УДК 517.95

Продолжение функции из полупространства на все пространство с помощью ее сужения на границу

© Г. А. Смолкин[1]

Аннотация. Рассмотрено непрерывное продолжение функции из полупространства, вне которого, совпадающее с разбиением следа функции вдоль границы. Произведены оценки норм (по Соболеву) разбиения следа и продолжения через норму функции в полупространстве. Конструкция продолжения и ее модификации могут быть использованы при изучении априорных оценок в краевых задачах для вырождающихся вплоть до границы квазиэллиптических операторов.

Ключевые слова: преобразование Фурье, пространства С.Л. Соболева- Л.Н. Слободецкого, псевдодифференциальные операторы

В статье приняты следующие обозначения:
R^n - евклидово пространство точек $x = (x_1, \dots, x_n)$, $n > 1$; $\xi = (\xi_1, \dots, \xi_n)$- двойственная переменная, $x' = (x_1, \dots, x_{n-1})$, $x\xi = x_1\xi_1 + \dots + x_n\xi_n$, $i^2 = -1$, $\Omega = \{x : x_1 > 0\}$,

$$\widetilde{w} = \widetilde{w}(\xi) = \int e^{-ix\xi} w(x)dx - \text{ преобразование Фурье функции } w(x),$$

$\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ - мультииндекс с целочисленными неотрицательными координатами,

$$\partial_x^\alpha = \frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial x_1^{\alpha_1} \dots \partial x_n^{\alpha_n}}, \quad |\alpha| = \alpha_1 + \dots + \alpha_n; \ \partial_k^j = \frac{\partial^j}{\partial x_k^j}, \quad k = 1, \dots, n.$$

Пусть $s \geq 0$, $[s]-$ целая часть числа s.

Нормы $\|\cdot\|_s$, $\|\cdot\|_{s,\Omega}$ в пространствах С.Л.Соболева-Л.Н.Слободецкого определяются следующим образом:

$$\|U\|_s^2 = \int |\widetilde{U}(\xi)|^2 (1 + |\xi|)^{2s} d\xi.$$

Если $s-$ целое, то

$$\|U\|_{s,\Omega}^2 = \sum_{|\alpha| \leq s} \int_\Omega |\partial_x^\alpha U|^2 dx.$$

Если $s-$ нецелое, то

$$\|U\|_{s,\Omega}^2 = \sum_{|\alpha| \leq [s]} \int_\Omega |\partial_x^\alpha U|^2 dx + \sum_{|\alpha| \leq [s]} \int_\Omega \int_\Omega \frac{|\partial_x^\alpha U(x) - \partial_y^\alpha U(y)|^2}{|x - y|^{n+2(s-[s])}} dxdy.$$

Постоянные, возникающие в неравенствах в качестве коэффициентов, будем обозначать буквой C, быть может с индексами.

Введем разбиение единицы двойственной переменной ξ. Пусть $h(t) \in C_0^\infty(R)$, $0 \leq h(t) \leq 1$; $h(t) = 1$, если $|t| \leq 1$; $h(t) = 0$, если $|t| \geq 2$. Пусть

$$g_k(t) = h(t - k) / \sum_{j=0}^{\infty} h(t - j),$$

$$\Psi_k(\xi) = g_k(\ln((1 + |\xi|^2)^{1/2}), \ k = 0, 1, \dots \ .$$

[1] Доцент кафедры прикладной математики, дифференциальных уравнений и теоретической механики, Мордовский государственный университет имени Н. П. Огарева, г. Саранск

Очевидно, что в каждой точке $\xi \in R^n$ персекается конечное число носителей функций $\Psi_k(\xi)$,

$$\sum_{k=0}^{\infty} \Psi_k(\xi) = 1,$$

$$e^{-2}(1+|\xi|^2)^{1/2} \leq e^k \leq e^2(1+|\xi|^2)^{1/2}, \qquad (1.1)$$

если $\xi \in supp \Psi_k(\xi)$.

Функции $\Psi_k(\xi)$ соответствует псевдодифференциальный оператор $\Psi_k(D)$, определяемый по формуле

$$\Psi_k(D)w(x) = (2\pi)^{-n} \int e^{ix\xi} \Psi_k(\xi) \widetilde{w}(\xi) d\xi.$$

(Определение псевдодифференциальных операторов см., например, в работах [1], [3], [4].)

Теорема. Для каждой постоянной $\tau \in [0,1]$ существуют постоянные C_1, C_2, C_3, не зависящие от $z(x) \in C^\infty(x_n \geq 0) \bigcap C_0^\infty(R^n)$ и такие, что

$$\|Z\|_\tau \leq C_1 \|z\|_{\tau,\Omega}, \qquad (1.2)$$

$$\|w\|_\tau \leq C_2 \|z\|_{\tau,\Omega}, \qquad (1.3)$$

$$\|v\|_\tau \leq C_3 \|z\|_{\tau,\Omega}, \qquad (1.4)$$

где

$$Z(x) = \begin{cases} z(x), \text{ если } x_n \geq 0 \\ z(x_1, -x_2), \text{ если } x_n < 0, \end{cases}$$

$$w = w(x) = \sum_{k=0}^{\infty} h(x_n e^k) \nu_k(x'),$$

$$v = v(x) = \begin{cases} z(x), \text{ если } x_n \geq 0 \\ w(x), \text{ если } x_n < 0, \end{cases}$$

$\nu_k(x') = Z_k(x', 0)$, $Z_k(x) = \Psi_k(D) Z(x)$, $w(x)$ назовем разбиением следа функции $z(x)$ вдоль плоскости $x_n = 0$.

Доказательство.

Согласно работе Слободецкого [2] функция $Z(x)$ удовлетворяет неравенству (1.2).

Докажем неравенство (1.3). Из неравенства

$$\|w\|_\tau^2 \leq C \int (1+|\xi|)^{2\tau} | \int e^{-ix_n\xi_n} \widetilde{w}(\xi', x_n) dx_n|^2 d\xi'$$

следует

$$\|w\|_\tau^2 \leq C \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{k=l}^{\infty} \int \widetilde{\nu_l}(\xi') \overline{\widetilde{\nu_k}}(\xi') (1+|\xi|)^{2\tau} I_l \overline{I}_k d\xi,$$

где

$$I_l = \int e^{-ix_n\xi_n} h(x_n e^l) dx_n, \;\; I_k = \int e^{-iy_n\xi_n} h(y_n e^k) dy_n$$

После замены $x_n e^l$ на x_n, $\xi_n e^{-l}$ на ξ_n получаем

$$\|w\|_\tau^2 \leq C \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{k=l}^{\infty} \int \widetilde{\nu_l}(\xi') \overline{\widetilde{\nu_k}}(\xi') (1+|\xi'|^{2\tau} + \xi_n^{2\tau} e^{2l\tau}) J_l \overline{J}_k d\xi,$$

где

$$J_l = \int e^{-ix_n\xi_n} h(x_n)dx_n, \ \ J_k = \int e^{-iy_n\xi_n e^l} h(y_n e^k)dy_n.$$

Очевидно $|J_l| \le C(1+\xi_n^4)^{-1}, \ |J_k| \le Ce^{-k}$.

Поэтому, имеем

$$\|w\|_\tau^2 \le C\sum_{l=0}^{\infty}\sum_{k=l}^{\infty}\int \widetilde{\nu}_l(\xi')\overline{\widetilde{\nu}_k}(\xi')(1+|\xi'|^{2\tau}+e^{2l\tau})e^{-k}d\xi'. \tag{1.5}$$

Поскольку

$$\nu_k(\xi') = \int \Psi_k(\xi)\widetilde{Z}(\xi)d\xi_n,$$

то из неравенства Коши-Буняковского и из (1.1) следует

$$|\nu_k(\xi')|^2 \le Ce^k\int |\Psi_k(\xi)\widetilde{Z}(\xi)|^2 d\xi_n, \ \ k = 0, 1, 2, ...$$

Отсюда, из (1.5), (1.1) и $Z_k(x) = \Psi_k(D)Z(x)$, получаем

$$\begin{aligned}
\|w\|_\tau^2 &\le C\sum_{l=0}^{\infty}\sum_{k=l}^{\infty}\|Z_l\|\|Z_k\|e^{(l+k)/2}(e^{2\tau}+e^{2l\tau})e^{-k} \\
&\le C\sum_{l=0}^{\infty}\sum_{k=l}^{\infty}\|Z_l\|\|Z_k\|e^{2l\tau+(l-k)/2} \le C\sum_{l=0}^{\infty}\sum_{k=l}^{\infty}(\|Z_l\|_\tau^2+\|Z_k\|_\tau^2)e^{(l-k)/2} \\
&\le C(\|Z\|_\tau^2+\|Z_0\|_\tau^2+e^{-1/2}\|Z_1\|_\tau^2+e^{-2/2}\|Z_2\|_\tau^2+\cdots+e^{-k/2}\|Z_k\|_\tau^2+\cdots \\
&\quad +\|Z_1\|_\tau^2+e^{-1/2}\|Z_2\|_\tau^2+\cdots+e^{(1-k)/2}\|Z_k\|_\tau^2+\cdots \\
&\quad +\|Z_2\|_\tau^2+\cdots+e^{(2-k)/2}\|Z_k\|_\tau^2+\cdots \\
&\quad +\cdots \\
&\quad +\|Z_k\|_\tau^2+\cdots) \\
&\le C\|Z\|_\tau^2.
\end{aligned}$$

Поэтому, из (1.2) следует оценка (1.3).

Осталось доказать неравенство (1.4).

Если $\tau = 0$ или $\tau = 1$, то неравенство (1.4) следует из (1.2) и (1.3).

Пусть $0 < \tau < 1$. Имеем

$$\|v\|_\tau^2 \le C(I_1+I_2)\int(1+|\xi'|^2+\xi_n^2)^\tau|\widetilde{v}(\xi)|^2d\xi,$$

где

$$I_1 = \int(1+|\xi'|^2)^\tau\int|\widetilde{v}(\xi',x_n)|^2dx_nd\xi', \ \ I_2 = \int\xi_n^{2\tau}|\widetilde{v}(\xi)|^2d\xi.$$

Ясно, что

$$\begin{aligned}
I_1 &\le \int(1+|\xi'|^2)^\tau\int_{x_n>0}|\widetilde{Z}(\xi',x_n)|^2dx_nd\xi' \\
&+\int(1+|\xi'|^2)^\tau\int_{x_n<0}|\widetilde{w}(\xi',x_n)|^2dx_nd\xi' \le C(\|Z\|_\tau^2+\|w\|_\tau^2) \le C\|z\|_{\tau,\Omega}^2.
\end{aligned}$$

Из работы Слободецкого [2] имеем

$$I_1 \leq C(\|w\|^2 + J),$$

где

$$J = \int\int\int |w(x', x_n) - w(x', y_n)|^2 / |x_n - y_n|^{1+2\tau} dx_n dy_n dx'$$
$$\leq C(J_1 + J_2 + J_3) dx',$$

$$J_1 = \int\int_{y_n>0}\int_{x_n>0} |z(x', x_n) - z(x', y_n)|^2 / |x_n - y_n|^{1+2\tau} dx_n dy_n dx'$$
$$\leq C\|z\|^2_{\tau,\Omega},$$

где

$$J_2 = \int\int_{y_n<0}\int_{x_n<0} |w(x', x_n) - w(x', y_n)|^2 / |x_n - y_n|^{1+2\tau} dx_n dy_n dx'$$
$$\leq C\|w\|^2_{\tau} \leq C\|z\|^2_{\tau,\Omega}.$$

Последнее неравенство следует из (1.3).

$$J_3 = \int\int_{y_n<0}\int_{x_n>0} |z(x', x_n) - w(x', y_n)|^2 / |x_n - y_n|^{1+2\tau} dx_n dy_n dx'$$
$$\leq C(J_4 + J_5),$$

$$J_4 = \int\int_{y_n<0}\int_{x_n>0} |w(x', x_n) - w(x', y_n)|^2 / |x_n - y_n|^{1+2\tau} dx_n dy_n dx'$$
$$\leq C\|w\|^2_{\tau} \leq C\|z\|^2_{\tau,\Omega},$$

$$J_5 = \int\int_{y_n<0}\int_{x_n>0} |z(x', x_n) - w(x', x_n)|^2 / |x_n - y_n|^{1+2\tau} dx_n dy_n dx' \leq C J_6,$$
$$J_6 = \int\int_{x_n>0} |z(x', x_n) - w(x', x_n)|^2 / |x_n|^{2\tau} dx_n dx'.$$

Далее, положим

$$g_k = g_k(x) = (1 - h(x_n e^k)) Z_k(x),\ u_k = u_k(x) = h(x_n e^k)(Z_k(x) - Z_k(x', 0)).$$

Из равенств

$$w(x) = \sum_{k=0}^{\infty} h(x_2 e^k) Z_k(x_1, 0),\ z(x) = \sum_{k=0}^{\infty} Z_k(x) \text{ при } x_2 \geq 0$$

следует $J_6 \leq C(J_7 + J_8)$, где

$$J_7 = \int\int_{x_n>0} |\sum_{k=0}^{\infty} g_k(x)|^2 / |x_n|^{2\tau} dx_n dx',$$

$$J_8 = \int\int_{x_n>0} |\sum_{k=0}^{\infty} u_k(x)|^2/|x_n|^{2\tau} dx_n dx^{'}.$$

Так как $g_k(x) = 0$ при $x_n \geq e^{-l}$, то

$$J_7 \leq \int\int_{x_n>0} \sum_{l=0}^{\infty}\sum_{k=l}^{\infty} |g_l(x)||g_k(x)|e^{2l\tau} dx_n dx^{'}$$

$$\leq C \sum_{l=0}^{\infty}\sum_{k=l}^{\infty} \|Z_l(x)\|\|Z_k(x)\|e^{2l\tau}$$

$$\leq C \sum_{l=0}^{\infty}\sum_{k=l}^{\infty} (\|Z_l(x)\|^2 e^{2l\tau+(l-k)\tau} + \|Z_k(x)\|^2 e^{2k\tau+(l-k)\tau})$$

$$\leq C(\sum_{l=0}^{\infty}(\|Z_l(x)\|_\tau^2 + \sum_{l=0}^{\infty}\sum_{k=l}^{\infty} \|Z_k(x)\|_\tau^2 e^{(l-k)\tau})$$

$$\leq C(\|Z(x)\|_\tau^2 + \sum_{k=0}^{\infty}\sum_{l=0}^{k} \|Z_k(x)\|_\tau^2 e^{(l-k)\tau}) \leq C\|Z(x)\|_\tau^2.$$

Оценим J_8.

Из формулы Ньютона-Лейбница и неравенства Коши-Буняковского следует

$$|Z_k(x) - Z_k(x^{'},0)| \leq |x_n|^{1/2}(\int |\frac{\partial}{\partial t} Z_k(x^{'},t)|^2 dt)^{1/2}$$

. Отсюда получаем

$$J_8 \leq \sum_{l=0}^{\infty}\sum_{k=l}^{\infty} \|D_2 Z_l\|\|D_2 Z_k\| \int h(x_n e^k)|x_n|^{1-2\tau} dx_n.$$

Заменив $x_n e^k$ на x_2 и учитывая (1.1), получаем

$$J_8 \leq C \sum_{l=0}^{\infty}\sum_{k=l}^{\infty} \|Z_l\|\|Z_k\|e^{2k\tau+l-k} \int h(x_n)|x_n|^{1-2\tau} dx_n.$$

$$\leq C \sum_{l=0}^{\infty}\sum_{k=l}^{\infty} \|Z_l\|\|Z_k\|e^{2k\tau+l-k}$$

$$\leq C \sum_{l=0}^{\infty}\sum_{k=l}^{\infty} (\|Z_l\|^2 e^{2l\tau+l-k} + \|Z_k\|^2 e^{-2l\tau+2k\tau+l-k})$$

$$\leq C \sum_{l=0}^{\infty} \|Z_l\|^2 e^{2l\tau} + \sum_{l=0}^{\infty}\sum_{k=l}^{\infty} \|Z_k\|^2 e^{-2l\tau+2k\tau+l-k}$$

$$\leq C(\|Z\|_\tau^2 + \sum_{k=0}^{\infty}\sum_{l=0}^{k} \|Z_k\|^2 e^{-2l\tau+2k\tau+l-k} \leq C\|Z\|_\tau^2.$$

Этим завершается доказательство теоремы.

Список литературы

1. Егоров Ю. В., *Линейные дифференциальные уравнения главного типа*, Наука, М., 1984, 360 с.

2. Слободецкий Л. Н., "Обобщенные пространства С.Л.Соболева и их приложения к краевым задачам для дифференциальных уравнений в частных производных", *Уч. зап. Ленингр. пед. ин-та*, 1958, №197, 54-112.

3. Тейлор М., *Псевдодифференциальные операторы*, Мир, М., 1985, 472 с.

4. Хермандер Л., *Псевдодифференциальные операторы и гипоэллиптические уравнения*, Мир, М., 1967.

Continuation of the function of half of all space via its restriction to the boundary efootnote

© **G. A. Smolkin**[2]

Abstract. Consider a continuous extension of the half-space, which is coincident with trace partition function along the border. Produced estimates of the norms (Sobolev) partition trace and continue through the norm of the function in the half. design extension and its modifications can be used the study of a priori estimates in boundary value problems for degenerate up to the boundary of quasi-elliptic operators.

Key Words: Fourier transformation,space S.L. Sobolev - L.N. Slobodetskii, pseudodifferential operators

[2] Associate professor of Applied Mathematics, Differential Equations and theoretical Mechanics Chair, Mordovian State University after N.P. Ogarev, Saransk