_i^0|}{\sum_{i=0}^n \alpha_i}. \tag{1.8}$$

Назовем максимальный размах неопределенности $\gamma_{\max}^k$ из (1.5) - k - радиусом интервального семейства дискретных полиномов.

Доказательство опирается на принцип исключения нуля для общего случая (теорема 1.1.) и не имеет принципиальных трудностей.

Очевидно, при $k = 0$ из теоремы 1.2. получим критерий устойчивости дискретного интервального полинома. Формулы для вычисления k - радиуса $\gamma_{\max}^k$ существенно отличаются от непрерывного случая.

З а м е ч а н и е 1.2. *В дискретном случае нет аналога теорем о принадлежности семейств интервальных полиномов в непрерывном случае классам* $(n,k)-$ *эквивалентности. В частности, в дискретном случае нет аналога теоремы Харитонова* $(k=0)$. *Причина в том, что* $S(\omega)$ *в непрерывном случае это прямоугольник, ориентация которого не меняется, а в дискретном случае геометрия* $S(\omega)$ *совершенно другая - многоугольник с меняющимся направлением и числом ребер (их число не превышает* $2n+2$ *).*

З а м е ч а н и е 1.3. *Теорема 1.2. о принадлежности интервального полинома с вещественными коэффициентами классу* $(n,k)-$ *эквивалентности дискретных полиномов обобщается и на интервальный дискретный полином с комплексными коэффициентами, но для экономии места здесь не приводится.*

З а м е ч а н и е 1.4. *Требование $\alpha_i > 0$ для всех $i = \overline{0,n}$ оставлено для простоты, так как, если некоторые m чисел $\alpha_i = 0$, то параллелепипед коэффициентов Q поменяет размерность с $n+1$ на $n-m+1$, а наибольшее число ребер многоугольника $S(\omega)$ станет меньше, т. е. $2(n-m)+2$.*

Чтобы семейство $F(s)$ оставалось интервальным и не вырождалось в номинальный полином $F_0(s)$ можно условие $\alpha_i > 0$ для всех $i = \overline{0,n}$ заменить на условия

$$\sum_{i=0}^{n} \alpha_i > 0,\ \alpha_i \geq 0,\ i = \overline{1,n}.$$

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (пр. ℵ 10-08-00624).

Список литературы

1. Л.Д. Блистанова И.В. Зубов Н.В. Зубов Н.А. Северцев, *Конструктивные методы теории устойчивости и их применение к задачам численного анализа*, ООП НИИ Химии СПбГУ, СПб, 2002, 119 с.

2. Г.А. Зеленков, “Робастная устойчивость в системах первого приближения”, Вопросы теории безопасности и устойчивости систем, **7(2)** (2005), 13-15.

3. Г.А. Зеленков Н.В. Зубов В.Ф. Неронов, “Критерии существования выпуклых множеств неустойчивых многочленов.”, Труды Института системного анализа РАН «Динамика нелинейных систем»., **17(1)** (2005), 145-148.

4. Б.Т. Поляк П.С. Щербаков, *Робастная устойчивость и управление*, Наука, М, 2002, 303 с.

5. М.М. Постников, *Устойчивые многочлены*, Наука, Главная редакция физико-математической литературы, М, 1981, 176 с.

5. В. Стрейц, *Метод пространства состояний в теории дискретных линейных систем управления*, Наука, М, 1985

6. V. Kucera, *Discrete linear control*, John Wiley, New York, 1979.

The investigation of robust behavior interval polynoms

© V. I. Zubov[4], I. V. Zubov[5], A. F. Zubova[6]

Abstract. In this article with help new definition, the unit radius with center in zero is divides polynom on number roots outside and inside circle, is summarizes principle of exception zero for investigation robust behavior of families discreet polynomials. In partial case, for discreet interval polynomials is results graphic criteria they is belong to classes (n, k) - equivalent discreet polynomials. Is discusses the employing this method for another families polynomials.

Key Words: interval polynomials, Mikhailov criterion, hodograph

[4] Post-graduate chair theory of control; SPbGU, t. Saint-Petersburg; ddemidova@mail.ru
[5] Professor chair theory of control; SPbGU, t. Saint-Petersburg; ddemidova@mail.ru
[6] Professor chair theory of control; SPbGU, t. Saint-Petersburg; ddemidova@mail.ru