УДК 517.929

Модификация численных методов интегрирования

© А. В. Зубов[1], Л. Г. Каляда[2], А. И. Нечаев[3], И. Г. Ужегов[4]

Аннотация. В данной статье предложен новый модифицированный метод численного интегрирования систем обыкновенных дифференциальных уравнений, обладающих кососимметрической матрицей коэффициентов при линейных членах.

Ключевые слова: линейная система обыкновенных дифференциальных уравнений, численный метод, ортогональная фундаментальная матрица

1. Введение

Предложим модификацию численных методов интегрирования систем обыкновенных дифференциалных уравнений, учитывающих физическую природу этих уравнений, т.е. наличие интегралов. Мы будем модифицировать численные методы интегрирования систем обыкновенных дифференциальных уравнений, обладающих кососимметрической матрицей коэффициентов при линейных членах. Модифицированные методы являются более точными, чем исходные методы Рунге-Кутты, Адамса-Штермера и другие, и более предпочтительными в задачах интегрирования на больших промежутках. Точность модифицированных методов обусловлена тем, что они сохраняют интеграл однородной системы - свойство ортогональности фундаментальной матрицы.

2. Постановка задачи

Рассмотрим линейную систему

$$\dot{X} = A(t)X, \tag{2.1}$$

где $X = (x_1, \ldots, x_n)^\star$, $A(t)$ - кососимметрическая $(n \times n)$- матрица [1]. Условия теоремы существования и единственности мы будем считать выполненными. Решение задачи Коши $X = X_0$ при $t = 0$ дается формулой

$$X(t) = W(t)X_0, \tag{2.2}$$

где $W(t)$ - фундаментальная матрица, удовлетворяющая соотношениям

$$\dot{W} = A(t)W, W(0) = E.$$

Известно [1], что $W(t)$ является унитарной матрицей, т.е. выполняется соотношение

$$W(t)W^\star(t) = E. \tag{2.3}$$

Предполагаемая модификация численных методов заключается в таком их изменении, что соотношение (2.3) будет выполнено для всей последовательности приближенных значений

[1] Профессор кафедры Теории управления; СПбГУ, г. Санкт-Петербург; ddemidova@mail.ru
[2] Аспирант кафедры Теории управления; СПбГУ, г. Санкт-Петербург; ddemidova@mail.ru
[3] Аспирант кафедры Теории управления; СПбГУ, г. Санкт-Петербург; ddemidova@mail.ru
[4] Аспирант кафедры Теории управления; СПбГУ, г. Санкт-Петербург; ddemidova@mail.ru

W_k фундаментальной матрицы в узлах $t_k = kh$, причем это изменение производится в пределах локальной точности метода, что, очевидно, не ухудшает его. Рассмотрим явный метод Эйлера построения последовательности W_k

$$W_{k+1} = W_k + hA(t_k)W_k. \tag{2.4}$$

Поскольку точность этого метода является величиной порядка h^2, то соотношение

$$W_{k+1} = W_k + hA_kW_k + O(h^2),$$

где элементы матрицы $O(h^2)$ суть величины порядка h^2, не "хуже"метода (2.4). Допустим, что соотношение (2.3) на n-м шаге выполнялось. Тогда имеем

$$W_{n+1}W^{\star}_{n+1} = E - h^2A^2_n. \tag{2.5}$$

Введем этап коррекции в метод (2.4): вместо матрицы W_{n+1} в качестве очередного приближенного значения мы будем брать унитарную матрицу $Un+1$ полярного разложения матрицы W_{n+1}. Пусть $W_{n+1} = F_{n+1}U_{n+1}$ - полярное разложение матрицы W_{n+1}, где F_{n+1} - симметрическая, положительно определенная матрица, U_{n+1} - унитарная матрица. Из соотношения (2.5) следует

$$F^2_{n+1} = E - h^2A^2_n.$$

Отсюда имеем $F_{n+1} = E-(\frac{1}{2})h^2A^2_n+O(h^2)$. Оценим величину $W_{n+1}-U_{n+1}$. Из последнего соотношения видно, что

$$W_{n+1} - U_{n+1} = -\frac{1}{2}h^2A_nU_{n+1} - O(h^4)$$

является величиной порядка h^2, т.е. находится в пределах точности метода (2.4). Обозначим $U(W)$ операцию нахождения унитарной матрицы U полярного разложения матрицы W, т.е. $U_{n+1} = U(W_{n+1})$. Таким образом, мы получили двухэтапный вычислительный алгоритм модифицированного метода Эйлера:

$$\tilde{W}_{n+1} = W_n + hA_nW_n$$

$$W_{n+1} = U(\tilde{W}_{n+1}).$$

Покажем теперь, что введение этапа коррекции не ухудшает и методы более высоких порядков. Пусть численный метод

$$W_{n+1} = F(W_{n-q}, W_{n-q+1}, \ldots, W_n, \ldots, W_{n+s})$$

является методом k-го порядка, т.е. имеем соотношение

$$W_j = W(jh) + O(h^k).$$

Тогда из соотношения (2.3) следует

$$W_j = W^{\star}_j = F^2_{j+1} = E + O(h^k).$$

Следовательно, $F_{j+1} = E + O(h^k)$, и операция $U(W_{j+1})$ не выводит нас из пределов точности метода. Итак, вводя этап коррекции

$$W_{j+1} = U(W_{j+1}), \tag{2.6}$$

мы модифицируем исходный численный метод таким образом, что интеграл (2.3) сохраняется, т.е. приближенные значения W_j удовлетворяют соотношениям (2.3). Покажем теперь применение модифицированных методов при интегрировании неоднородных систем. Рассмотрим систему

$$\dot{X} = A(t)X + F(t, X).$$

По формуле Коши имеем

$$X(t) = W(t)W^{-1}(0)X_0 + \int_0^t W(t)W^{-1}(\tau)F d\tau. \tag{2.7}$$

Используя формулу прямоугольников, можно получить явный алгоритм

$$X_{k+1} = W_{k+1}W_k^{\star}X_k + F(t_k, X_k)(t_{k+1} - t_k)$$

и неявный алгоритм

$$X_{k+1} = W_{k+1}W_k^{\star}X_k + (F(t_k, X_k) + F(t_{k+1}, X_{k+1}))\frac{t_k - t_{k-1}}{2}.$$

Можно выписать также предсказывающее-исправляющий алгоритм

$$\tilde{X}_{k+1} = W_k^{\star}X_k + F(t_k, X_k)(t_{k+1} - t_k),$$

$$X_{k+1} = W_{k+1}W_k^{\star}X_k + F(t_{k+1}, \tilde{X}_{k+1})(t_{k+1} - t_k).$$

Используя формулу Симпсона, а также методы более высоких порядков, мы получим все многообразие подобных методов. Отметим только, что все эти методы решения интегрального уравнения (2.7) будут использовать приближенные значения фундаментальной матрицы W, которые мы будем строить с учетом корректирующего правила (2.6). Изложим метод построения ортогональной матрицы полярного разложения матрицы $W = FU$, использующий аппарат матричных функций Ляпунова. Как было показано выше, в приложениях весьма важной является задача построения полярного разложения невырожденной матрицы, т.е. представления ее в виде произведения симметричной положительно определенной матрицы на ортогональную. Такое представление всегда возможно и однозначно [2]. Пусть A - заданная невырожденная $(n \times n)$ - матрица. Требуется найти симметрическую положительно определенную матрицу F и ортогональную матрицу U такие, что выполняется соотношение

$$A = FU. \tag{2.8}$$

Введем в рассмотрение множество M_n квадратных матриц порядка n и множество D_n невырожденных матриц того же порядка. Множество M_n является линейным нормированным пространством с нормой, определяемой соотношением

$$\|C\| = \max_{X \in E_n} \frac{\|CX\|}{\|X\|}, \tag{2.9}$$

где $C \in M_n$, $X \in E_n$. На множестве M_n можно задать динамическую систему, определяемую матричной системой дифференциальных уравнений

$$\dot{X} = F(X, t), \tag{2.10}$$

где $X, F \in M$; для F выполнены условия, обеспечивающие существование, единственность и продолжимость на интервале (t_0, ∞) решений; точка обозначает дифференцирование по параметру t. Поставим следующую задачу: построить такую дифференциальную систему вида (2.10), что решение задачи Коши с начальным условием $X = X_0$ при $t = t_0 = 0$ сходится к значению матрицы U полярного разложения (2.8). Таким образом, мы сведем первоначальную задачу к численному интегрированию построенной системы дифференциальных уравнений. Рассмотрим матричное дифференциальное уравнение

$$\dot{X} = \frac{1}{2}(-X + X^{\star -1}). \tag{2.11}$$

Обозначим $X(t, X_0)$ решение системы (2.11), удовлетворяющее начальному условию $X = X_0$ при $t = 0$.

Теорема 2.1. *Если матрица начальных условий X_0 невырожденная, то решение $X(t, X_0)$ системы* (2.11) *также будет невырожденной матрицей при $t > 0$, причем решение $X(t, X_0)$ неограниченно продолжимо при $t > 0$ [2].*

Доказательство. Сначала покажем, что при $t > 0$ выполняется условие

$$X(t, X_0) \in D_n. \tag{2.12}$$

Предложим противное, а именно, пусть существует момент времени t_1, в который выполнено соотношение $det(X(t_1, X_0)X^\star(t_1, X_0)) \neq 0$. Тогда справедливо равенство

$$det(X(t_1, X_0)X^\star(t_1, X_0)) \neq 0. \tag{2.13}$$

Введем в рассмотрение матричную функцию $V = XX^\star$, заданную в M_n. Эта функция удовлетворяет на решениях системы (2.11) следующему уравнению:

$$\dot{V} = -V + E. \tag{2.14}$$

Интегрируя, получаем [3]

$$V = (V_0 - E)exp(-t) + E. \tag{2.15}$$

В силу того, что матрица $V_0 = X_0 X_0^\star$ является симметрической и положительно определенной, из формулы (2.14) следует, что при $t \geq 0$ определитель матрицы V не обращается в нуль, что находится в противоречии с формулой (2.12), которое и доказывает справедливость условия (2.12). Необходимым и достаточным условием продолжимости решений системы (2.11) является расходимость интегралов $\int_0^t \dot{v}_{ij}^{-1} dv_{ij}$. Из (2.13) имеем

$$\int_0^t v_{ij}^{-1} dv_{ij} = -ln(v_{ij} - \delta_{ij})|_0{}^t,$$

где δ_{ij} - символ Кронеккера [4]. Расходимость интеграла следует из формулы (2.14), так как из нее вытекает $v_{ij} \to \delta_{ij}$, и выражение в правой части последнего соотношения неограничено.
Доказательство закончено.

Теорема 2.2. *Решение $X(t, X_0)$ системы* (2.11) *с начальным условием $X_0 = A$ сходится при $t \to \infty$ к значению матрицы U полярного разложения* (2.8), *причем справедлива оценка*

$$\|X(t,A)-U\| < \|AA^\star - E\| exp(-t). \tag{2.16}$$

Доказательство. Поскольку решение $X(t,A)$ удовлетворяет условиям теоремы 2.1., то оно представимо единственным образом в виде

$$X(t,A) = F(t)U(t), \tag{2.17}$$

где $F(t), U(t)$ - матрицы полярного разложения. Отметим, что $F(0)=F$, $U(0)=U$. Подставляя выражение (2.16) в уравнение (2.11), можно получить следующее соотношение:

$$\dot{F}(t)F(t) + F(t)\dot{U}(t)U^\star(t)F(t) = F(t)U(t)\dot{U}^\star(t)F(t) + F(t)\dot{F}(t). \tag{2.18}$$

Из (2.14) следует, что матрица $F(t)$ представляет собой ряд по целым отрицательным степеням экспоненциальной функции параметра t с коэффициентами, являющимися постоянными симметрическими матрицами:

$$F(t) = E + \frac{1}{2}(F^2 - E)e^{-t} - \frac{1}{4}(F^2-E)^2 e^{-2t} + \dots$$

Следовательно, имеет место тождество

$$\dot{F}(t)F(t) \equiv F(t)\dot{F}(t). \tag{2.19}$$

Рассматривая совместно выражения (2.17), (2.18) и условие ортогональности $\dot{U}(t)U^\star(t) + U(t)\dot{U}^\star(t) = 0$, получаем, что имеет место соотношение [5]

$$\dot{U}(t) = 0 \,\text{или}\, U(t) \equiv const = U.$$

Поскольку $\|F(t) - E\| \to 0$ в силу (2.14), справедливо следующее утверждение:

$$X(t,A) - U\| \to 0 \,\text{при}\, t \to \infty.$$

Оценку (2.15) получаем следующим образом. По свойству нормы (2.19) можно выписать цепочку равенств и неравенств

$$\|X(t,A) - U\| = \|(F(t)-E)U(t)\| \le \|F(t) - E\| =$$

$$= \|(F^2(t) - E)(F(t)+E)^{-1}\| < \|F^2(t) - E\| =$$

$$= \|F^2 - E\| exp(-t) = \|AA^\star - E\| exp(-t).$$

При оценке нормы $\|F^2(t) - E\|$ мы использовали выражение (2.14).
Доказательство закончено.

3. Выводы

На основании доказанных теорем можно утверждать, что значение матрицы U можно получить, численно проинтегрировав систему (2.11) с начальным условием $X_0 = A$ при $t = 0$. Точность нахождения матрицы U будет зависеть как от длины интервала интегрирования, так и от точности самого метода интегрирования.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (пр. № 10-08-000624.)

Список литературы

1. И.В.Зубов, Н.В.Зубов, М.В.Стрекопытова, *Анализ управляемых систем и равновесных движений*, ВВМ, СПб., 2012, 322 с.
2. А.Ф. Зубова, *Математические методы моделирования промышленных процессов и технологий*, СПбГУ, СПб., 2004, 472 с.
3. А.В.Зубов, Н.В.Зубов, С.В.Зубов, А.Ф.Зубова, *Математические методы исследования устойчивости и надежности технических систем*, ВВМ, СПб., 2011, 362 с.
4. А.В.Зубов, Н.В.Зубов, *Динамическая безопасность управляемых систем*, Изд-во НИИ Химии СПбГУ, СПб., 2009, 172 с.
5. А.В.Зубов, С.В.Зубов, *Математические методы качественного анализа систем управления и устойчивость расчетных движений*, АООТ «Мобильность-плюс», СПб., 2012, 357 с.

The modification of calculating methods integration

© A. V. Zubov[5], L. G. Caleda[6], A. I. Nechaev[7], I. G. Ugegov[8]

Abstract. In giving article is supposes the new modification method calculating integration of systems ordinary differential equations is obtains crosssymmetrical matrix coefficients by linear numbers/

Key Words: linear system of ordinary differential equations, numerical method, orthogonal fundamental matrix.

[5] Professor of the Department of management theories, St. Petersburg State University; ddemidova@mail.ru

[6] Post-graduate of the Department of management theories, St. Petersburg State University; ddemidova@mail.ru

[7] Post-graduate of the Department of management theories, St. Petersburg State University; ddemidova@mail.ru

[8] Post-graduate of the Department of management theories, St. Petersburg State University; ddemidova@mail.ru